Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

PTAS für das
Weihnachtsmannproblem

10. Vorlesung

Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

Das Weihnachtsmannproblem

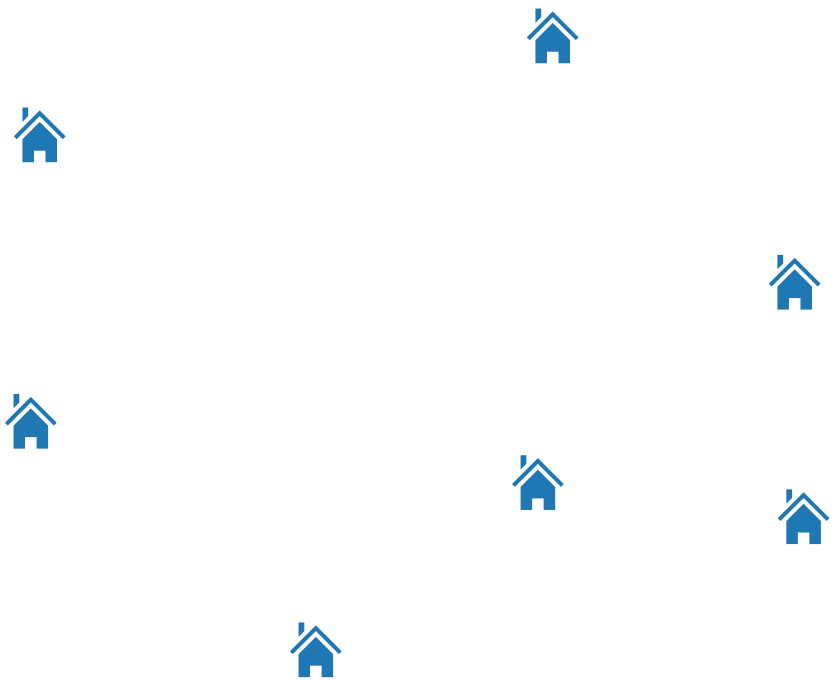
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

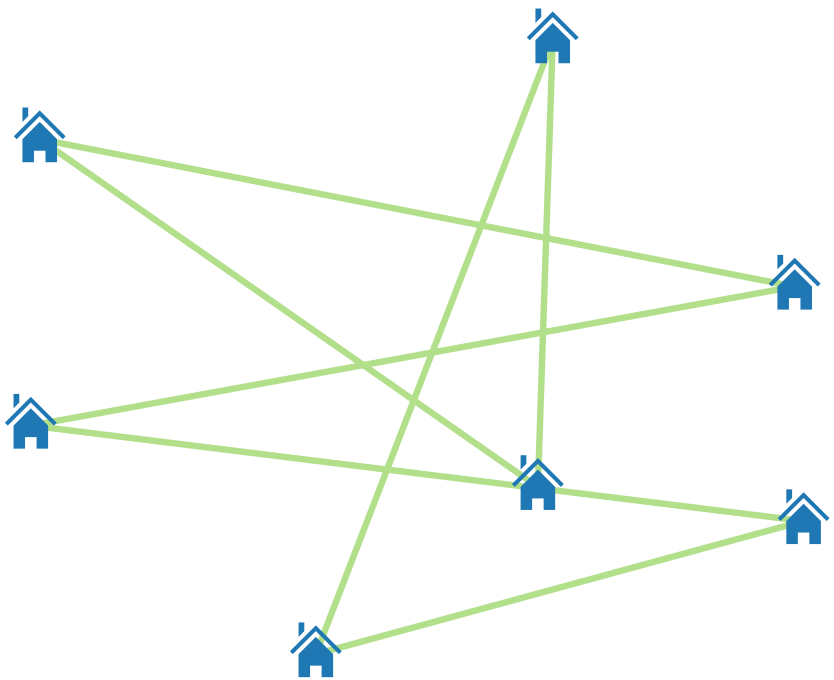


Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour

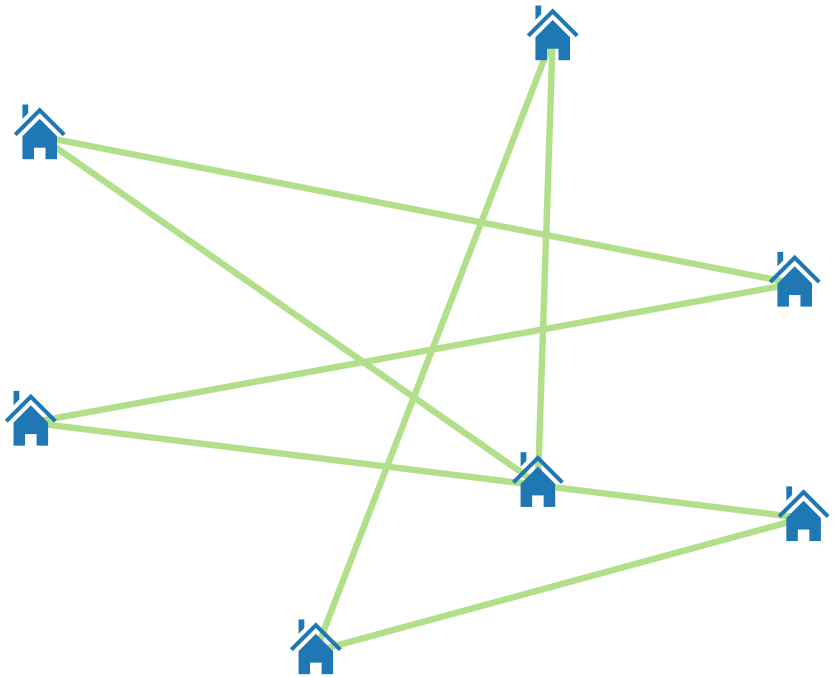


Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour

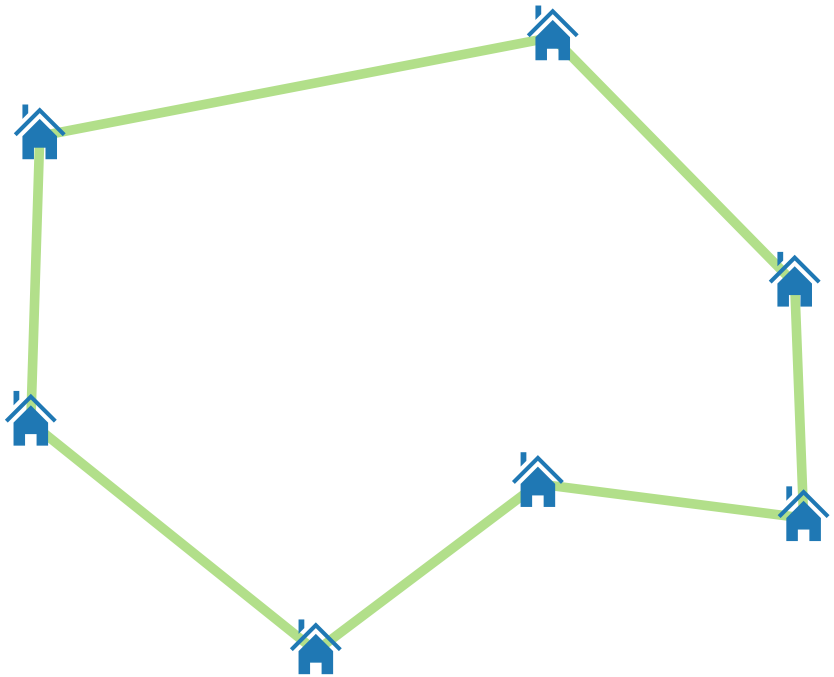


Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

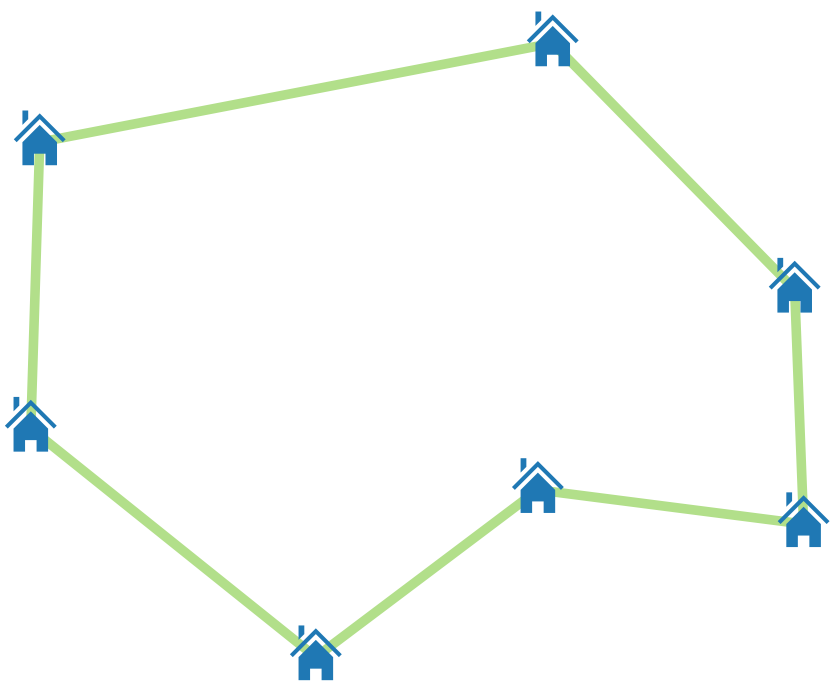


Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.



Für kein Polynom $p(n)$ lässt sich Rundreise mit Faktor $2^{p(n)}$ approximieren (außer P=NP).

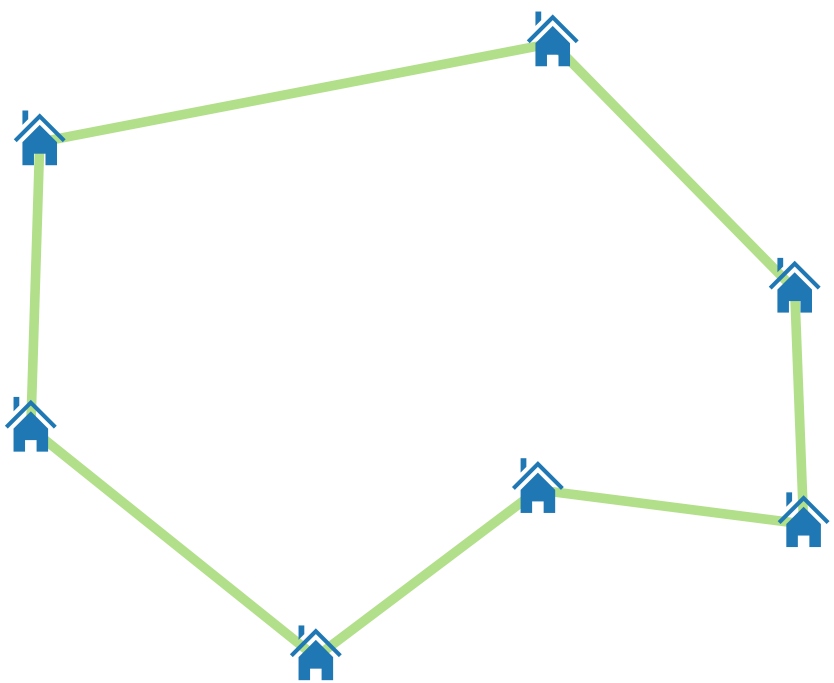
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Distanz zwischen zwei Punkten?



Für kein Polynom $p(n)$ lässt sich Rundreise mit Faktor $2^{p(n)}$ approximieren (außer P=NP).

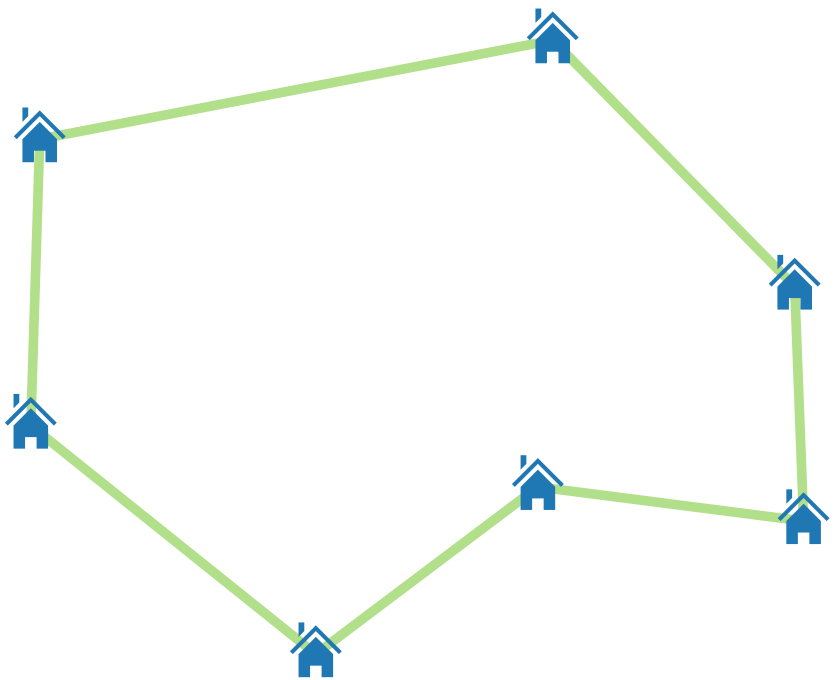
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Distanz zwischen zwei Punkten?



Für kein Polynom $p(n)$ lässt sich Rundreise mit Faktor $2^{p(n)}$ approximieren (außer P=NP).

MetrischeRundreise lässt sich mit Faktor $3/2$ approximieren.

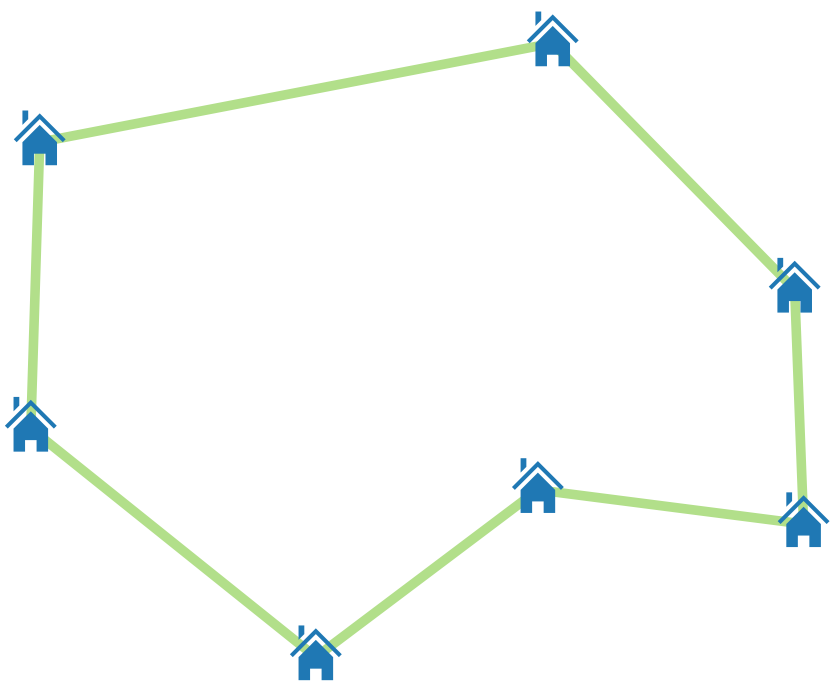
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Distanz zwischen zwei Punkten?



Für kein Polynom $p(n)$ lässt sich Rundreise mit Faktor $2^{p(n)}$ approximieren (außer P=NP).

MetrischeRundreise lässt sich mit Faktor $3/2$ approximieren.

MetrischeRundreise lässt sich nicht mit Faktor $\geq 123/122$ approximieren (außer P=NP).

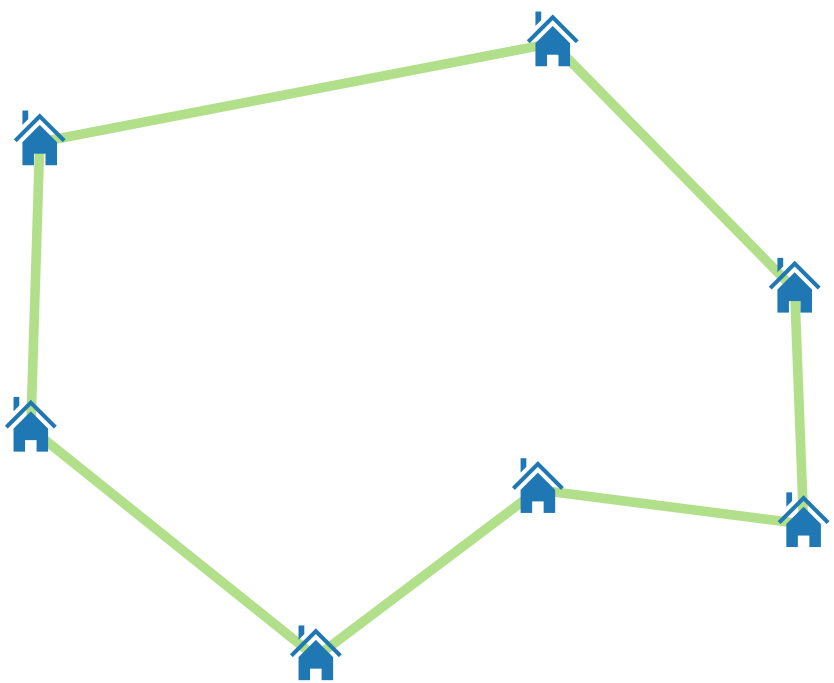
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Für kein Polynom $p(n)$ lässt sich Rundreise mit Faktor $2^{p(n)}$ approximieren (außer P=NP).

MetrischeRundreise lässt sich mit Faktor $3/2$ approximieren.

MetrischeRundreise lässt sich nicht mit Faktor $\geq 123/122$ approximieren (außer P=NP).

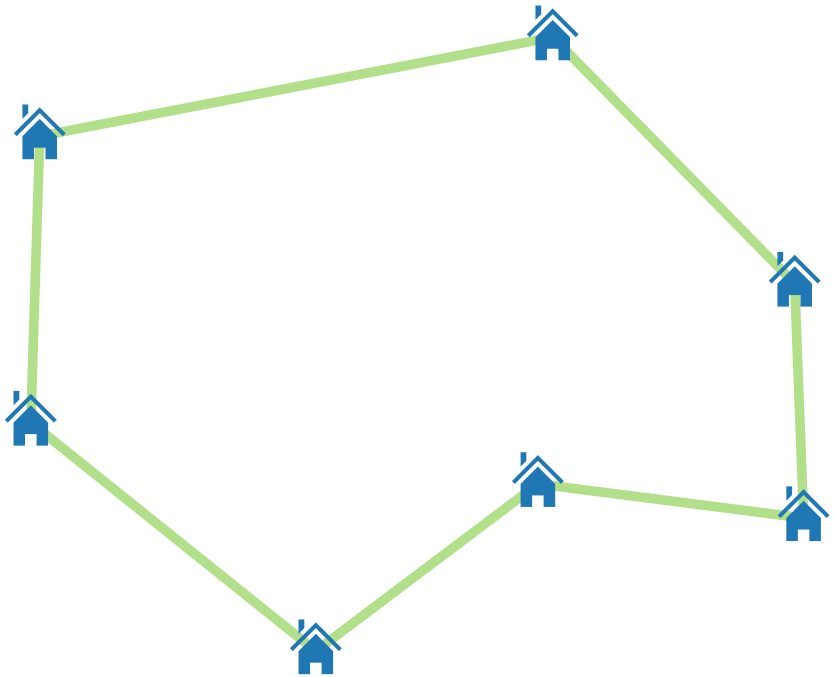
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

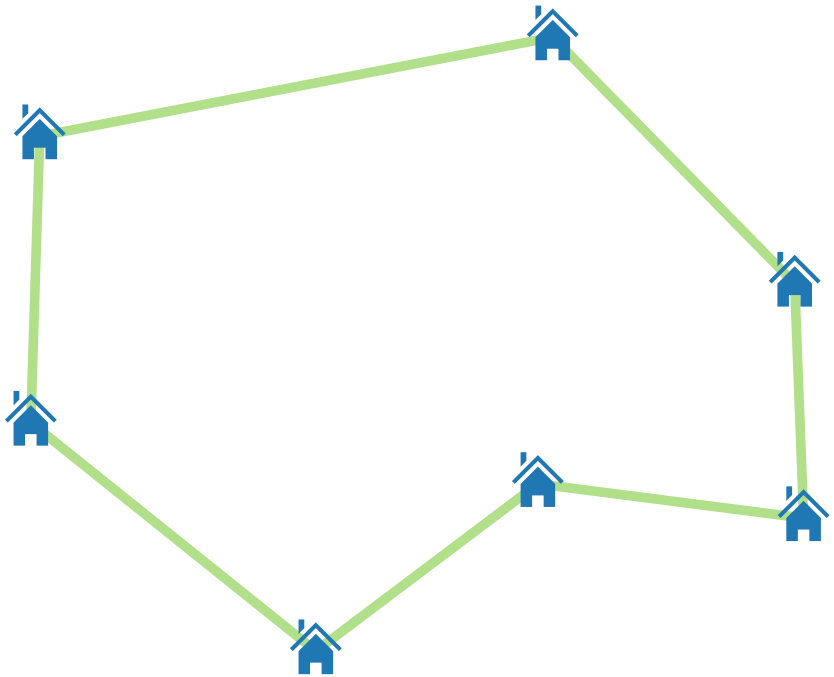
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat

