Repetitorium 26.03.2021

Donnerstag, 25. März 2021 23:58

Zufallsexperimente

Zufallsvariable & Erwartungswert

Zufallsvariable =

Zuweisung von Ergebnissen eines Zufallsexperiment in einen Zahlenraum
Meist relativ beschränkter Wertebereich

Erwartungswert =

Durchschnittliche einer Zufallsvariable (bei -> unendlicher Ausführung des Experiments
Immer an Zufallsvariable gekoppelt

$E[X]$ = Summe (über alle möglichen Ergebnisse x) $x * P[X = x]$

Bsp.: Würfeln: Zufallsvariable X: Anzahl der Punkte, $X \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$E[X]$ = Summe von i = 1 bis 6 über $i * P[X = i]$
= Summe von i = 1 bis 6 über $i * 1/6 = 1/6 *$ Summe von i = 1 bis 6 über i
$= 1/6 * (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1/6 * 21 = 3{,}5$

Indikator-Zufallsvariablen

Zufallsvariablen, die Werte 1 oder 0 annehmen können.

$\Rightarrow E[X] = 1 * P[X=1] + 0 * P[X = 0] = P[X=1]$

Werden verwendet, um ein großes Zufallsexperiment auf mehere kleine zu reduzieren

Wichtig: Linearität des Erwartungswertes

$E[A + B] = E[A] + E[B]$

D.h. für eine Zufallsvariable X und n Indikator-Zufallsvariablen X_i mit X = Summe (0 -> n) über X_i, dann gilt für den Erwartungswert:

$E[X] = E[$ Summe(0 -> n) über $X_j\,]$ = Summe (0 -> n) $E[X_i]$
= Summe (0 -> n) $P[X_i = 1]$

Bsp.: Blatt 5, Aufgabe 1

a) Siehe Definition des Erwartungswertes:
    a. $E[K]$ = Summe (0 -> n) $k * P[K = k]$
b) Indikatorzufallsvariablen
    a. $K_i = \begin{cases} 1 \text{ falls } b_i > b_{i-1} \text{ und } b_i > b_{i+1}; \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$
    b. K = Summe (1 -> n) K_i
c) Siehe Formel in I-ZFV (Linearität des Erwartungswerts):
    a. $E[K] = E[$ Summe (1 -> n) $K_i\,]$ = Summe (1 -> n) $E[K_i]$
d) $P(K_i = 1)$ ist Wahrscheinlichkeit, dass die Klausur im Semester i als leicht empfunden wird
    a. $E[K_i] = 0 * P[K_i=0] + 1 * P[K_i = 1] = P[K_i = 1]$
e) Aufteilung in zwei Teilwahrscheinlichkeiten
    a. Bewertung $b_i = j$
        Wahrscheinlichkeit: $1/(n+2)$
    b. $K_i = 1$
        $b_{i-1}, b_{i+1} < j$, restliche Zahlen beliebig permutieren

        $j\,(j-1)\,(n-1)!$ Gute Möglichkeiten
        $(n+1)!$ Gesamtmöglichkeiten

        => Wahrscheinlichkeit: gute/gesamt $= j\,(j-1)\,(n-1)!\,/\,(n+1)!$
    c. Zusammenführen: Wahrscheinlichkeit: $j * (j-1)\,/\,(\,(n+2)\,(n+1)(n)\,)$
f) $P(K_i = 1)$ für festes i?
    a. $P(K_i = 1)$ = Summe(j von 0 -> n+1) $j * (j-1)\,/\,(\,(n+2)\,(n+1)\,(n)\,)$
        $= 1\,/\,(\,(n+2)\,(n+1)\,(n)\,)$ Summe(j von 0 -> n+1) $j\,(j-1)$
        $= 1\,/\,(\ldots)$ Summe(j von 1 -> n+1) $j^2 - j$
        $= 1/\,(\ldots)$ (Summe(j von 1 -> n+1) j^2 - Summe(j von 1 -> n+1) j)
        $= (2n + 1 + 3)\,/\,(6\,(n+2)) = 2\,(n+2)\,/\,(6\,(n+2)) = 1/3$

g) $E[K]$ = Summe(1 -> n) $E[K_i]$ = Summe(1 -> n) $P[K_i = 1]$ = Summe(1 -> n) 1/3
    = 1/3 * Summe(1 -> n) 1 = $1/3 * n = n/3$