

## 7. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2021)

### Aufgabe 1 – Eigenschaften von Wurzelspannbäumen

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s \in V$  ein ausgezeichnete Knoten.

Ein Knoten  $w$  ist von einem Knoten  $v$  *erreichbar*, wenn es einen  $v$ - $w$ -Weg gibt. Die *Erreichbarkeitsmenge*  $E(v)$  eines Knotens  $v$  ist die Menge aller Knoten, die von  $v$  erreichbar sind. Insbesondere ist  $v \in E(v)$ .

Wir wollen zeigen, dass  $G$  genau dann einen  $s$ -Wurzelspannbaum besitzt, wenn  $E(s) = V$  ist. Beweisen Sie dazu die folgenden beiden Aussagen:

- a) Falls  $G$  einen  $s$ -Wurzelspannbaum besitzt, dann ist  $E(s) = V$ . **1 Punkt**
- b) Falls  $E(s) = V$ , so lässt sich mit Hilfe der Tiefensuche ein  $s$ -Wurzelspannbaum ermitteln (und insbesondere existiert ein  $s$ -Wurzelspannbaum). **2 Punkte**

Sei  $G$  nun kreisfrei (d. h. ohne gerichtete Kreise). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- c) Wenn  $G$  zwei Wurzelspannbäume besitzt, dann haben beide dieselbe Wurzel. **2 Punkte**
- d) Wenn  $G$  einen Wurzelspannbaum besitzt, dann ist dieser eindeutig bestimmt. **2 Punkte**

### Aufgabe 2 – Wurzelspannbäume und ungerichtete Bäume

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s$  ein ausgezeichnete Knoten.

Zeigen Sie:  $G$  ist genau dann ein  $s$ -Wurzelspannbaum, wenn der  $G$  zugrunde liegende ungerichtete Graph ein Baum ist und  $\text{indeg}(v) = 1$  für  $v \neq s$  und  $\text{indeg}(s) = 0$  gilt.

*Hinweis:* Beachten Sie genau die Definition eines  $s$ -Wurzelspannbaums aus der Vorlesung und denken Sie daran beide Richtungen zu zeigen. **4 Punkte**

### Aufgabe 3 – Wurzelspannbäume in azyklischen Graphen

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter *azyklischer* Graph, d. h. ein Graph ohne gerichtete Kreise, und  $s \in V$  ein Knoten, von dem aus alle anderen Knoten erreichbar sind. Sei  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Funktion, die jeder Kante ein nichtnegatives Gewicht zuordnet.

- a) Um den Algorithmus von Kruskal auf  $G$  anwenden zu können, ignorieren wir die Kantenrichtungen. Zeigen Sie: Der Algorithmus von Kruskal berechnet im Allgemeinen keinen minimalen  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ . **2 Punkte**
- b) Zeigen Sie: Der Algorithmus von Jarník-Prim mit Startknoten  $s$  berechnet im Allgemeinen keinen minimalen  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ , selbst wenn er die Kantenrichtungen beachtet und immer nur ausgehende Kanten erkundet. **2 Punkte**

Betrachten Sie nun den folgenden Algorithmus (wie oben beschrieben ist von  $s$  aus jeder Knoten in  $G$  erreichbar). Dabei gibt  $\arg \min_{x \in X} f(x)$  ein  $x \in X$  aus, für das der Funktionswert  $f(x)$  unter allen  $X$  minimal ist.

DAG\_MST(gerichteter azyklischer Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$ , Kantenkostenfkt.  $c$ )

```
E' = ∅
foreach v ∈ V \ s do
    e(v) = arg min(u,v) ∈ E c((u, v))
    E' = E' ∪ {e(v)}
return T = (V, E')
```

- c) Zeigen Sie: DAG\_MST berechnet einen  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ . **3 Punkte**
- d) Zeigen Sie: Der von DAG\_MST berechnete Wurzelspannbaum ist *minimal*. **2 Punkte**

---

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 1. Juni 2021, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) an, die das Übungsblatt bearbeitet haben.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.