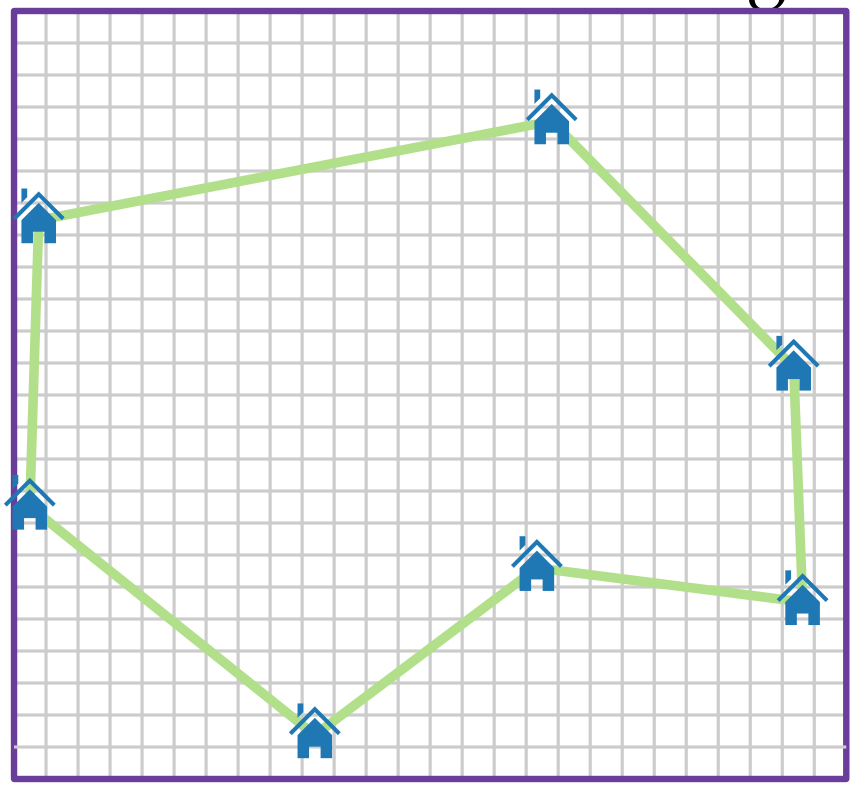
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat

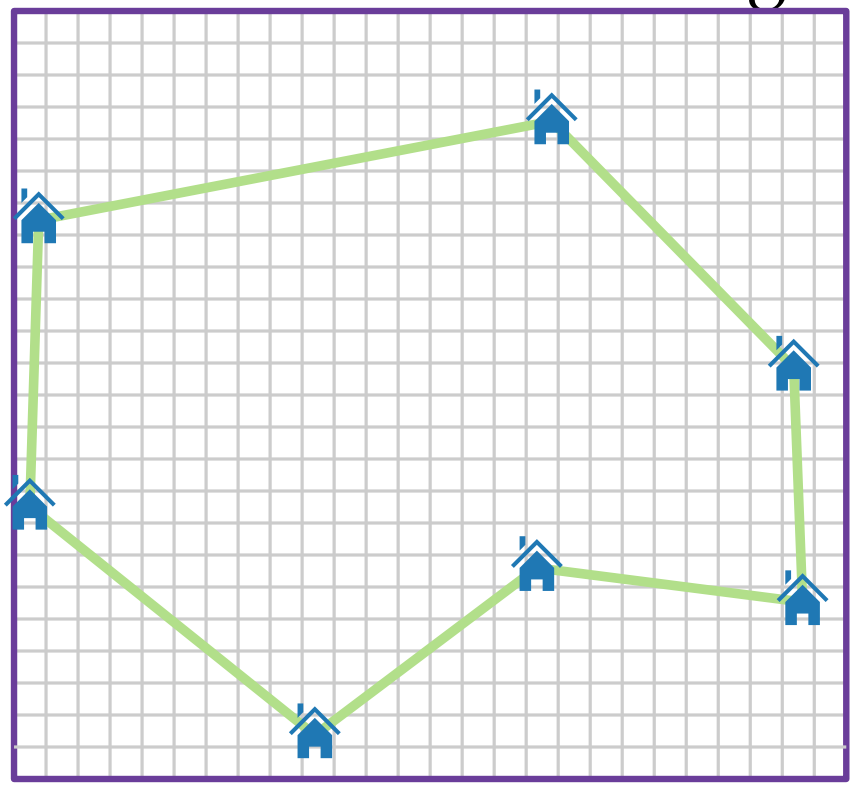
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2$

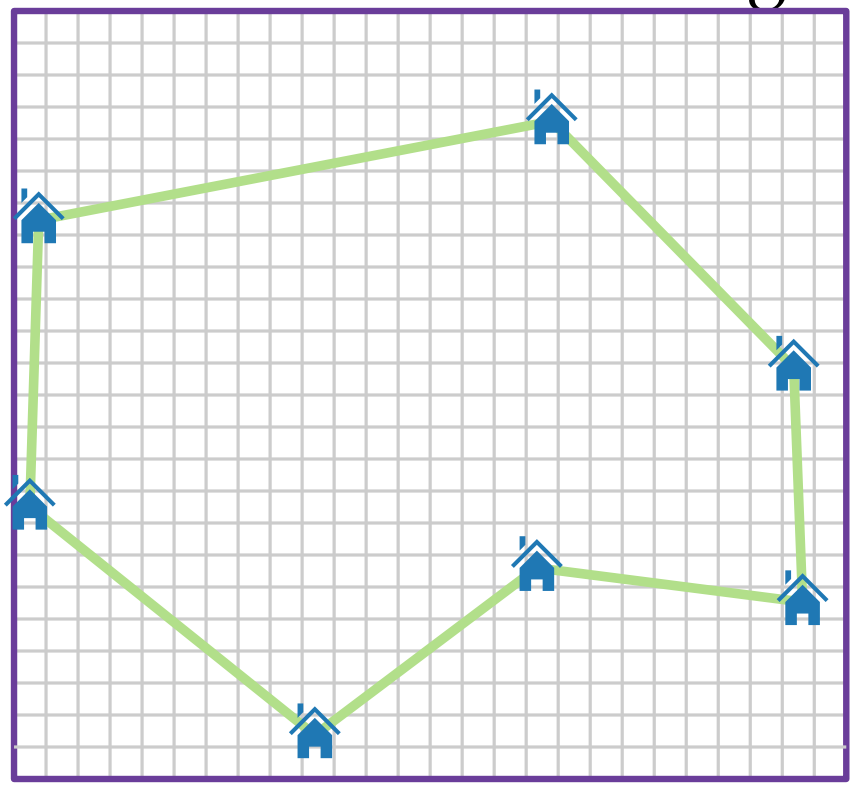
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$;

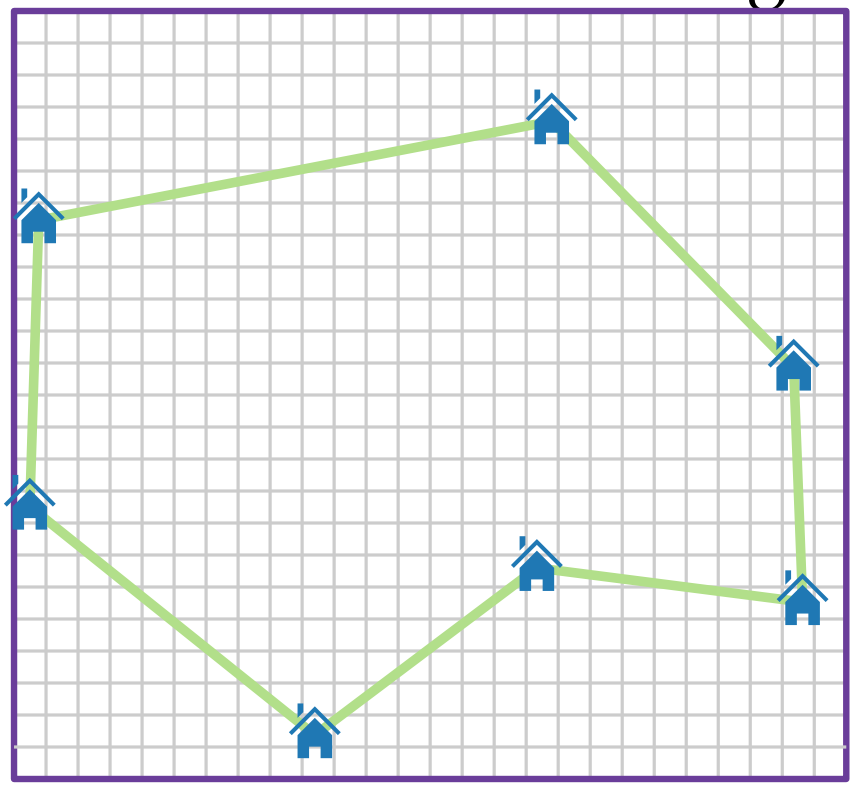
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$; $k = 2 + 2\log_2 n$

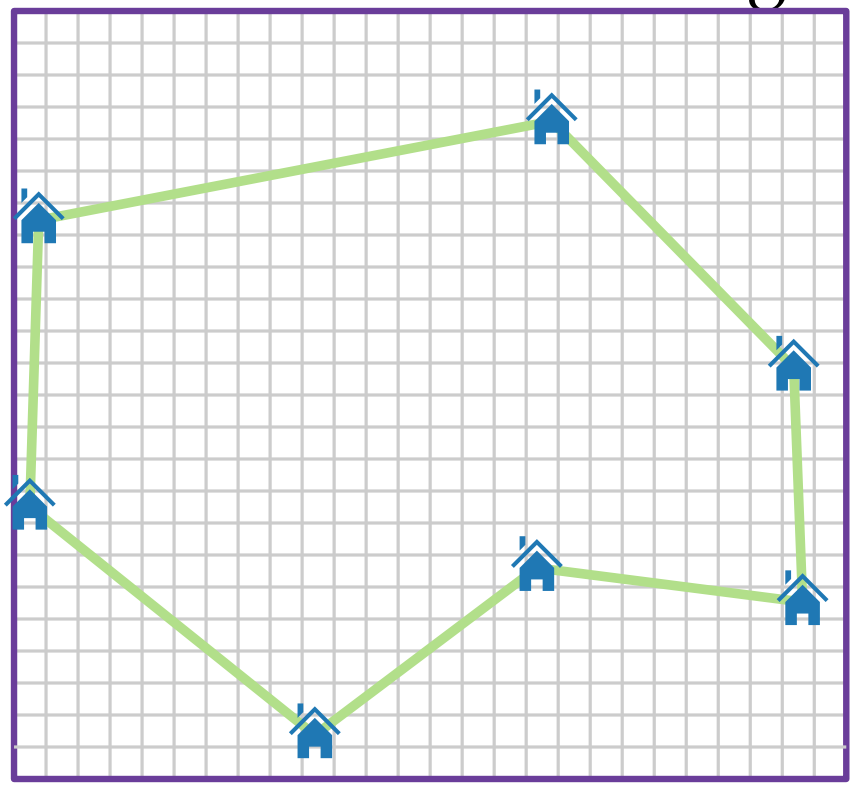
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$; $k = 2 + 2\log_2 n$
- Koordinaten ganzzahlig

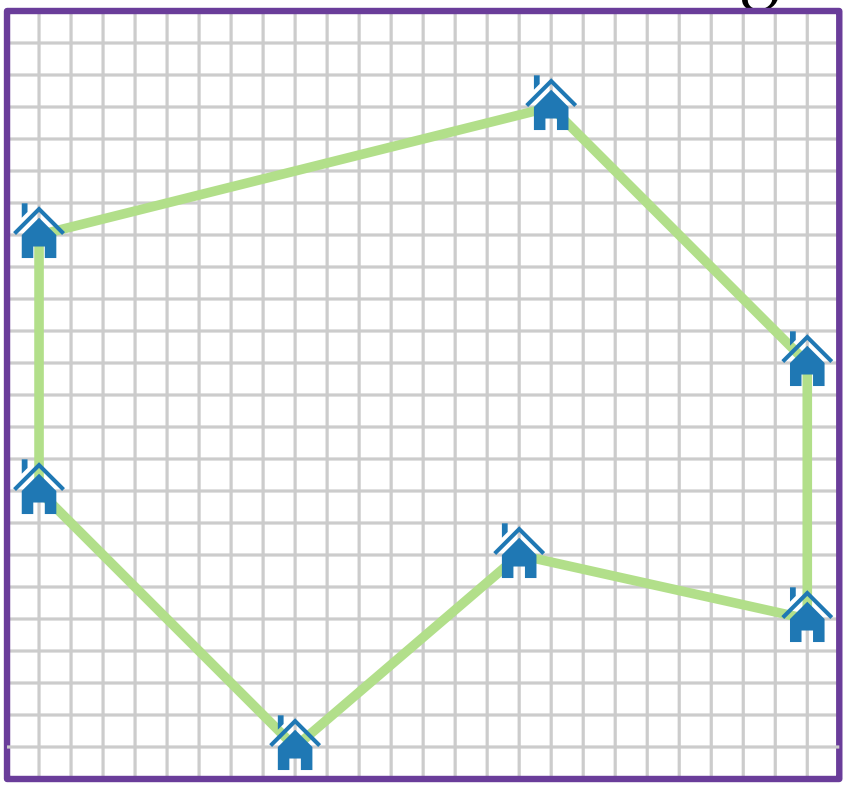
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$; $k = 2 + 2\log_2 n$
- Koordinaten ganzzahlig

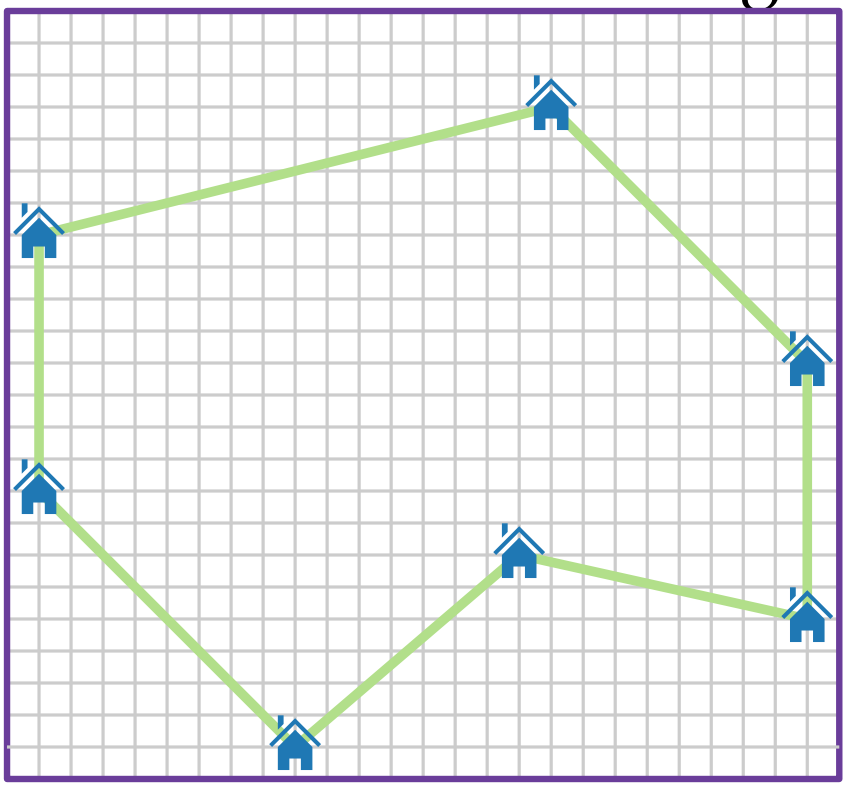
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$; $k = 2 + 2\log_2 n$
- Koordinaten ganzzahlig

(„Rechtfertigung“ ÜA)

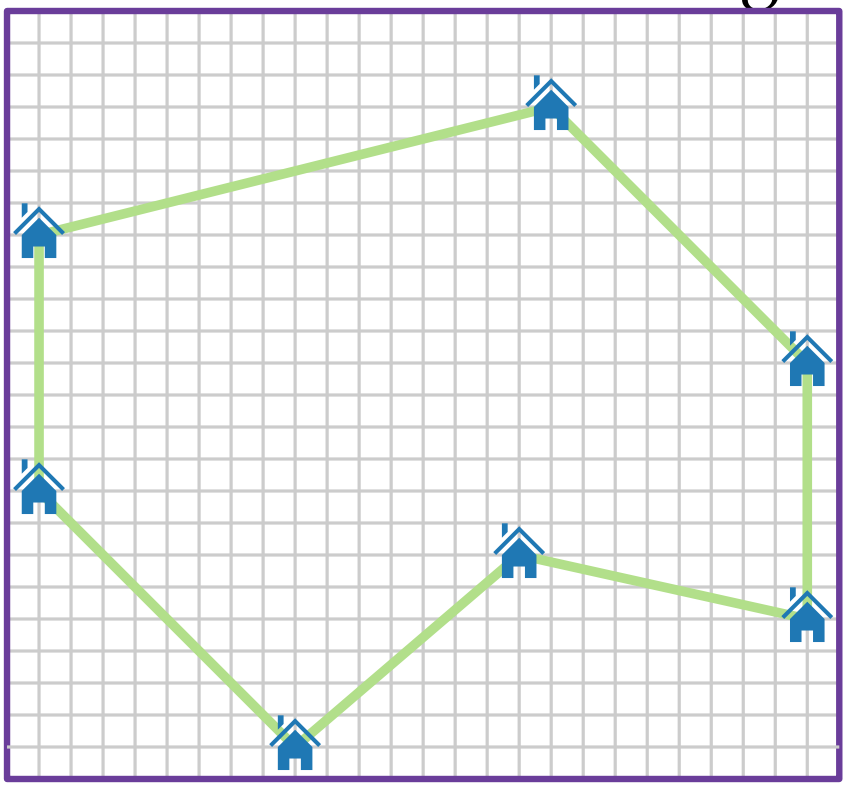
Das Weihnachtsmannproblem

Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



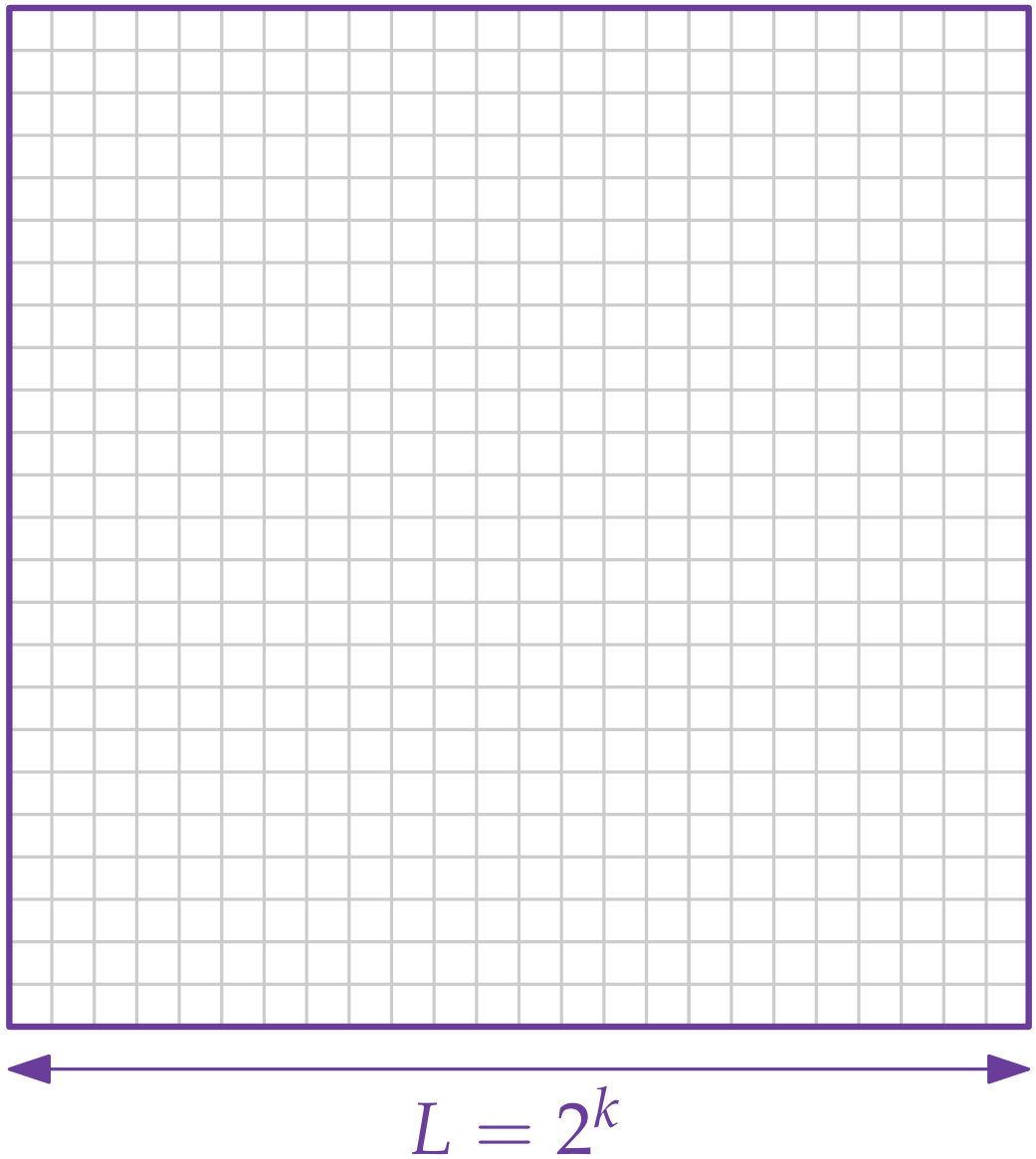
Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$; $k = 2 + 2\log_2 n$
- Koordinaten ganzzahlig

