Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 9. Juni 2021

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

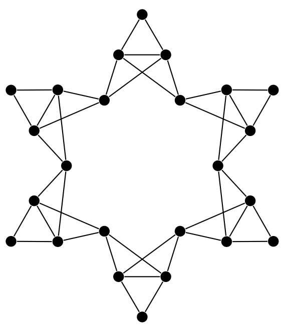
9. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2021)

Aufgabe 1 – Dreifärbbarkeit

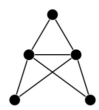
Als *Dreifärbung* eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir eine Funktion $f\colon V \to \{r, g, b\}$, bei der für jede Kante $uv \in E$ die Bedingung $f(u) \neq f(v)$ erfüllt ist, d. h. zwei benachbarte Knoten erhalten niemals dieselbe Farbe. Das Dreifärbbarkeitsproblem 3COL besteht darin zu entscheiden, ob ein gegebener Graph *dreifärbbar* ist, d. h. ob es eine Dreifärbung des Graphen gibt. Dieses Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

a) Finden Sie eine Dreifärbung des Sterngraphen aus Abbildung 1a und zeigen Sie, dass in jeder solchen Dreifärbung alle Knoten mit Grad 2 (also die Zacken des Sterns) dieselbe Farbe haben. **2 Punkte**

b) Der Sterngraph aus Teilaufgabe a) fügt sich aus sechs Exemplaren des Turmgraphen aus Abbildung 1b zusammen. Zeigen Sie, dass auch Sterne, die aus mehr oder weniger als sechs Türmen bestehen, dreifärbbar sind, wobei wiederum alle Knoten mit Grad 2 dieselbe Farbe haben müssen. **2 Punkte**



(A) Sterngraph



(B) Turmgraph

ABBILDUNG 1: Graphen für Aufgabe 1.

c) Das Problem 3COL4 besteht darin zu entscheiden, ob ein gegebener Graph mit Maximalgrad 4 dreifärbbar ist. Zeigen Sie, dass schon 3COL4 $\mathcal{NP}$-schwer ist, indem Sie eine Polynomialzeit-Reduktion von 3COL auf 3COL4 angeben.

   Geben Sie also ein Verfahren an, mit der man für einen beliebigen Graphen entscheiden kann, ob er dreifärbbar ist, indem Sie einen (hypothetischen) Test `Test3COL4` auf Dreifärbbarkeit von Graphen mit Maximalgrad 4 nutzen. Zeigen Sie, dass Ihr Verfahren korrekt ist. **4 Punkte**

   Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b)!

Aufgabe 2 – Chromatische Zahl

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Die kleinste Zahl k, die eine k-Färbung von G erlaubt, heißt *chromatische Zahl* $\chi(G)$.

a) Sei $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg v$ der maximale Knotengrad in G. Zeigen Sie, dass für die chromatische Zahl von G gilt, dass $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung aus Teilaufgabe a) scharf ist. Geben Sie dazu für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\Delta < n$ einen Graphen $G_{n,\Delta}$ an, der n Knoten besitzt, Maximalgrad Δ aufweist und $\chi(G_{n,\Delta}) = \Delta + 1$ erfüllt. **2 Punkte**

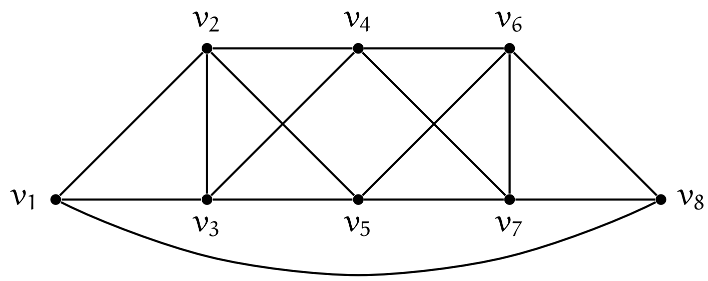
c) Erstellen Sie ein kommentiertes ganzzahliges lineares Programm (ILP), welches $\chi(G)$ für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ermittelt. **2 Punkte**

Hinweis: Sie dürfen in den Constraints Ungleichungen der Form $\ldots \neq \ldots$ nutzen. Verwenden Sie Ganzzahlen für die Farben.

CPLEX

d) Implementieren Sie das ILP aus Teilaufgabe (c) in OPL CPLEX. Ihr Modell muss in der Lage sein, ungerichtete Graphen beliebiger Größe einzulesen. Wählen Sie dazu eine geeignete Darstellung des Graphen in ihrer Daten-Datei. Laden Sie Ihre Lösung (*Modell*- und passende *Daten*-Datei) auf WueCampus hoch.

Verwenden Sie in Ihrer Daten-Datei den folgenden Beispielgraphen. Was ist die chromatische Zahl dieses Graphen?



3 Zusatzpunkte

e) Erstellen Sie nun ein kommentiertes ILP, welches $\chi(G)$ für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ermittelt, und in dem alle bis auf höchstens eine der ganzzahligen Variablen $\in \{0, 1\}$ sind. **4 Zusatzpunkte**

Hinweis: Nutzen Sie als die eine ganzzahlige Variable, die nicht in $\{0, 1\}$ liegen muss, die Gesamtzahl an Farben.

CPLEX

f) Implementieren Sie das ILP aus Teilaufgabe (e) in OPL CPLEX. Ihr Modell muss in der Lage sein, ungerichtete Graphen beliebiger Größe einzulesen. Testen Sie Ihre Implementierung anhand der Daten-Datei aus Teilaufgabe (d). Laden Sie Ihre *Modell*-Datei auf WueCampus hoch. **3 Zusatzpunkte**

CPLEX

g) Vergleichen Sie die Laufzeiten der Implementierungen aus den Teilaufgaben (d) und (f) auf einer aussagekräftigen Anzahl an (zufällig generierten) Graphen miteinander. Welche Graphen haben Sie verwendet/erzeugt? Wie verhält sich die Laufzeit in Abhängigkeit von der Knotenanzahl? Laden Sie eine Übersicht der Laufzeiten und Ihre Dateien zum Erzeugen/Importieren der Graphen (und zumindest ein Beispiel eines solchen Graphen als dat-Datei) auf WueCampus hoch. **4 Zusatzpunkte**

Aufgabe 3 – Perfektes Eliminationsschema

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass die Graphen mit perfektem Eliminationsschema gerade die chordalen Graphen sind. Für diese Aufgabe ist es essentiell, dass Sie den Beweis des Satzes von Dirac (der nicht in dem Vorlesungsvideo behandelt wurde) anschauen und verstehen. Zeigen Sie, wie man ein perfektes Eliminationsschema eines chordalen Graphen mit n Knoten in

a) $O(n^4)$ Zeit bestimmen kann. **2 Punkte**

b) $o(n^4)$ Zeit bestimmen kann. **4 Punkte**

Tipp für b): Setzen Sie den Beweis von Dirac durch einen rekursiven Algorithmus um. Der Beweis geht von einer Menge $U \subset V$ *maximaler Kardinalität* aus, für die gelten muss, dass $G[U]$ zusammenhängend ist und $U \cup N(U) \neq V$ gilt. Argumentieren Sie, dass man die Maximalität von U durch ein schwächeres Kriterium ersetzen kann, das sich leichter überprüfen lässt.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 15. Juni 2021, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) an, die das Übungsblatt bearbeitet haben.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.