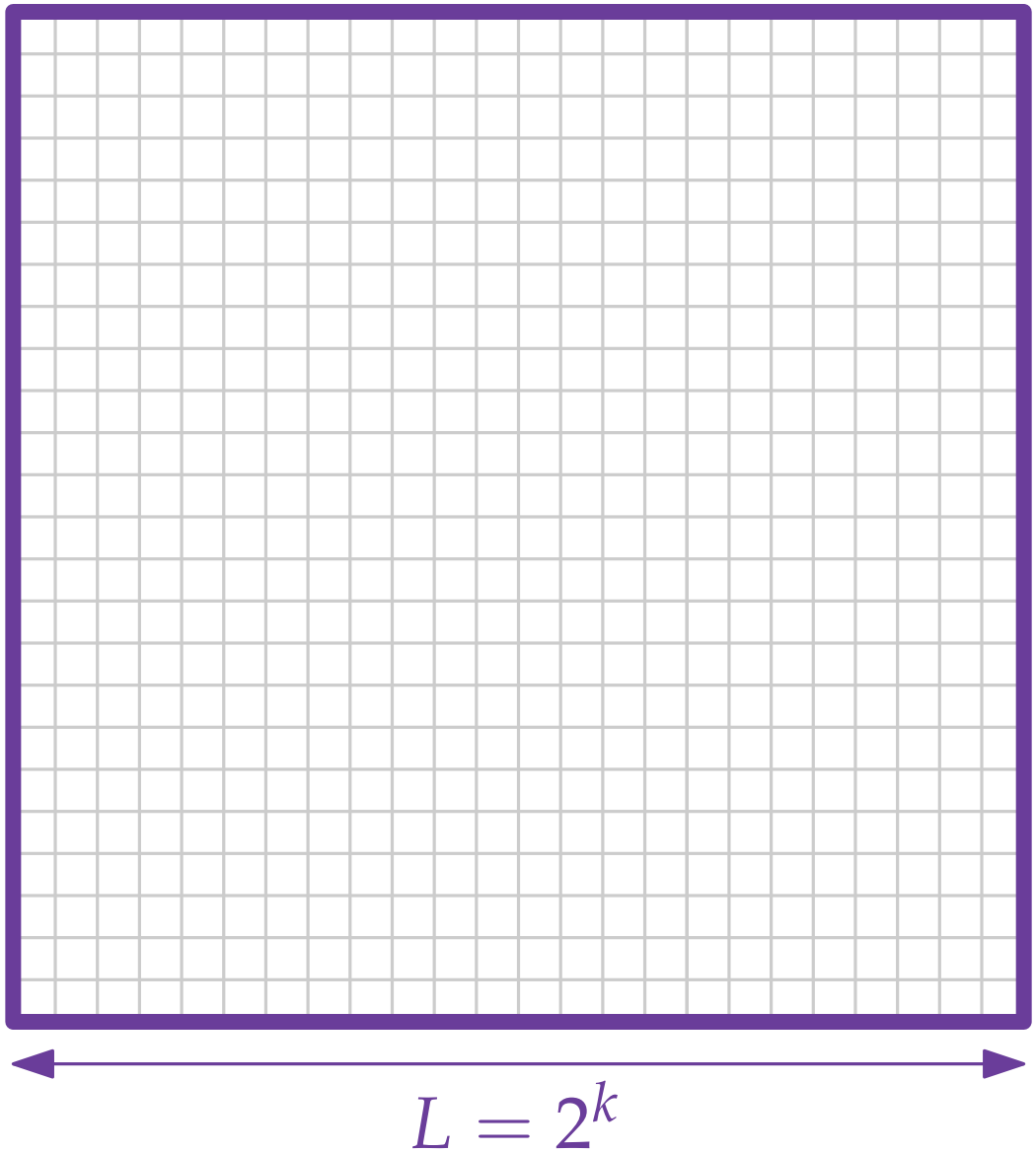
(„Rechtfertigung“ ÜA)

Ziel: $(1+\varepsilon)$-Approximation!

Basiszerlegung

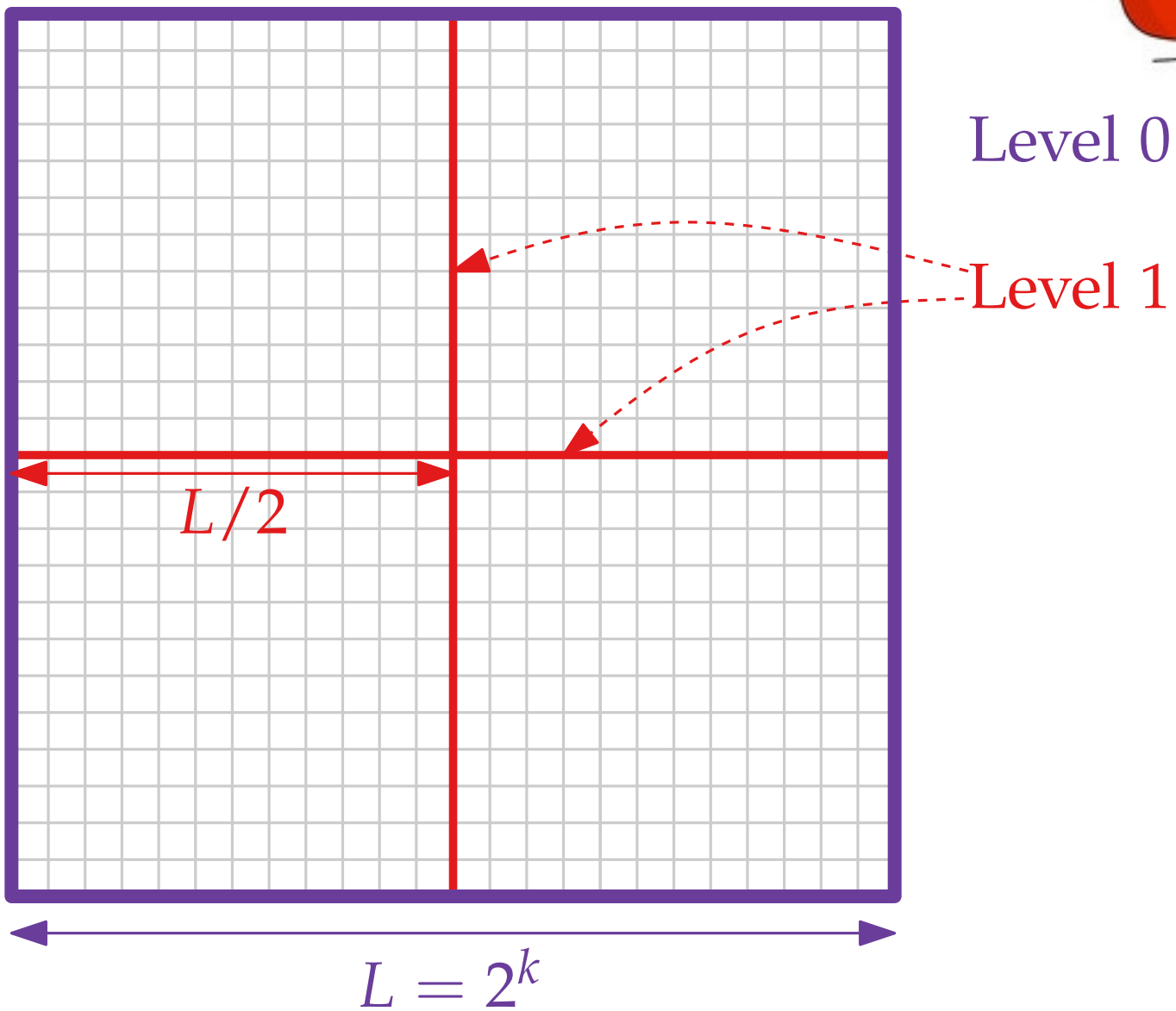


Basiszerlegung



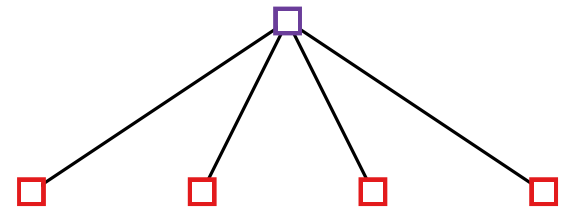
Level 0

Basiszerlegung

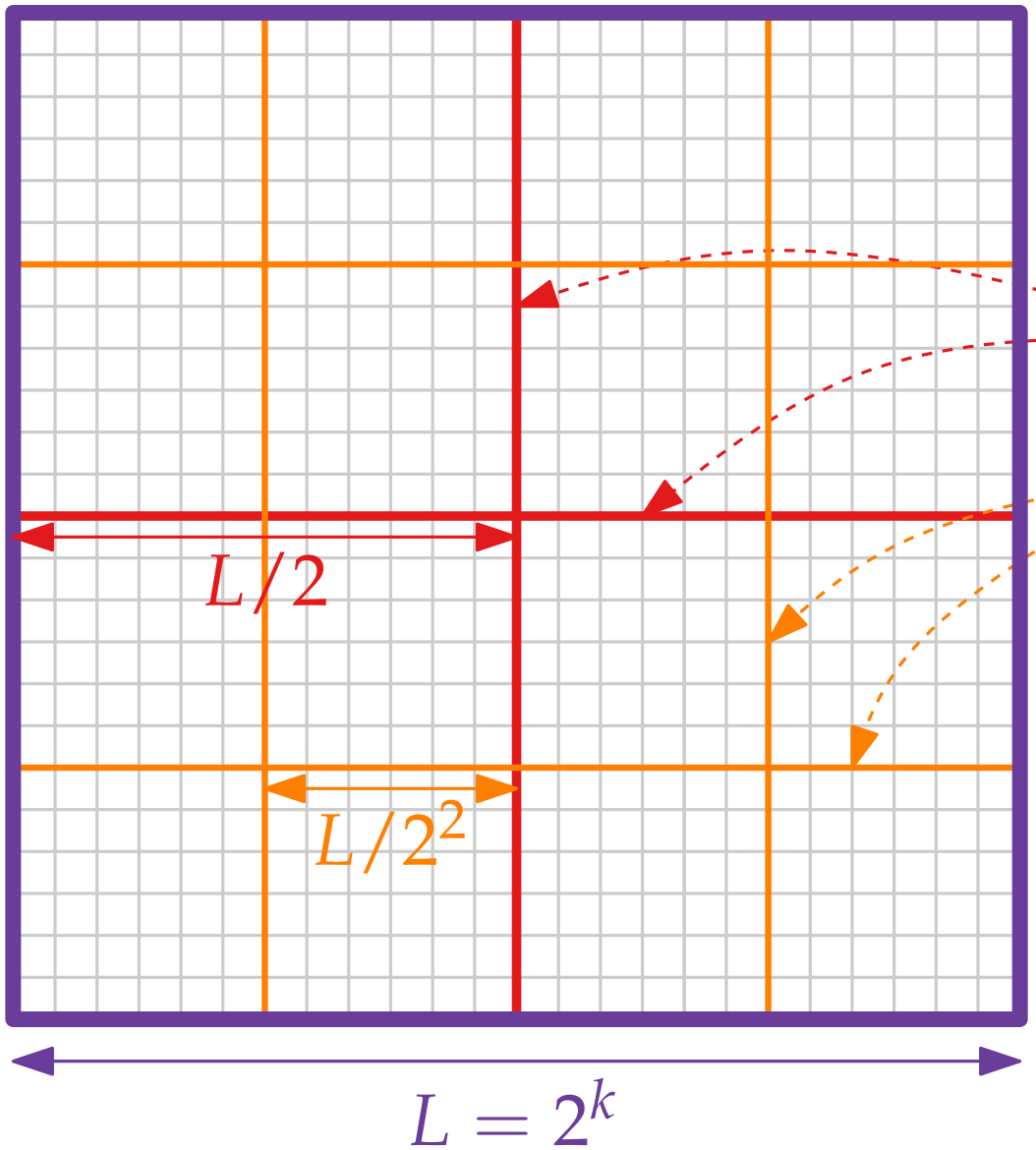


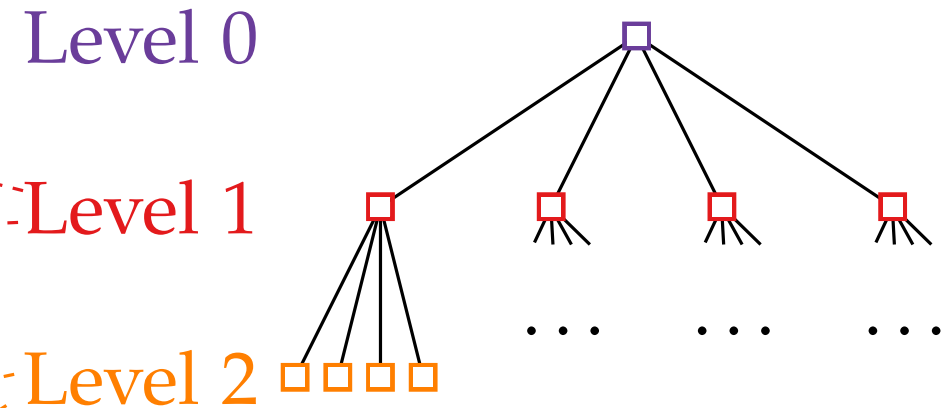
Level 0

Level 1

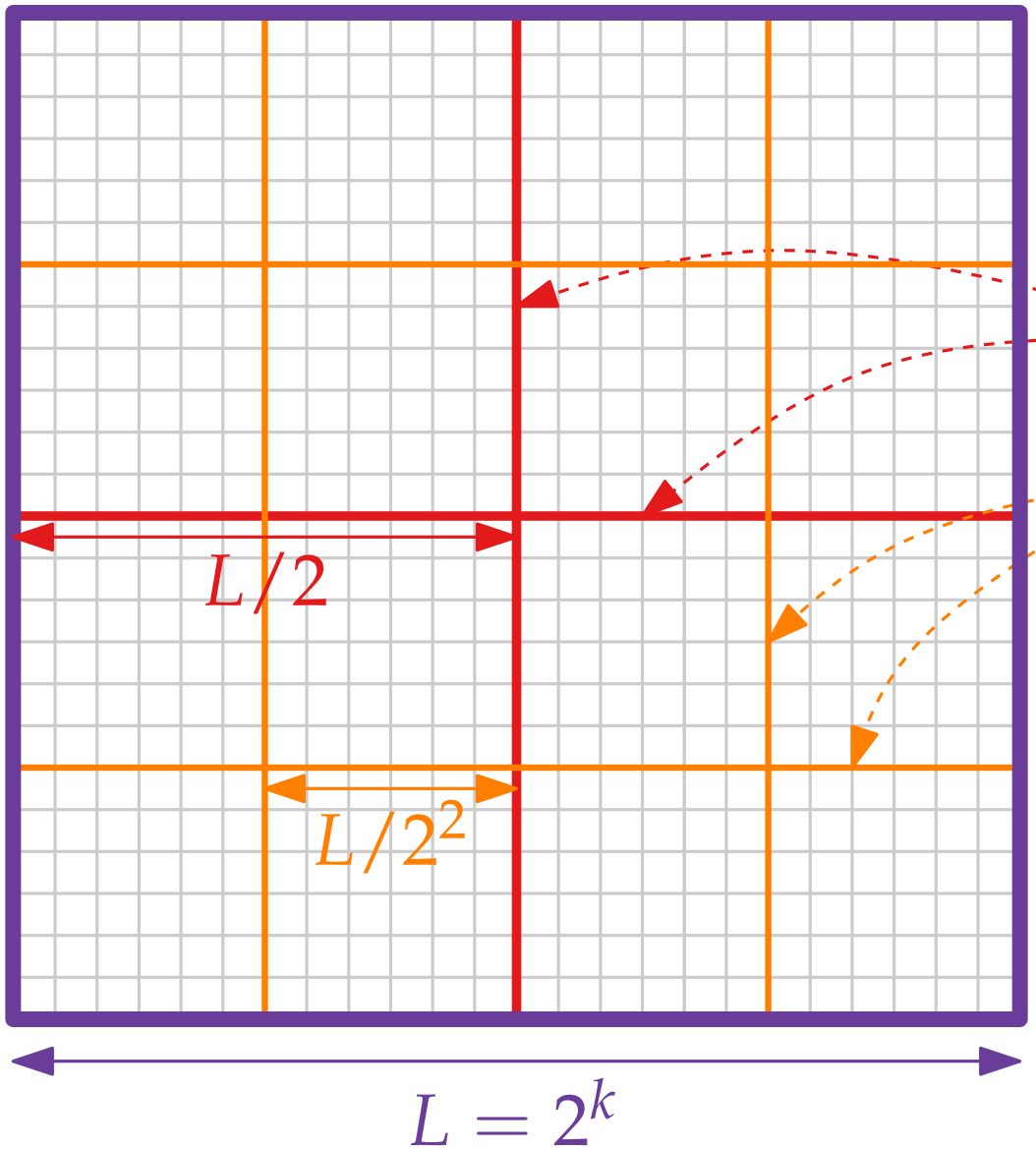


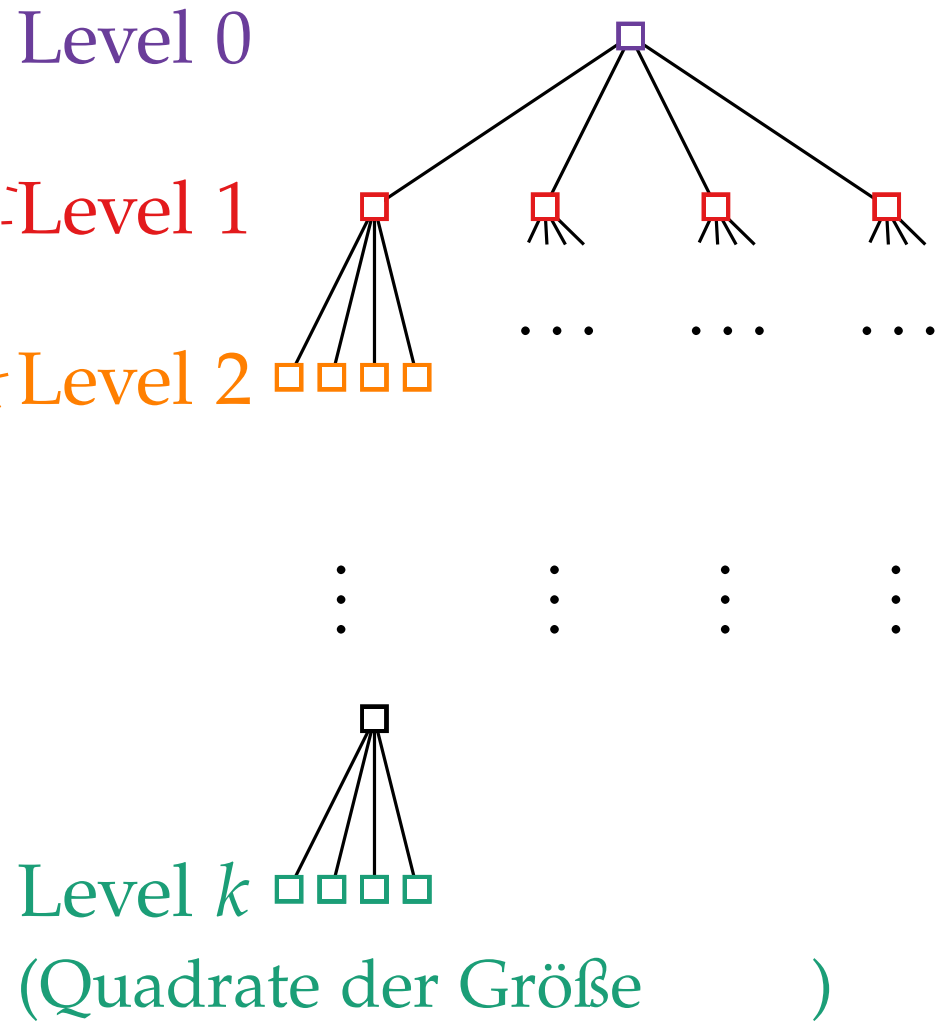
Basiszerlegung



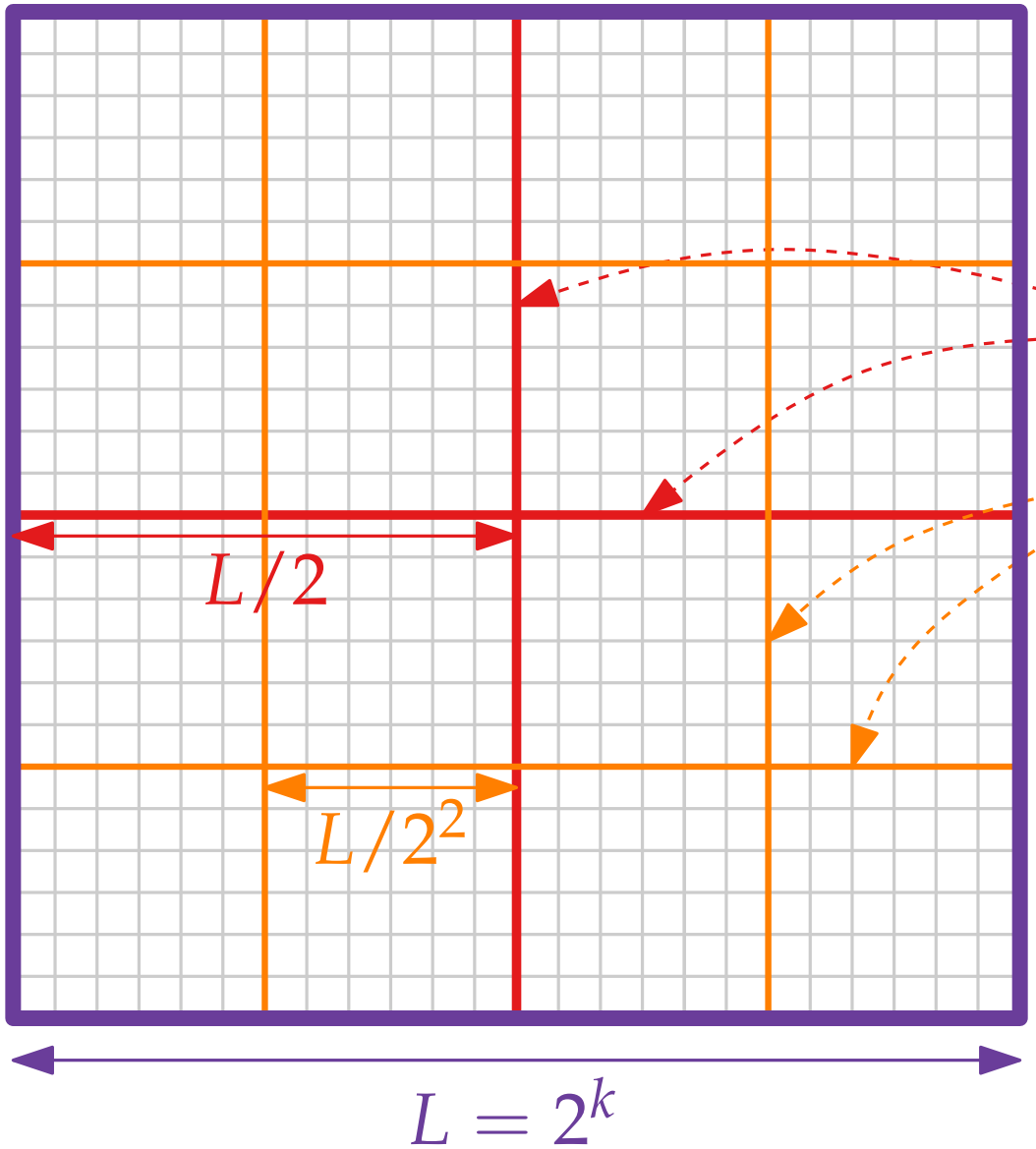


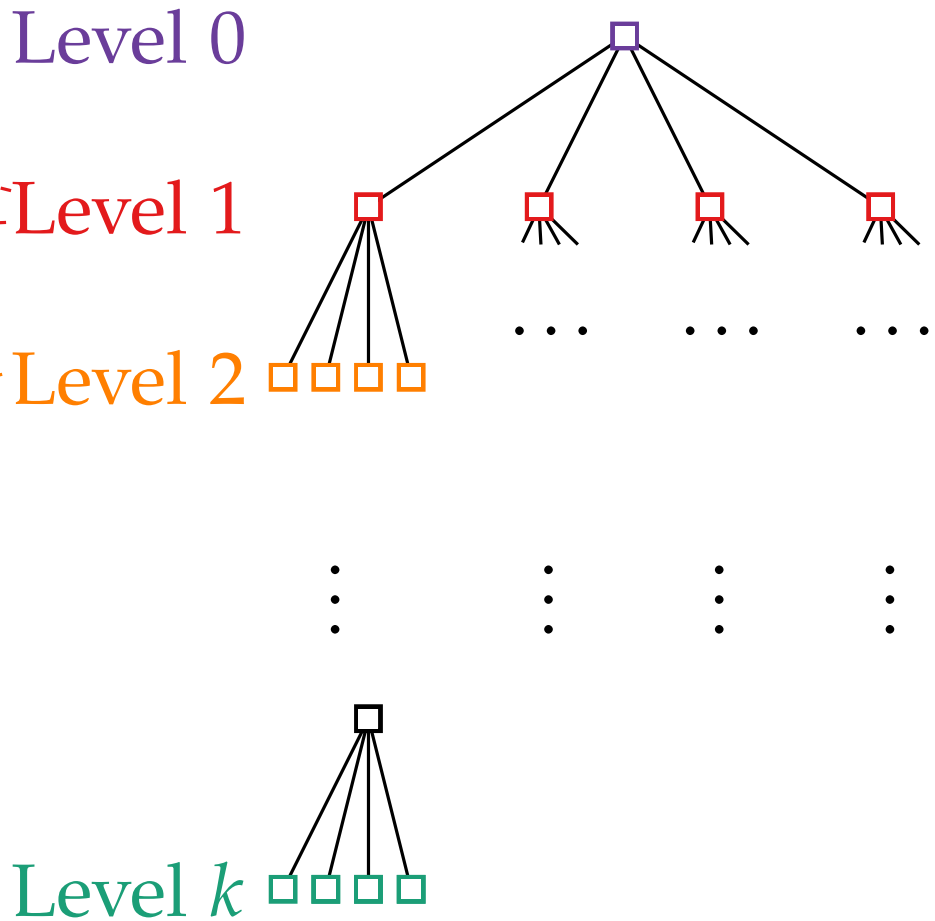
Basiszerlegung



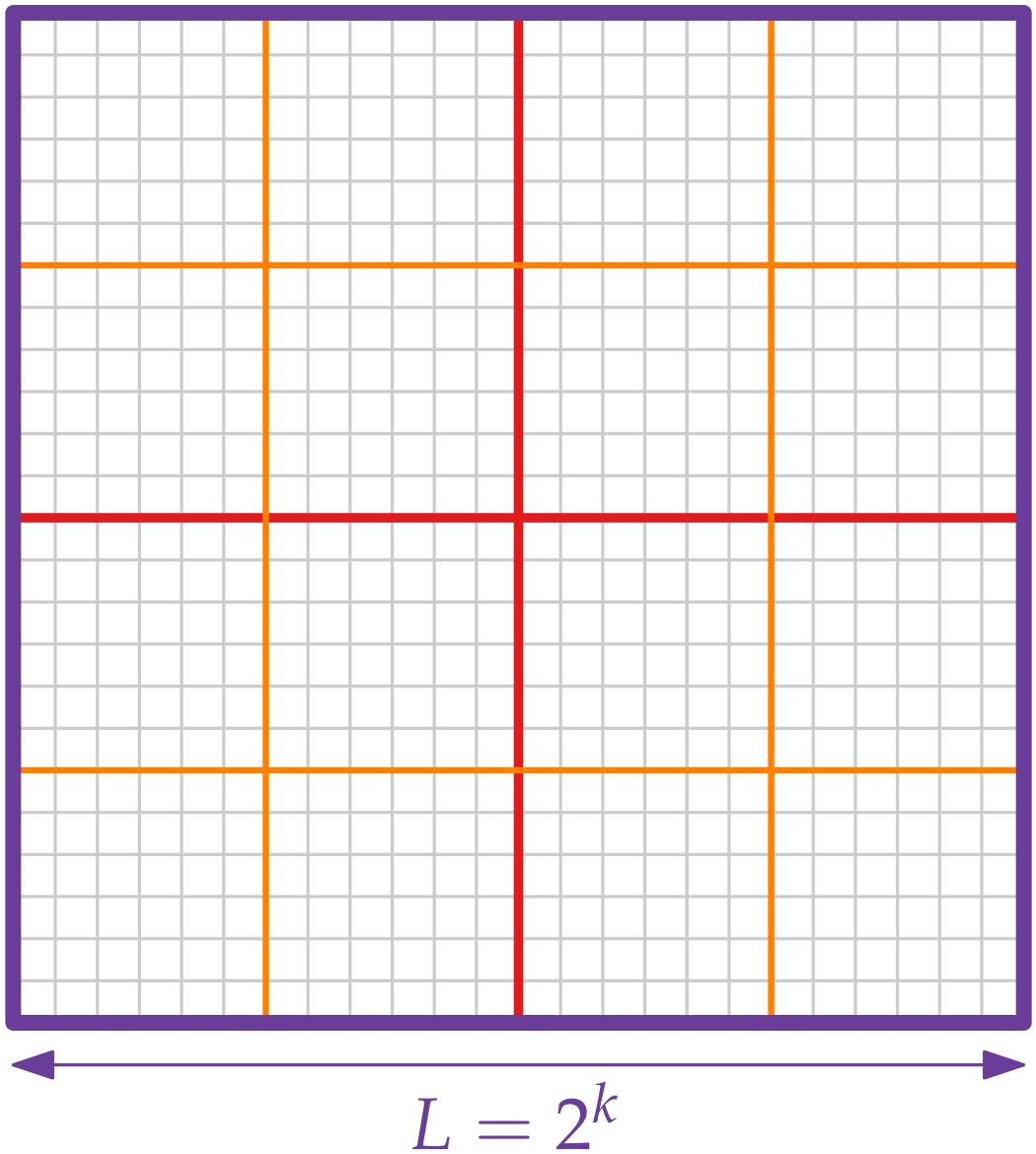


Basiszerlegung





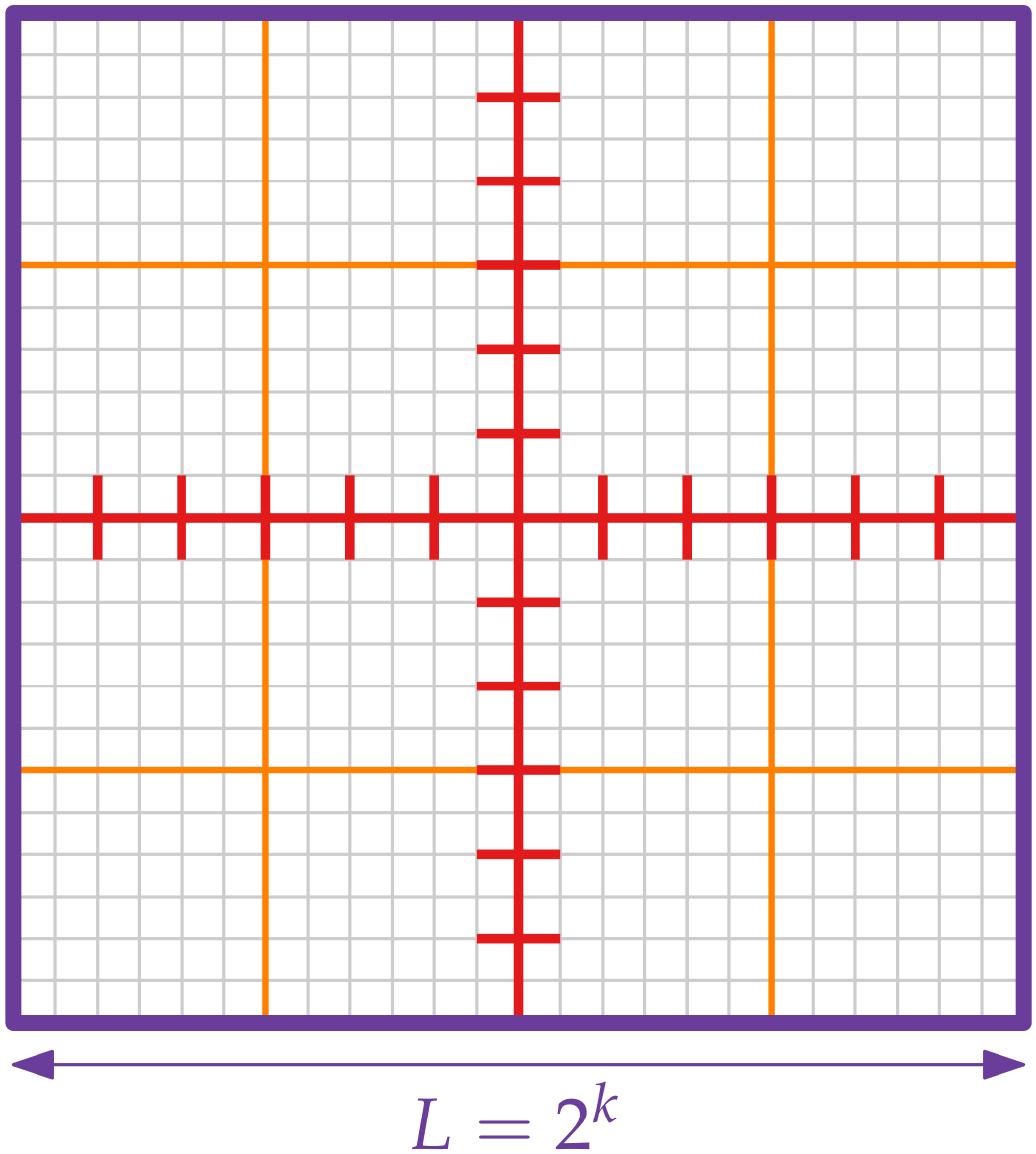
Portale



- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

Portale

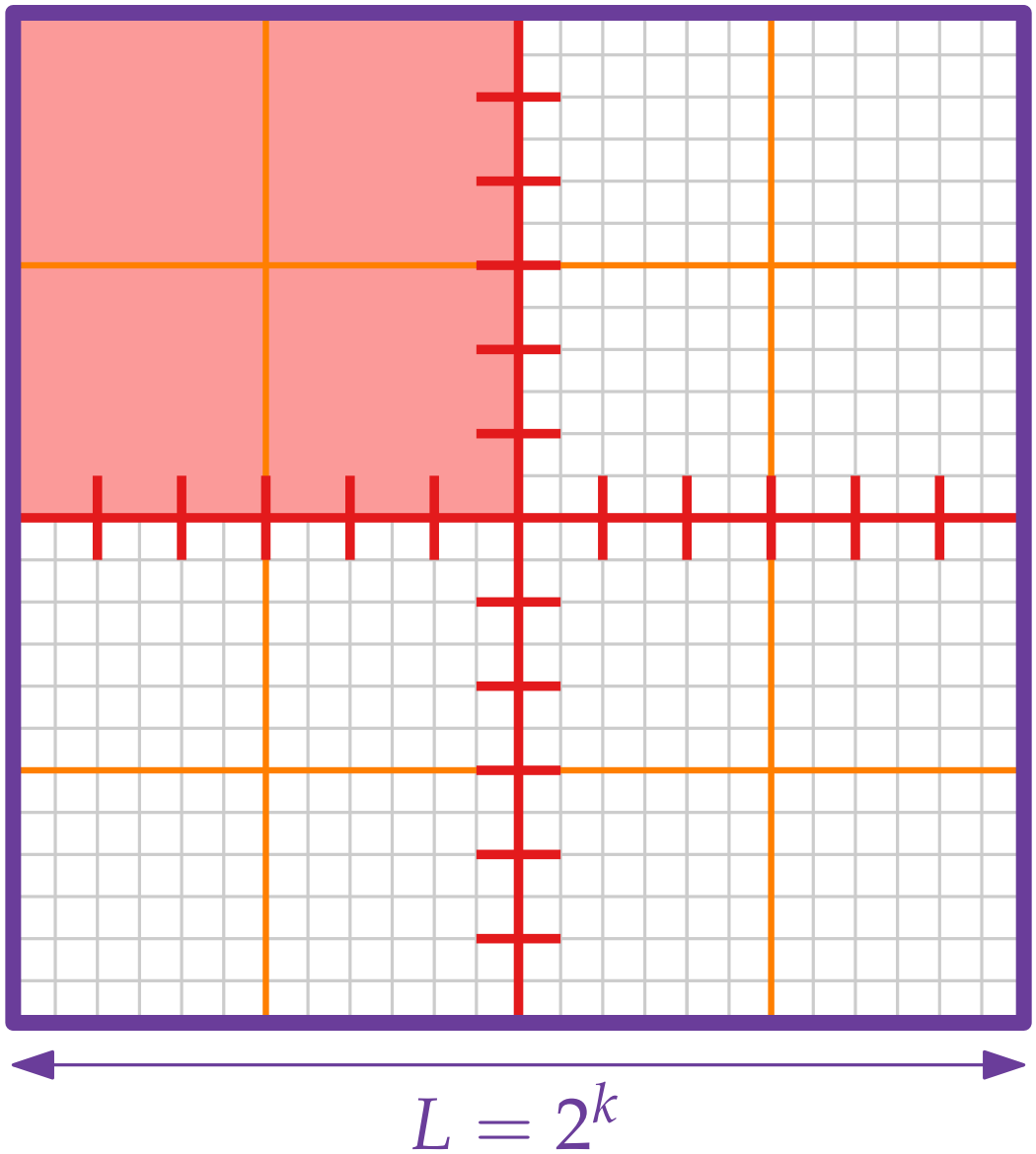


- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

Portale



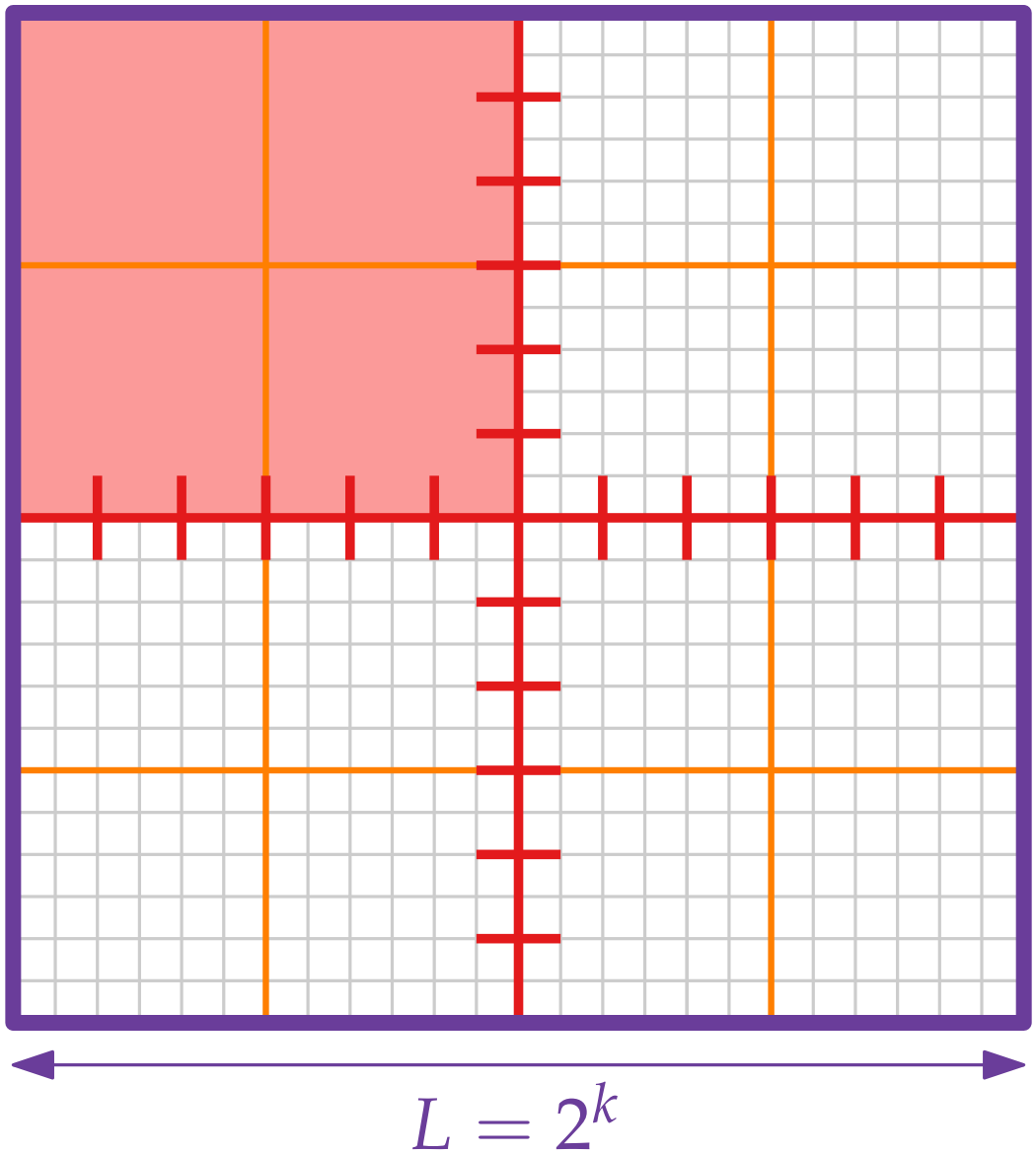
- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

- Level-i-Quadrat: Größe

Portale



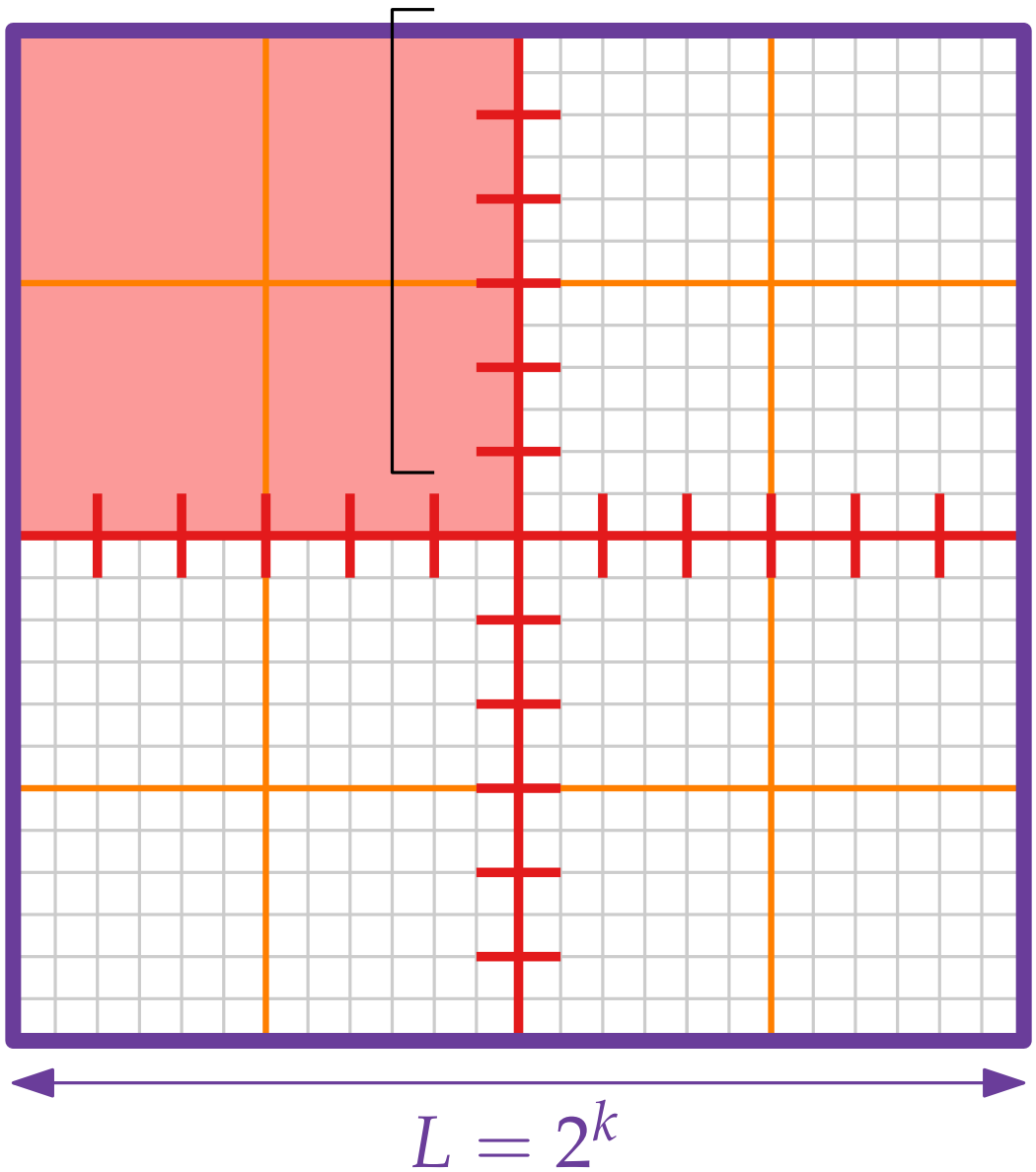
- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$

Portale



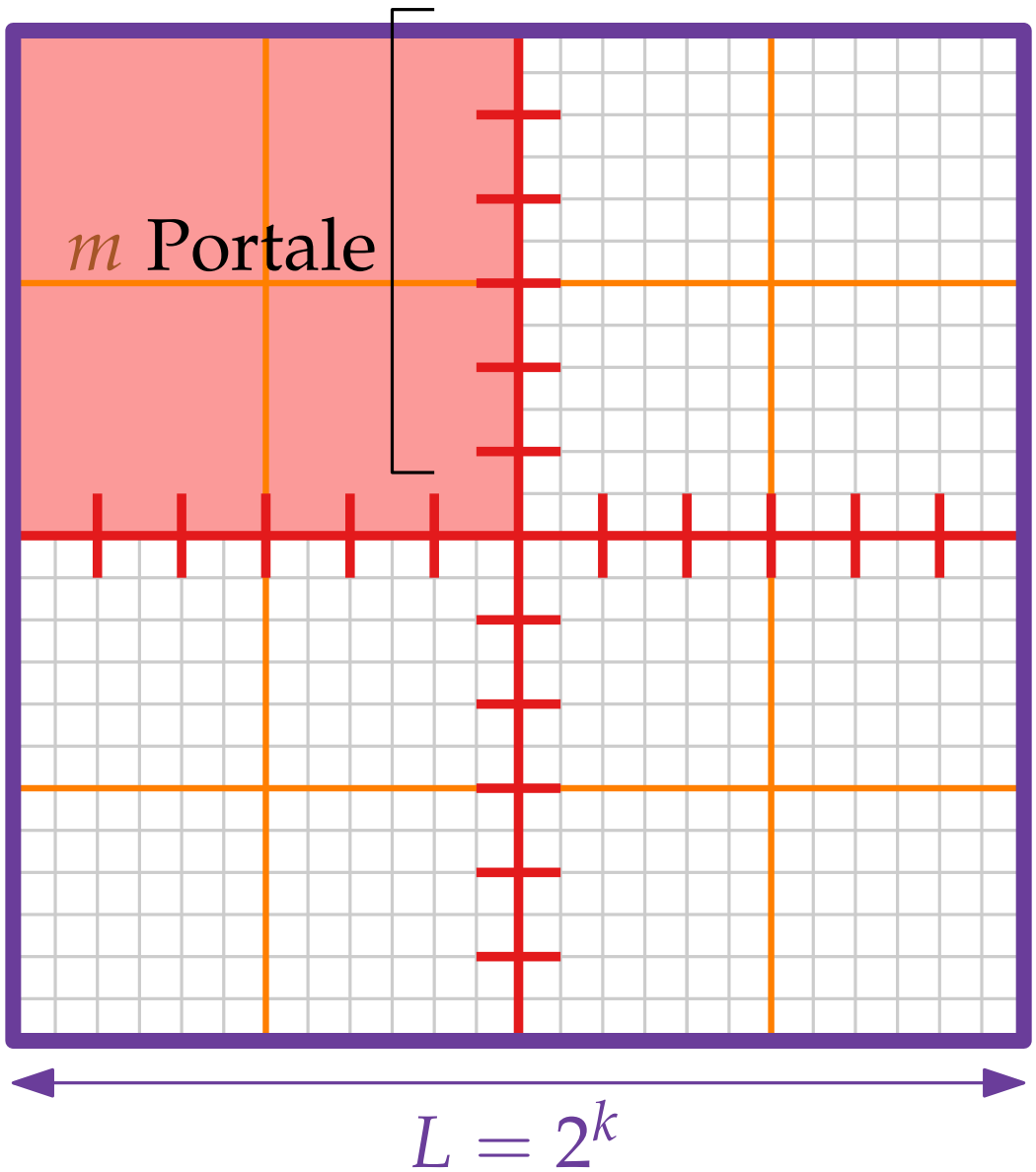
- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$

Portale



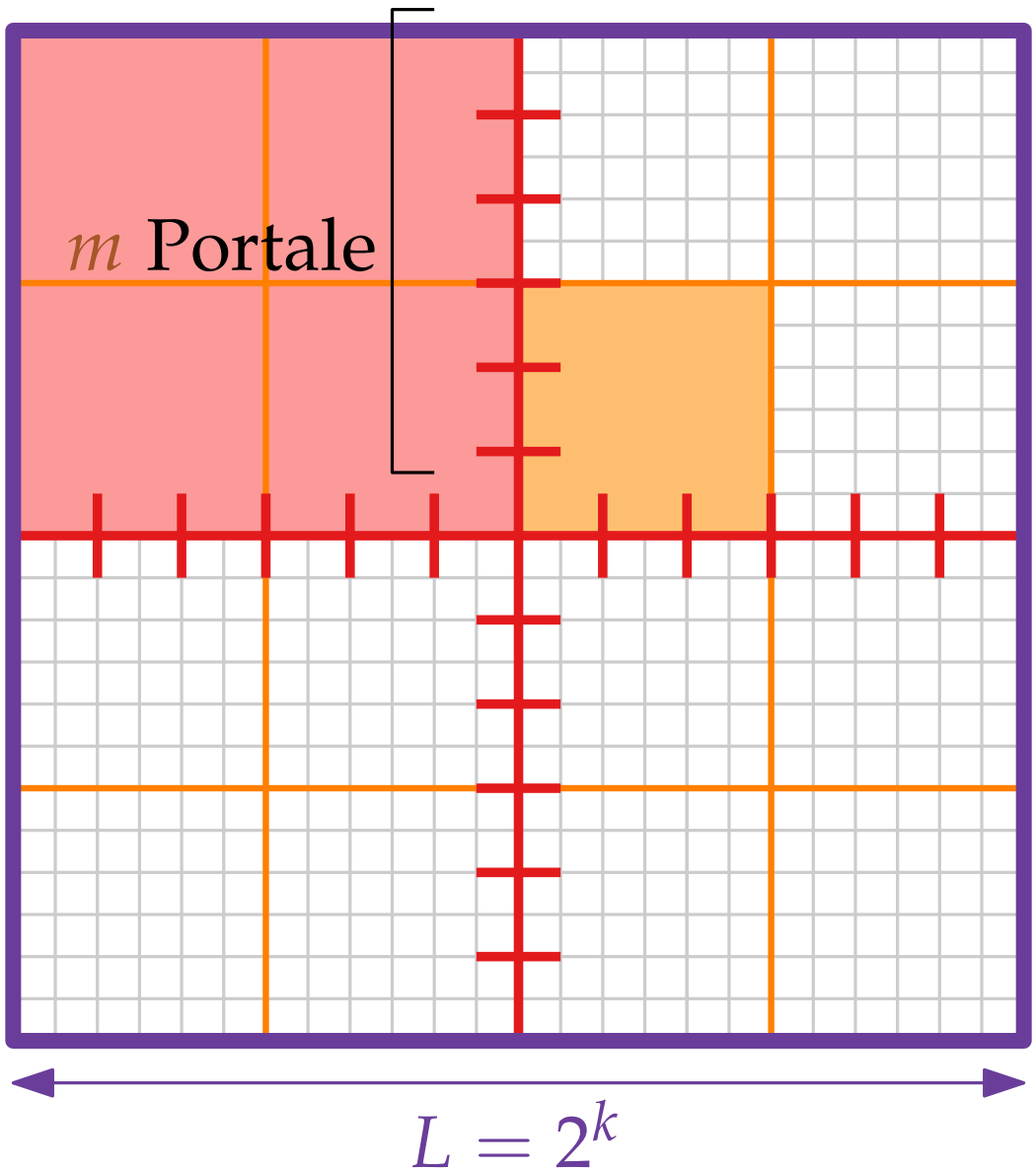
- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$

Portale



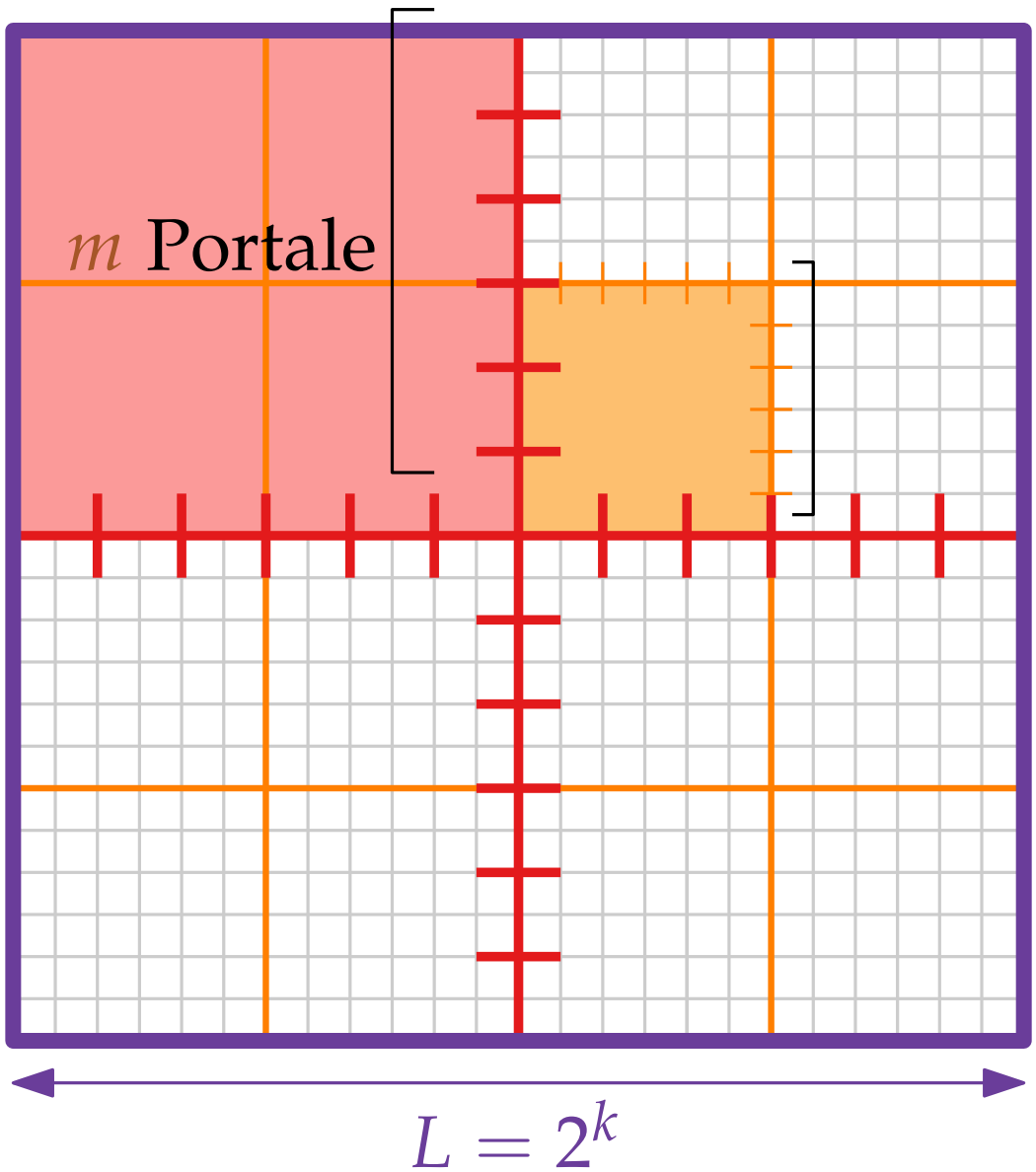
- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$

Portale



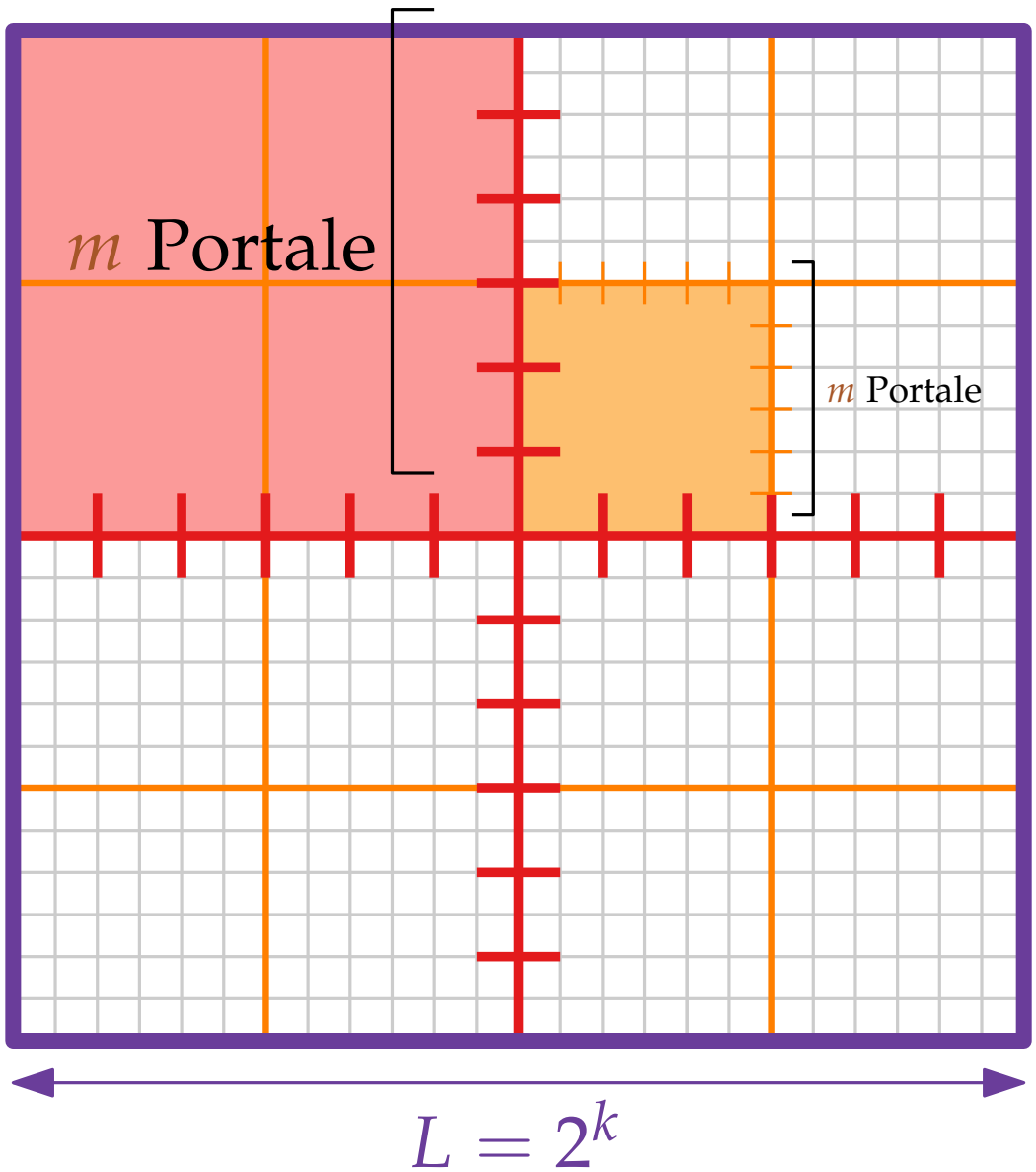
- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$

Portale



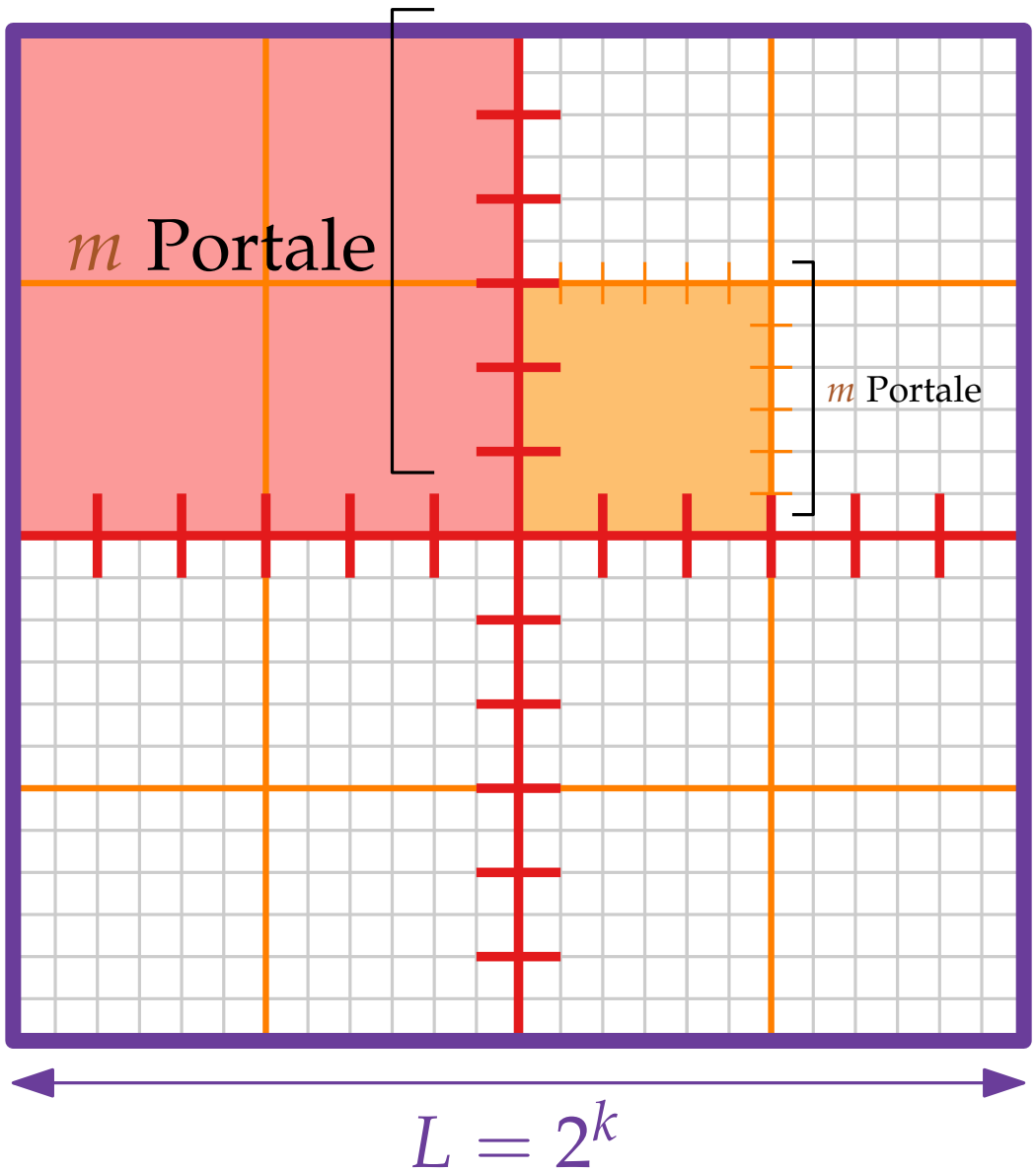
- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

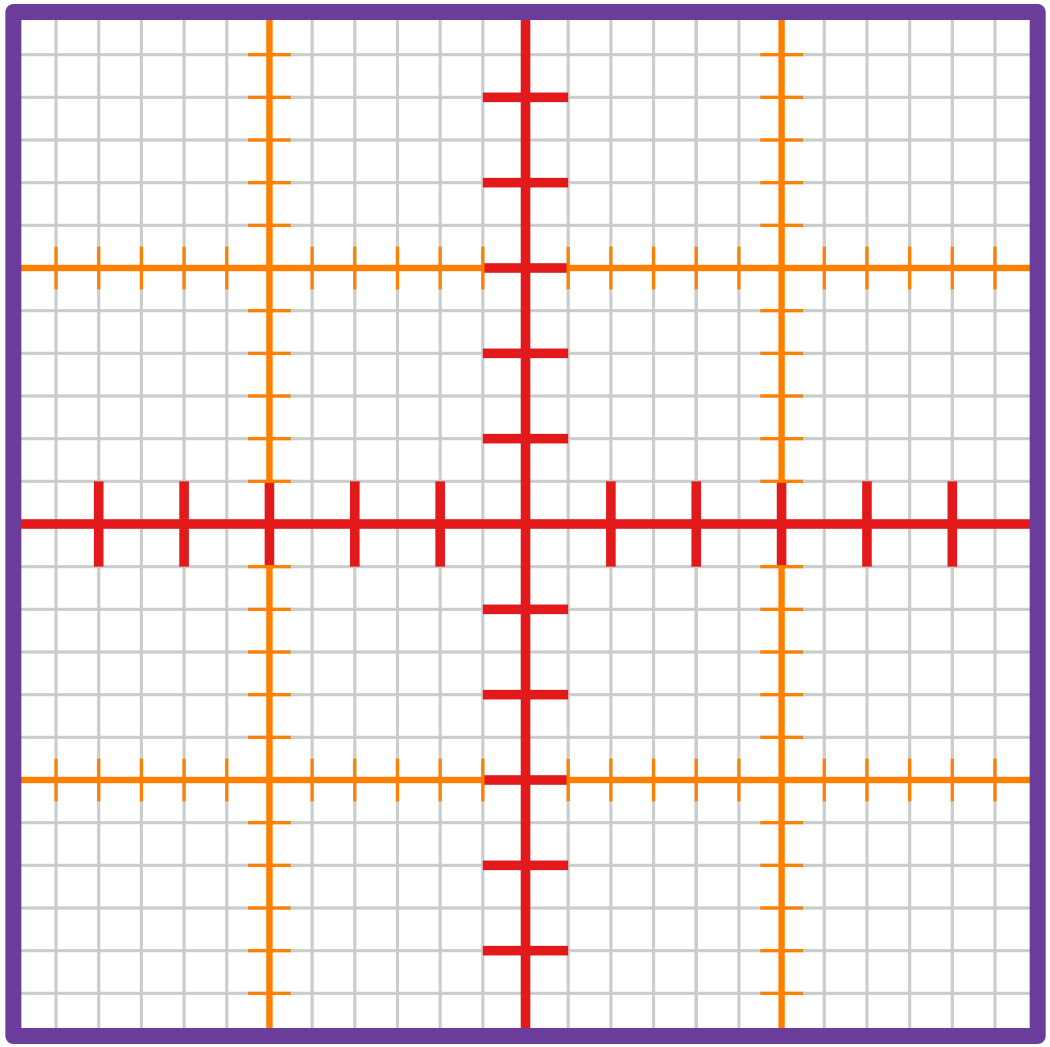
- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$

Portale

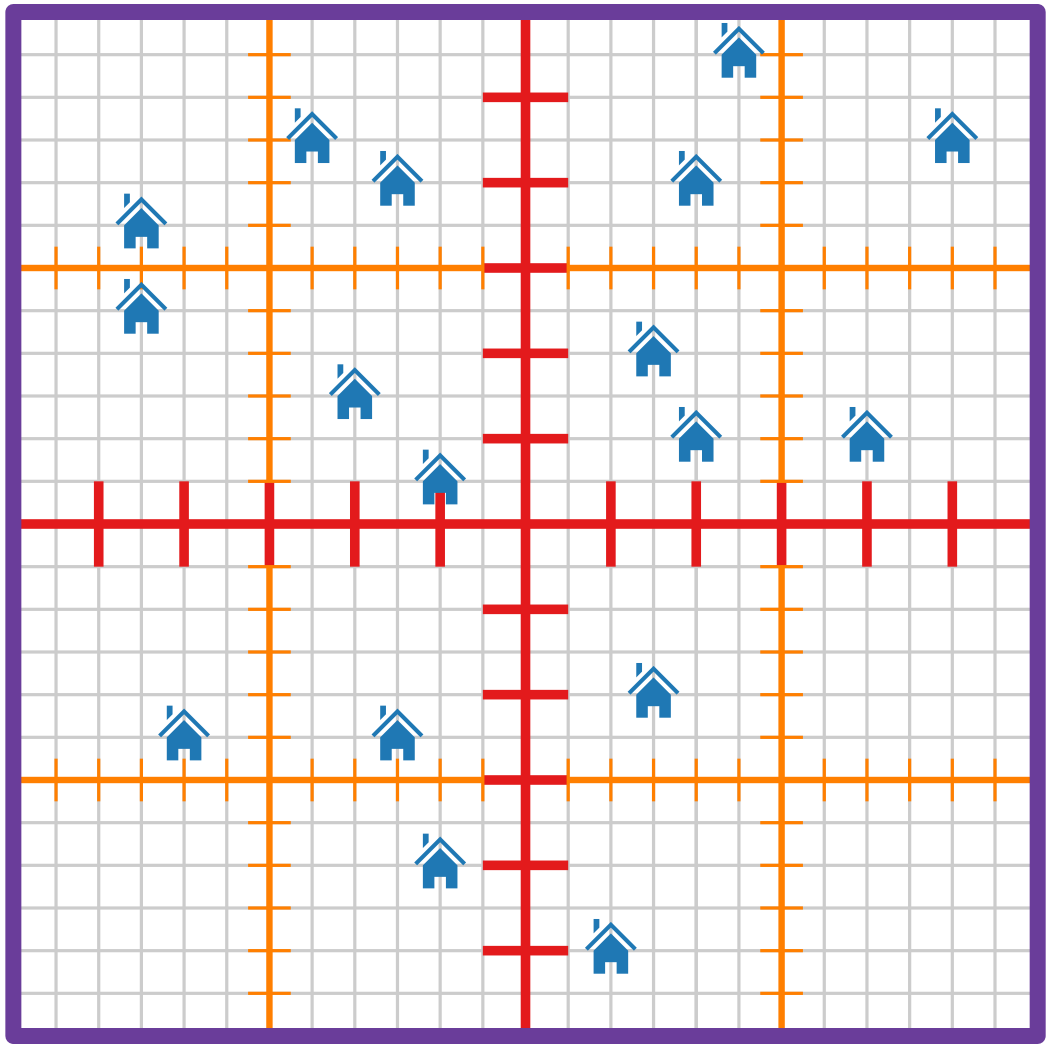


- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$
  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$
- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$
- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$
- Level-i-Quadrat hat höchstens $4m$ Portale auf seinem Rand.

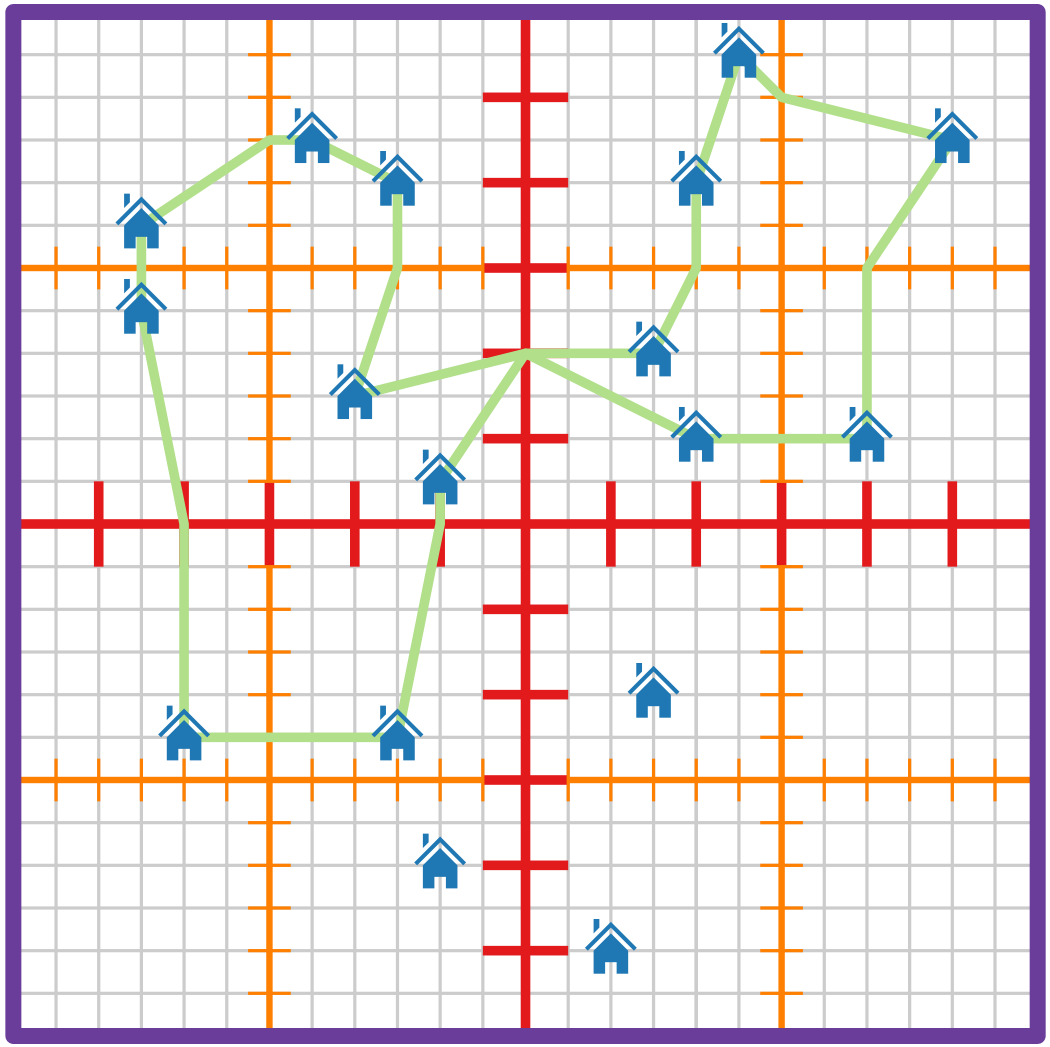
Weihnachtliche Touren



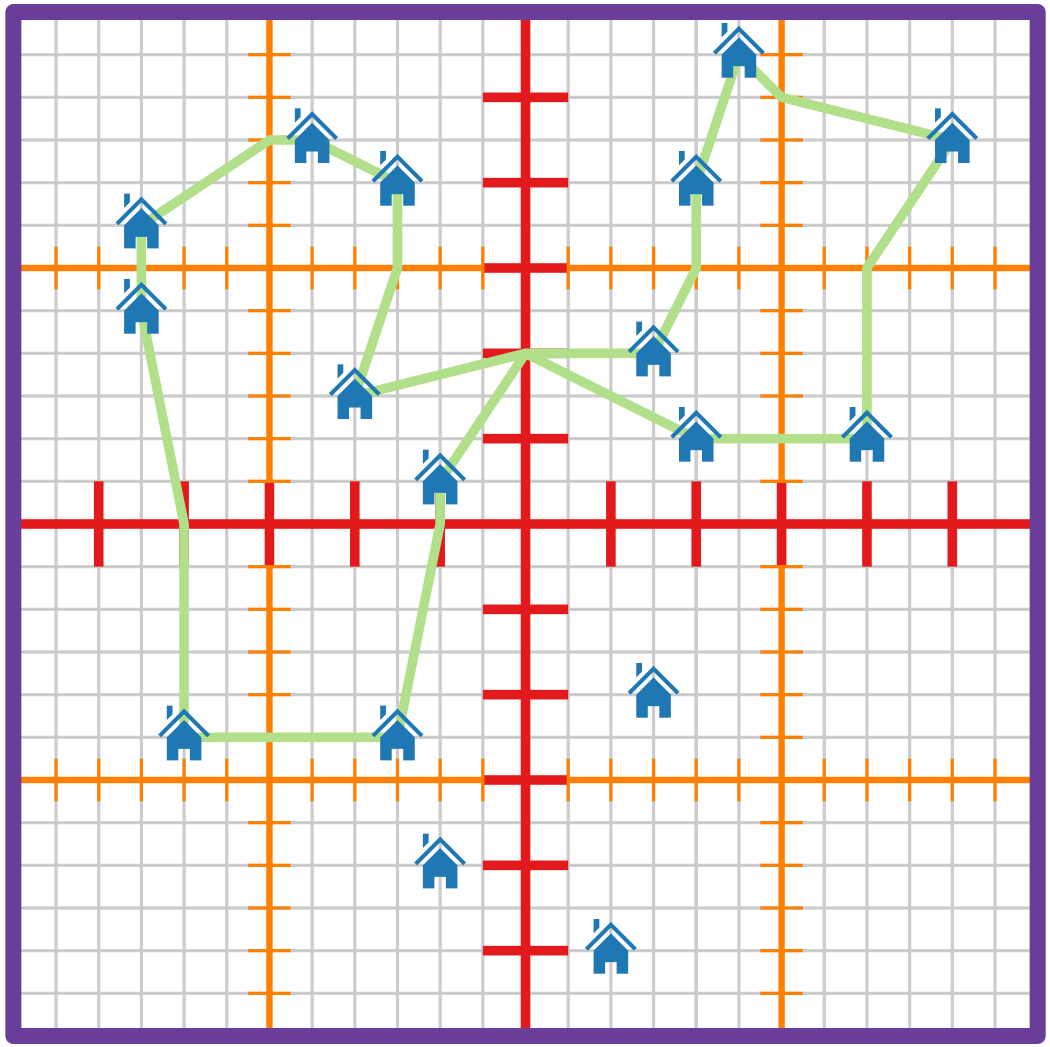
Weihnachtliche Touren



Weihnachtliche Touren

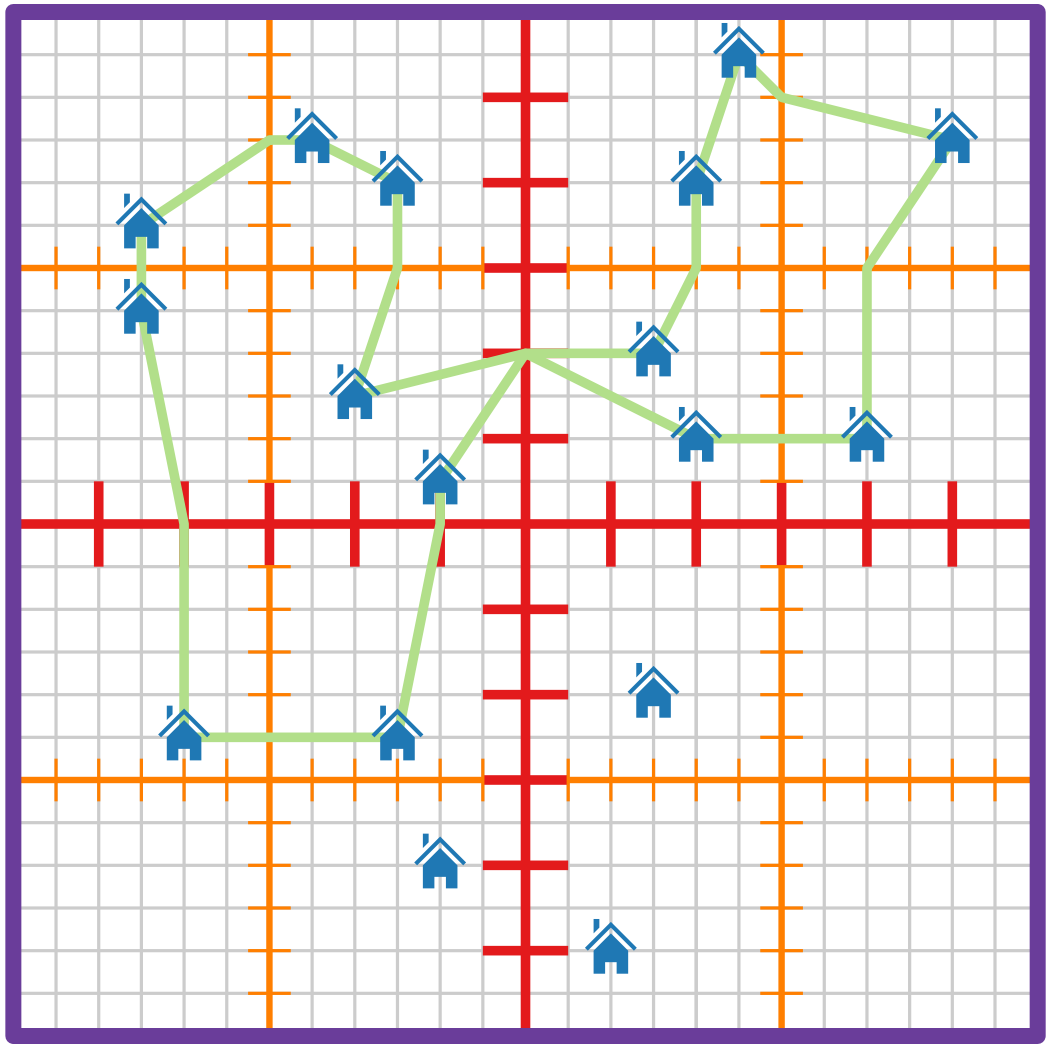


Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

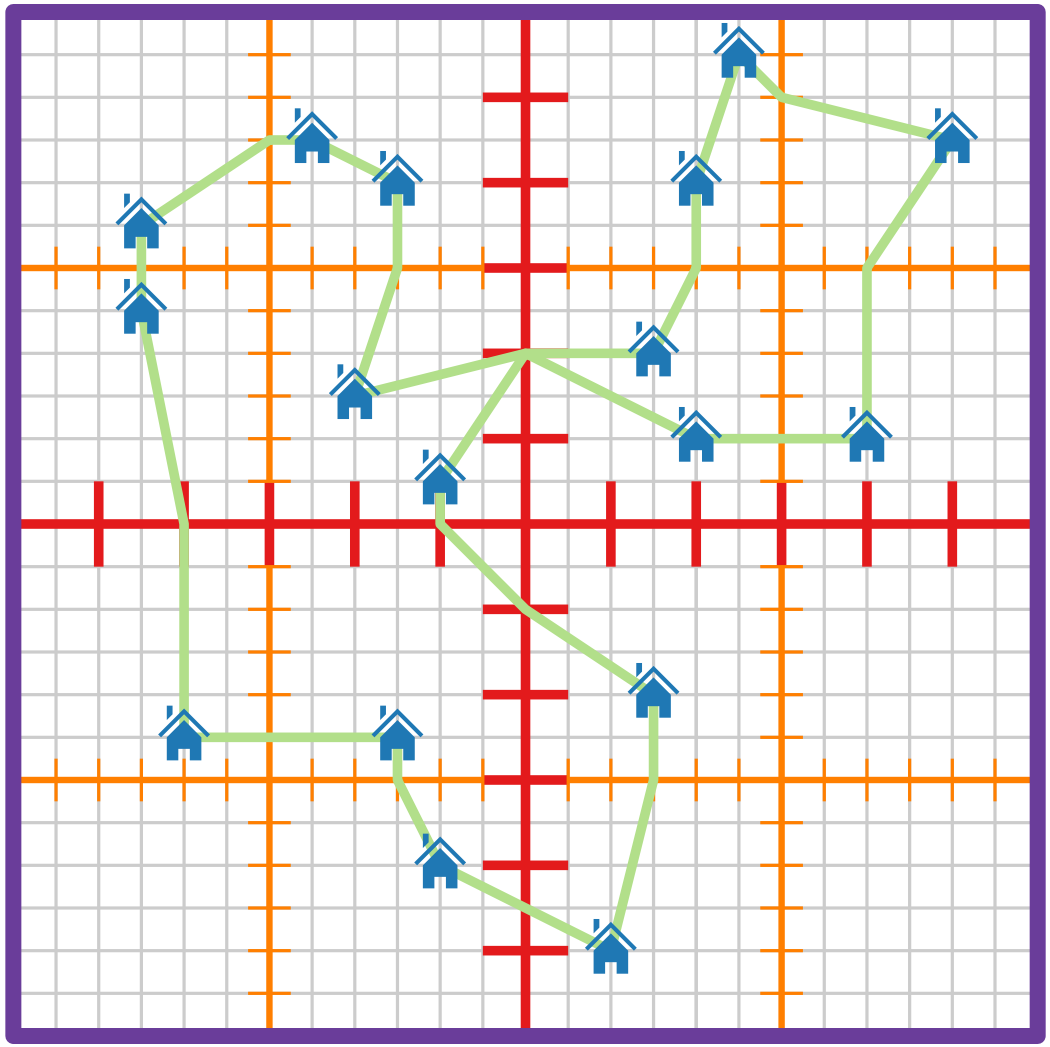
Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,

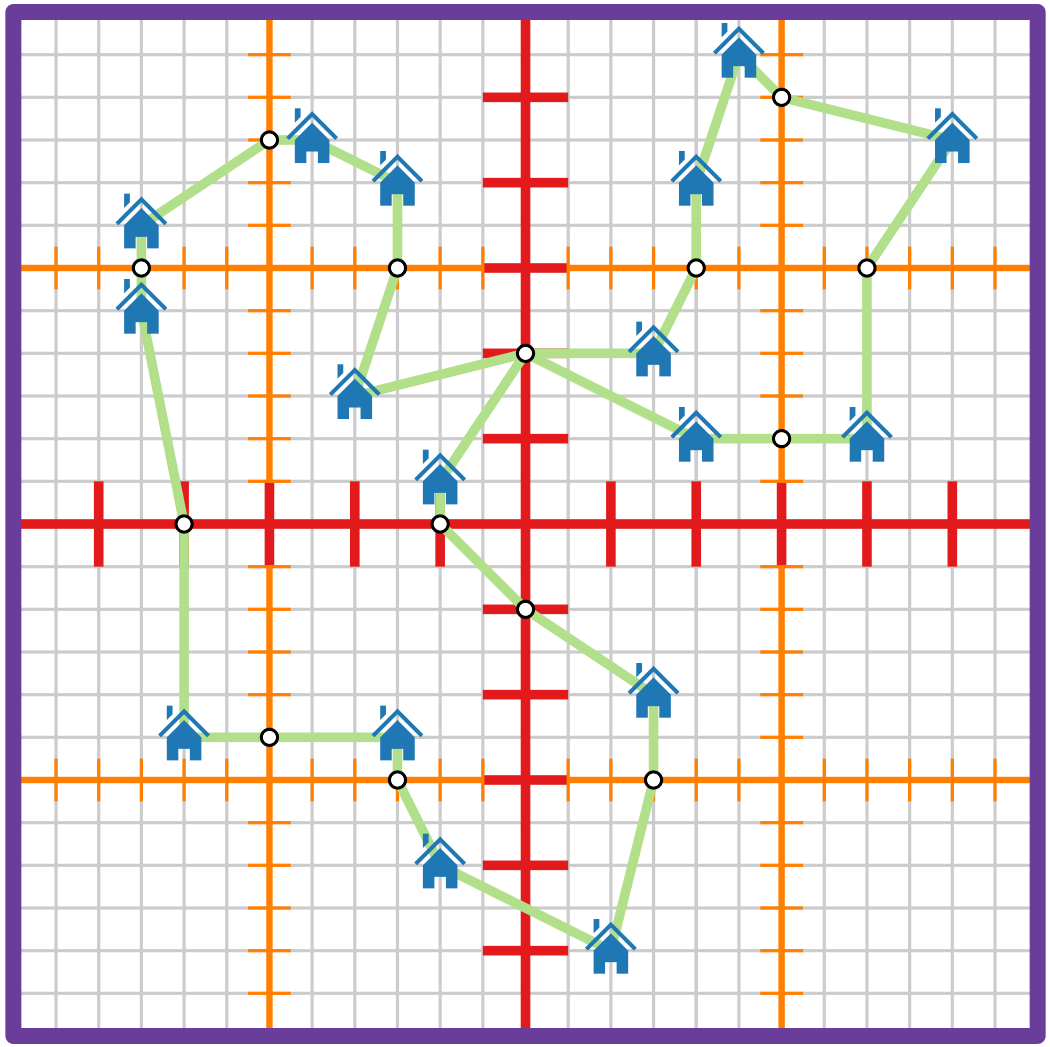
Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,

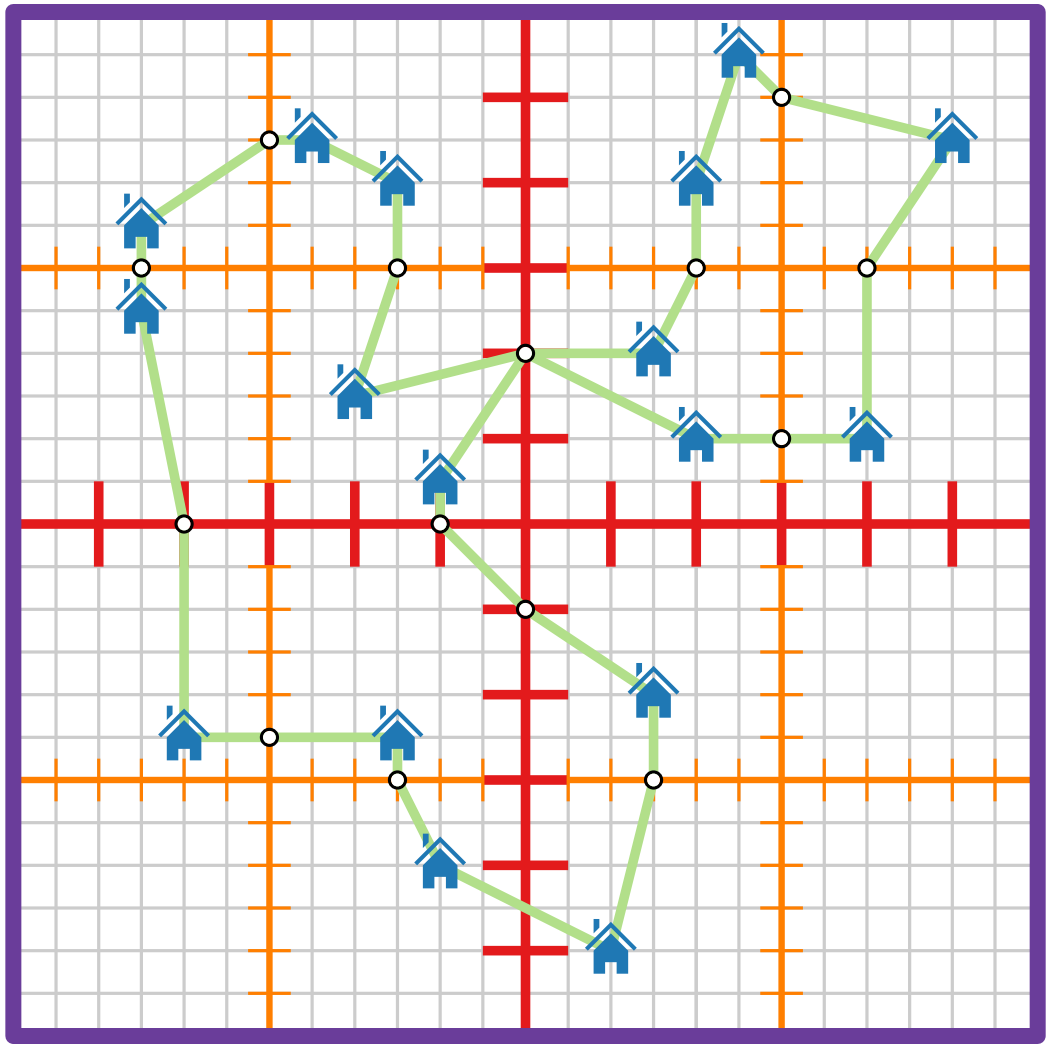
Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,

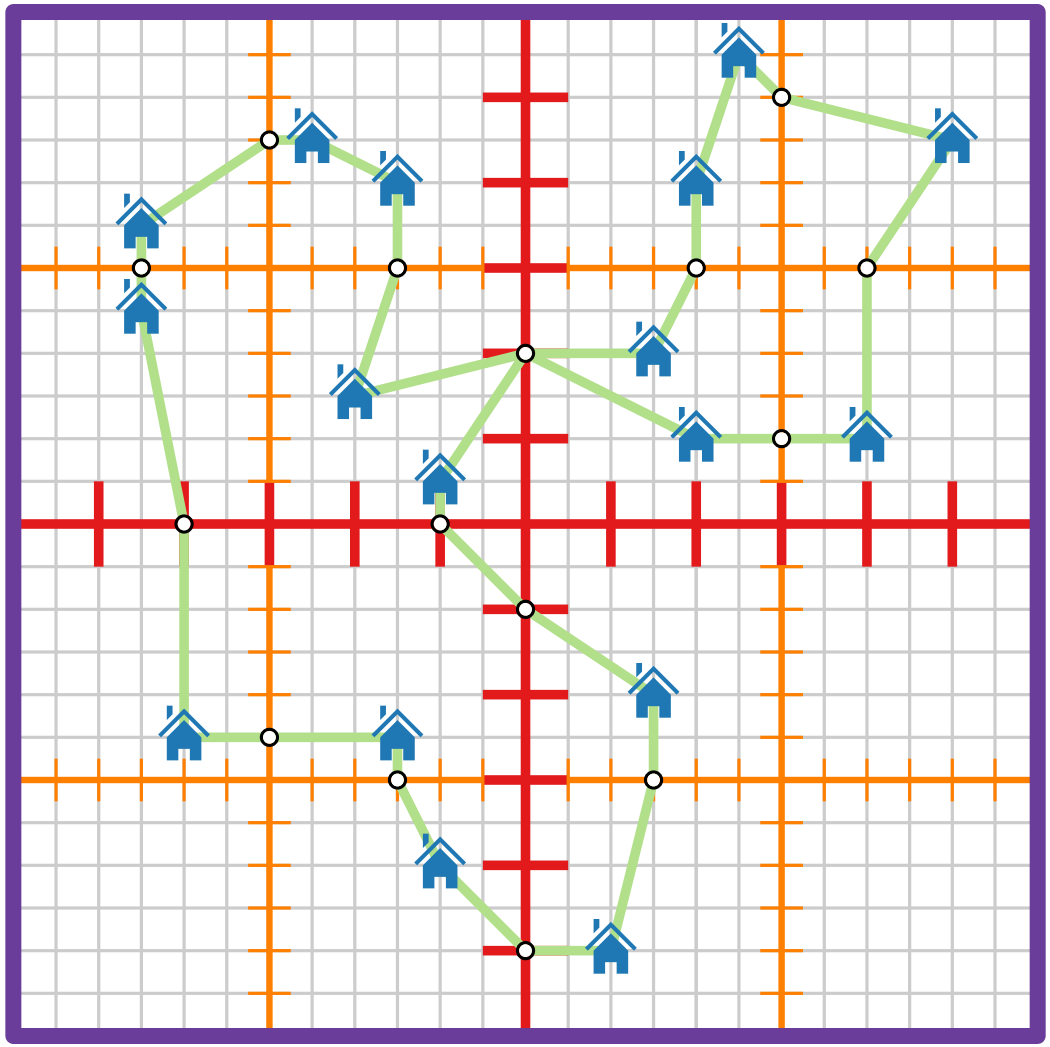
Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,

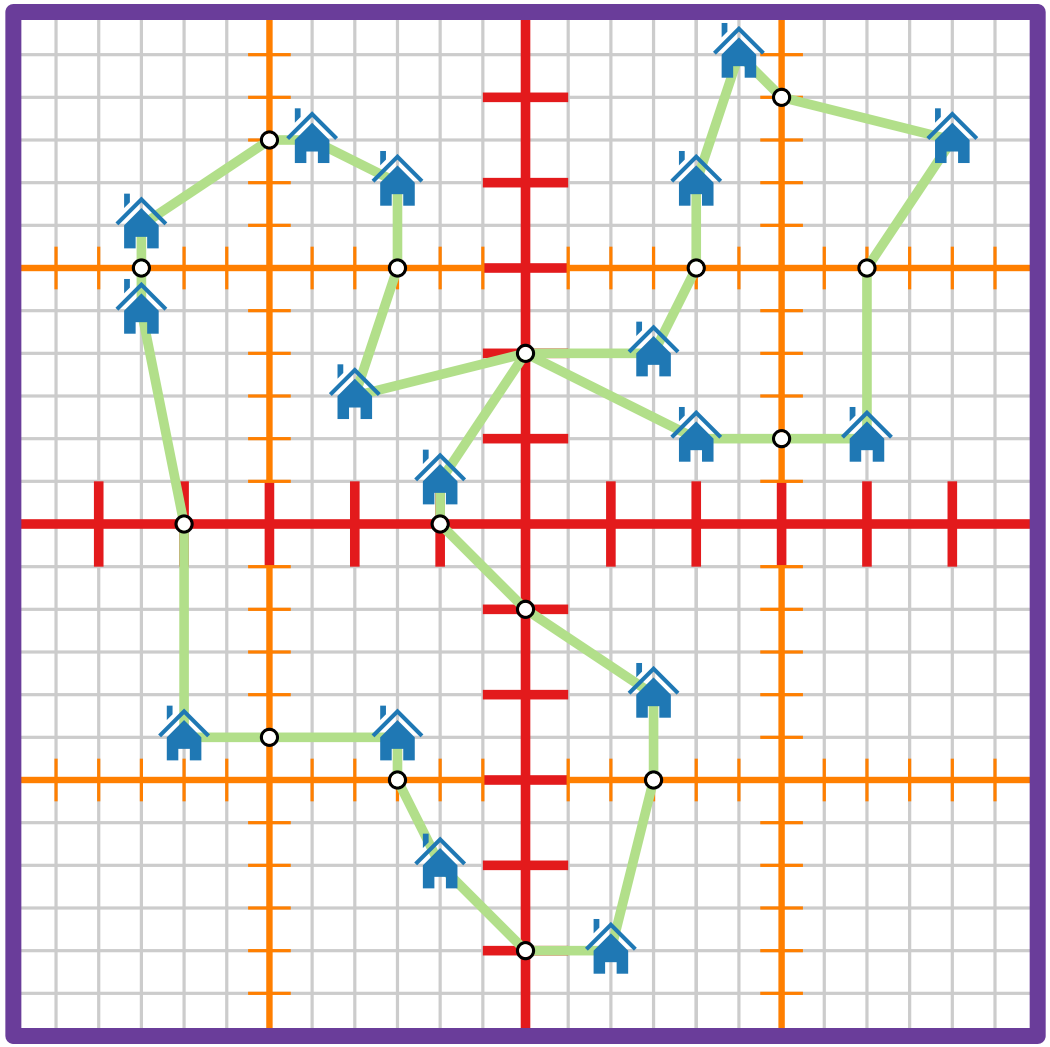
Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,

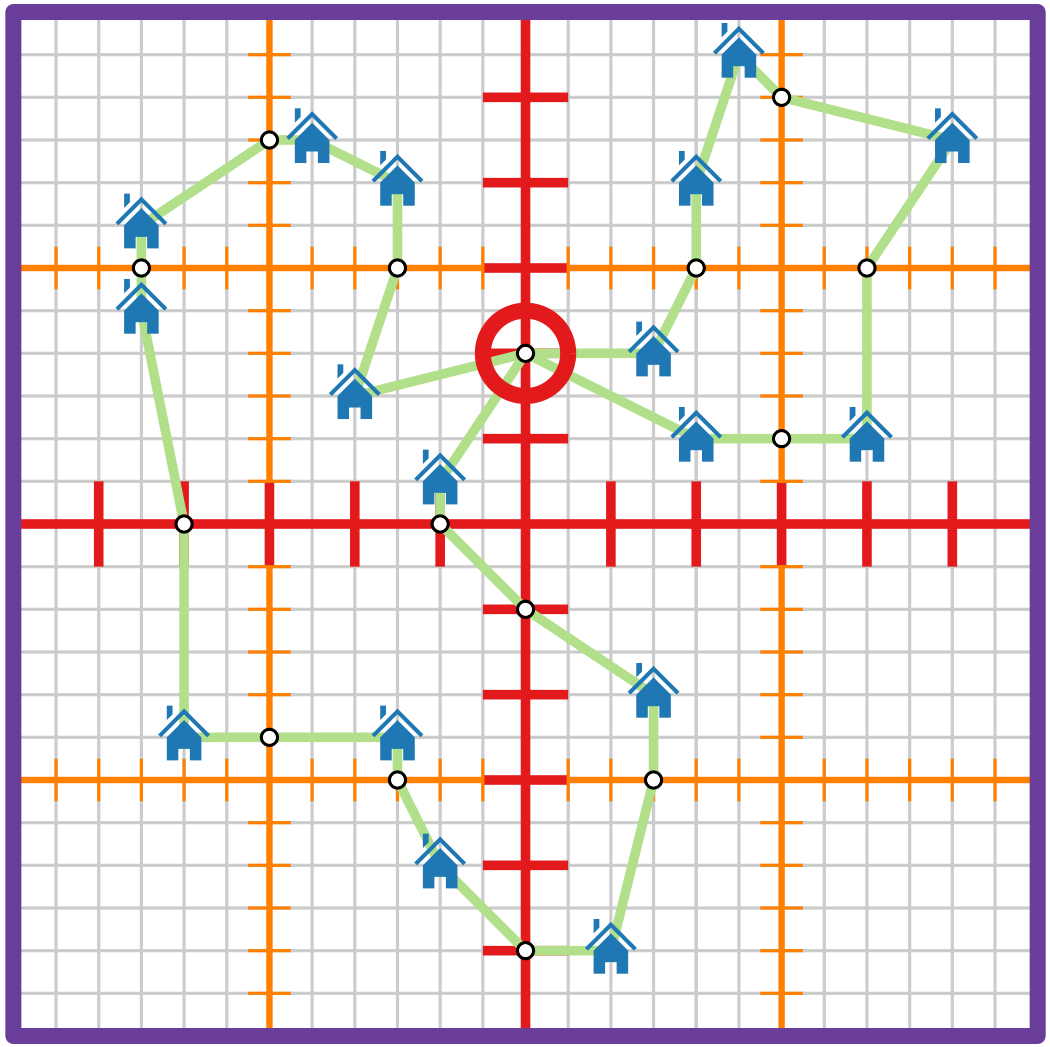
Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

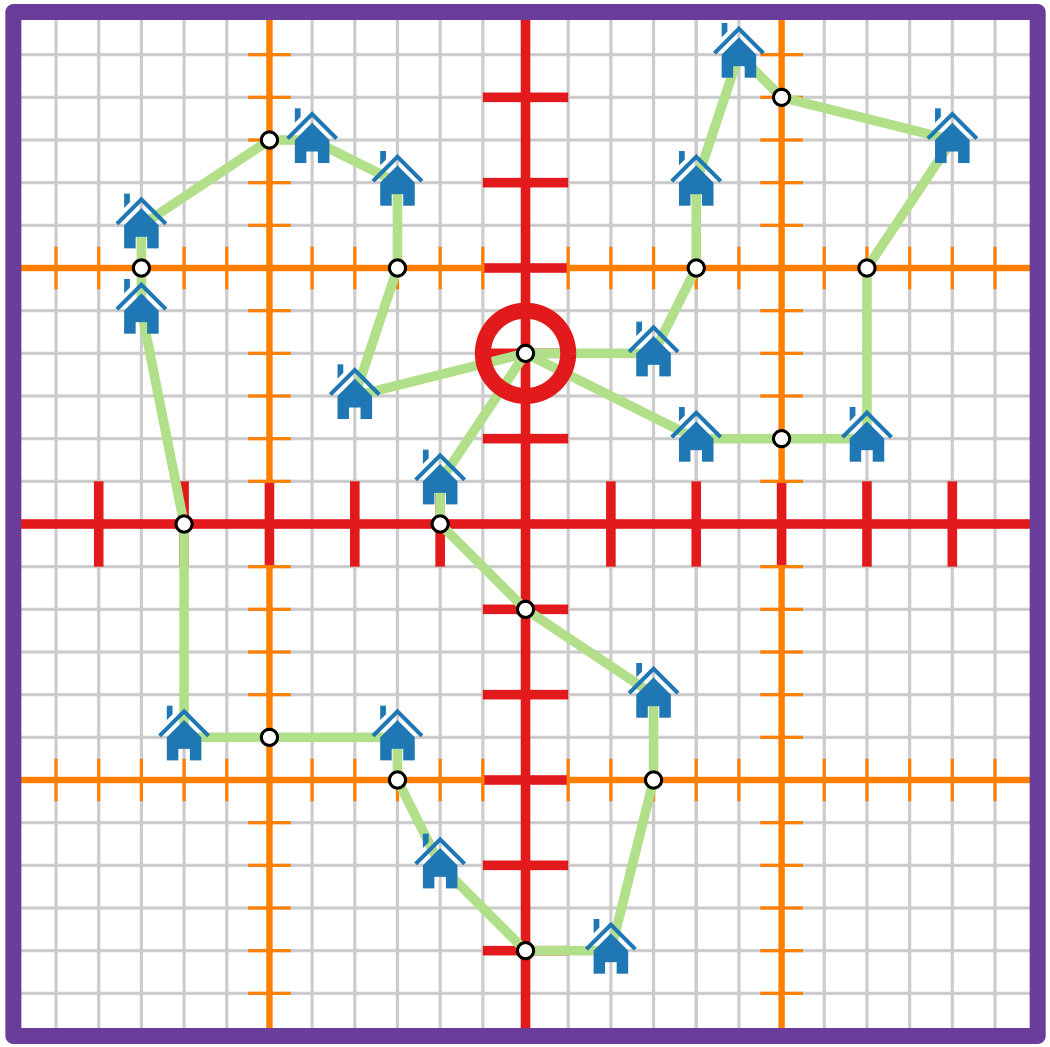
Weihnachtliche Touren



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

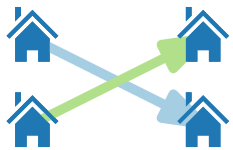
Weihnachtliche Touren



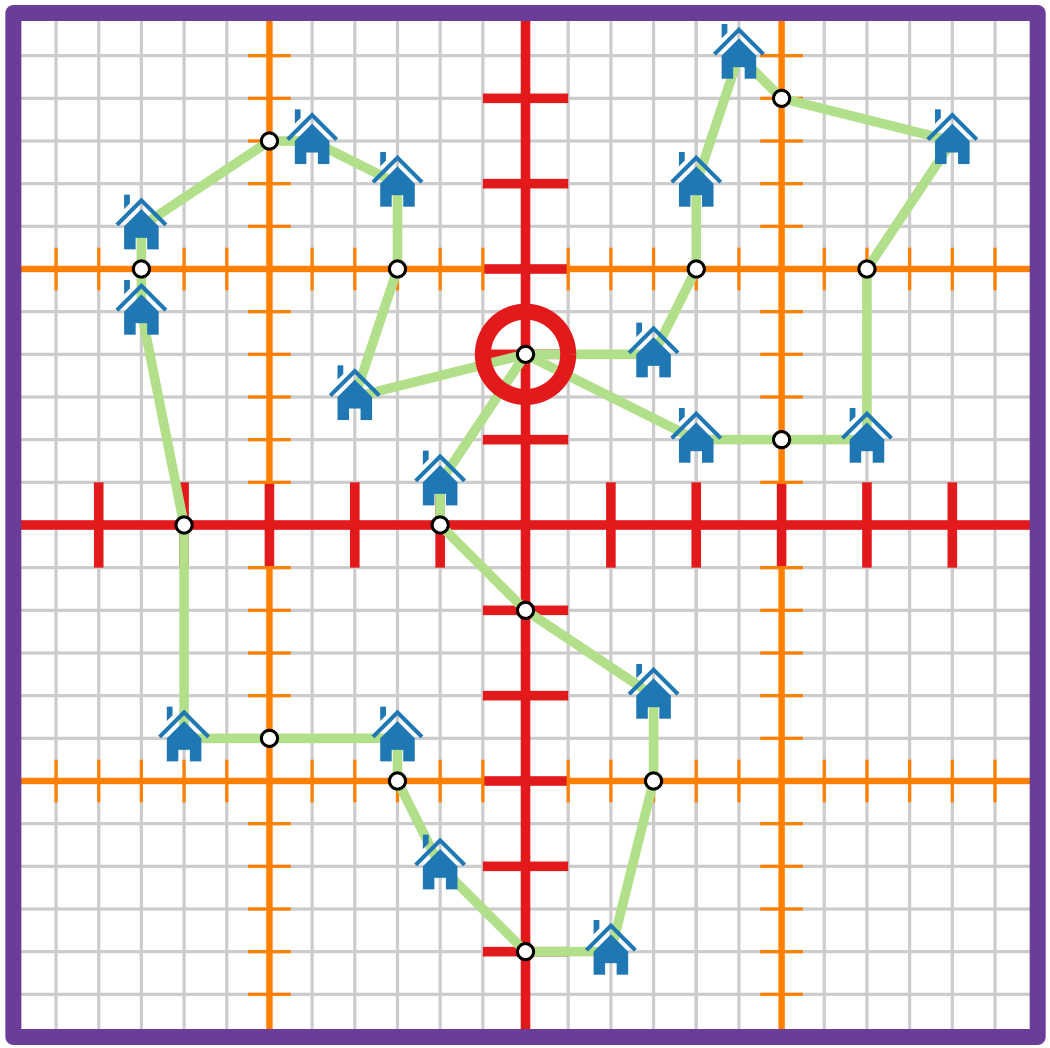
Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

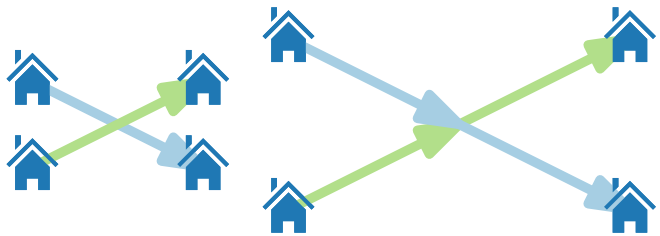
Kreuzung



Weihnachtliche Touren



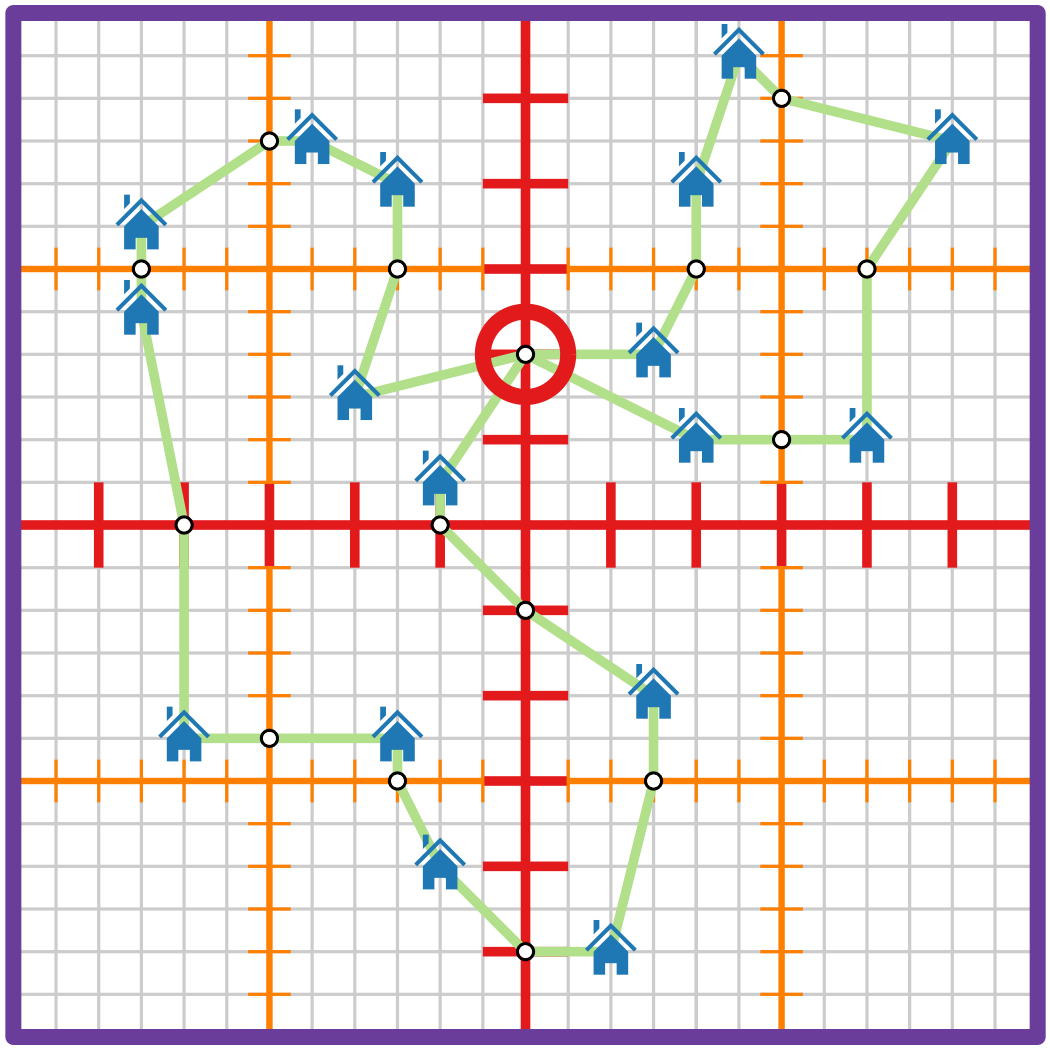
Kreuzung



Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

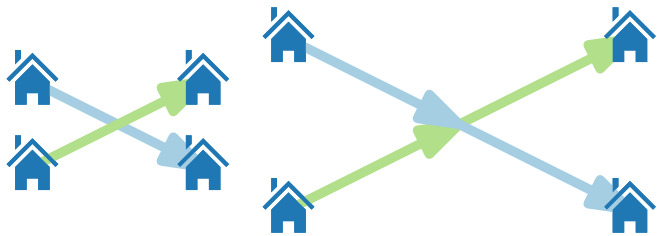
Weihnachtliche Touren



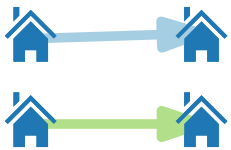
Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

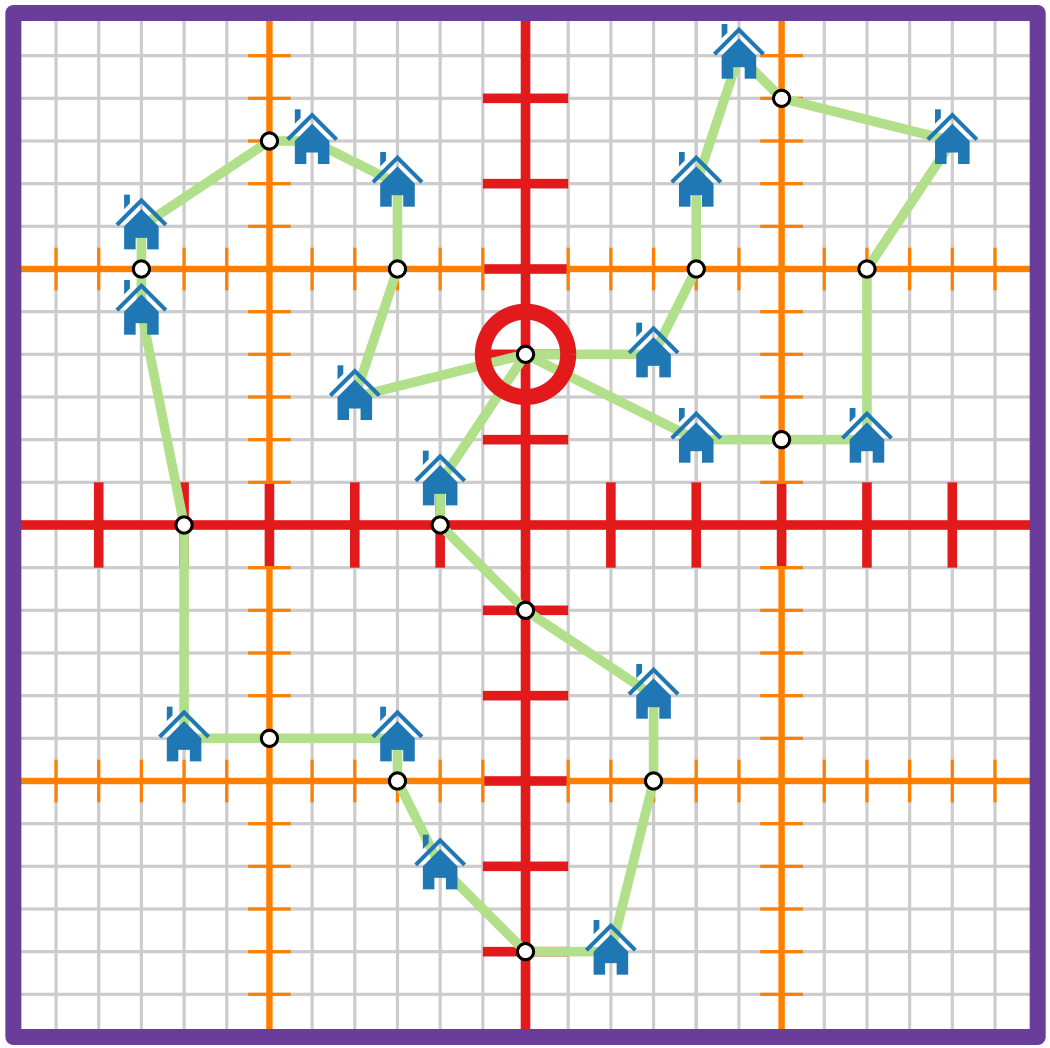
Kreuzung



Keine Kreuzung



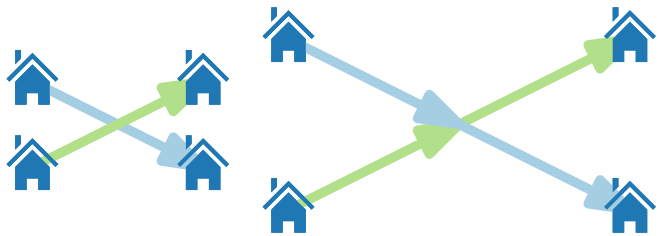
Weihnachtliche Touren



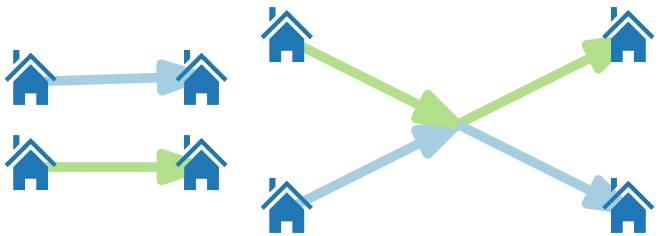
Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

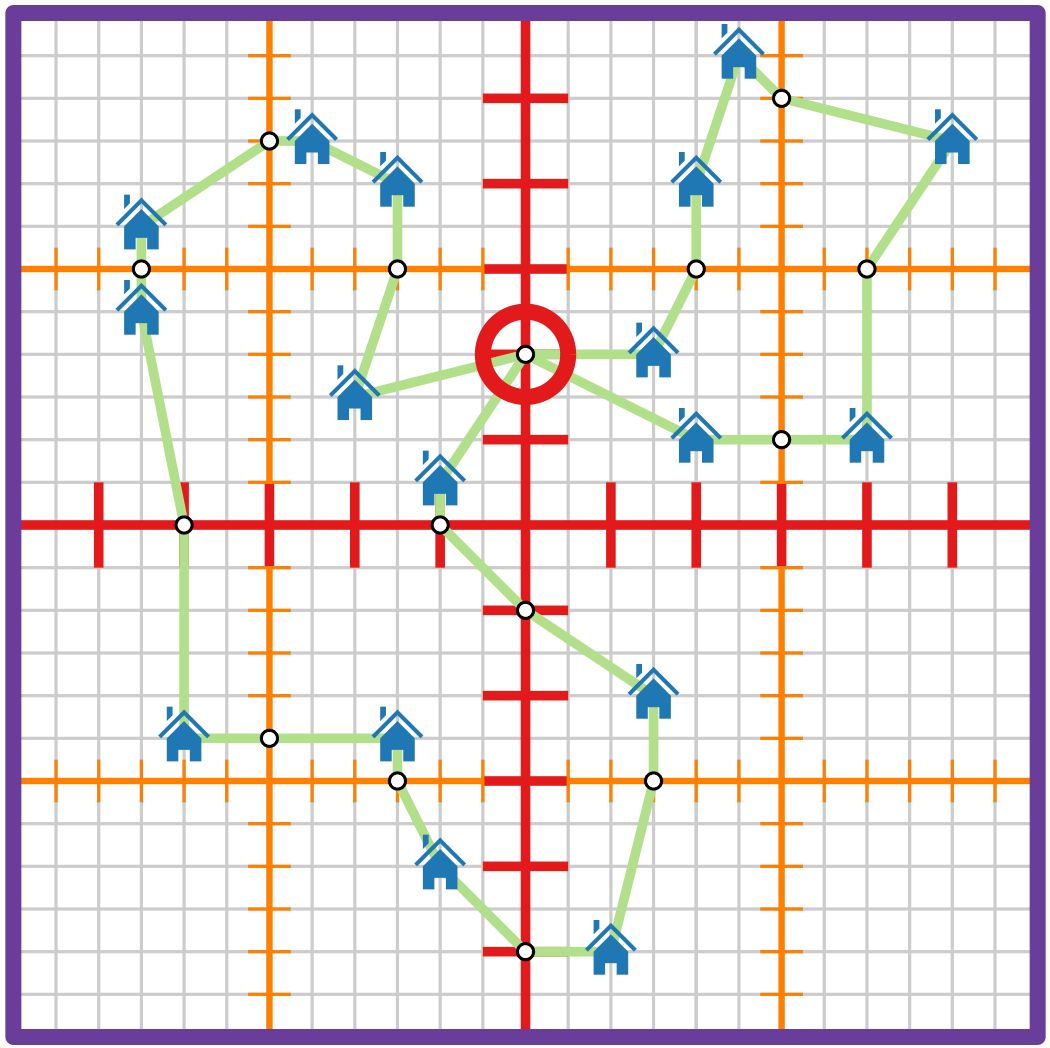
Kreuzung



Keine Kreuzung



Weihnachtliche Touren

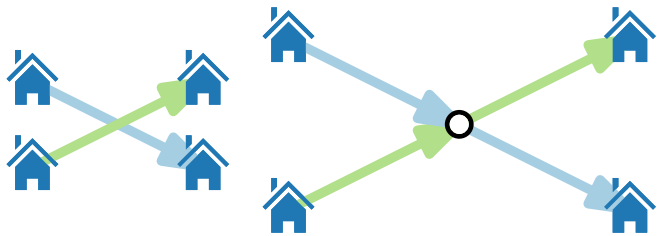


Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

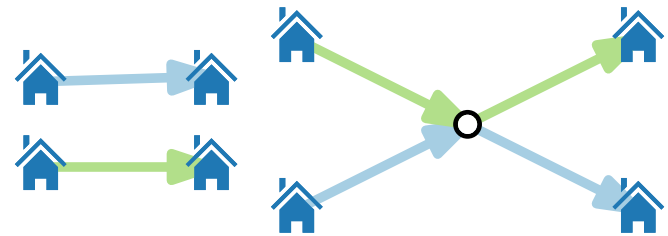
- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

Ohne Einschränkung (ÜA): Kein Portal wird mehr als zweimal besucht

Kreuzung



Keine Kreuzung



Berechnung weihnachtlicher Touren

Berechnung weihnachtlicher Touren

Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Berechnung weihnachtlicher Touren

Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Beweisidee.

Berechnung weihnachtlicher Touren

Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Beweisidee. ■ Dynamische Programmierung!

Berechnung weihnachtlicher Touren

Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Beweisidee.

- Dynamische Programmierung!
- Berechne Daten über beste weihnachtliche Tour für jedes Quadrat im Zerlegungsbaum.

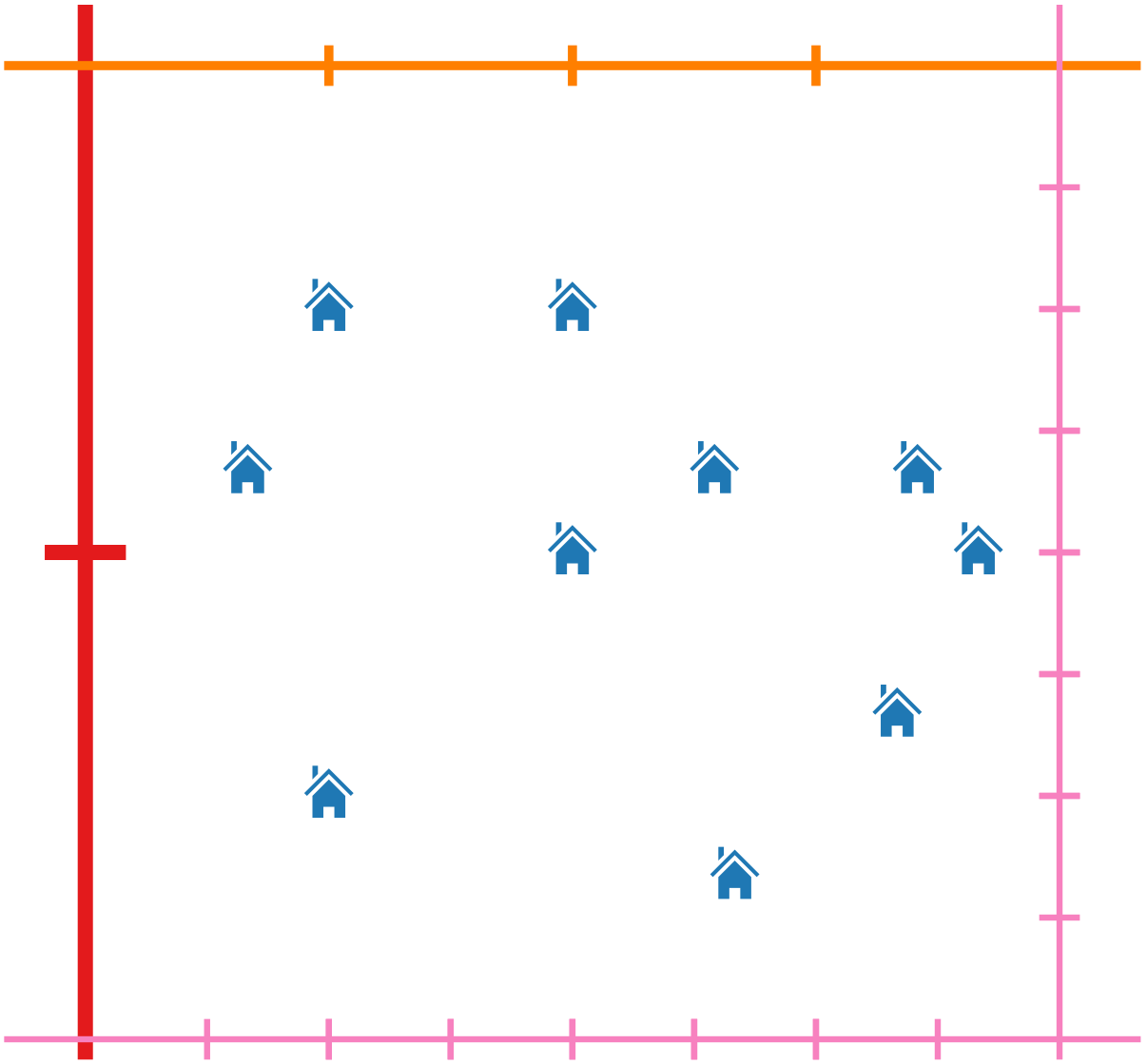
Berechnung weihnachtlicher Touren

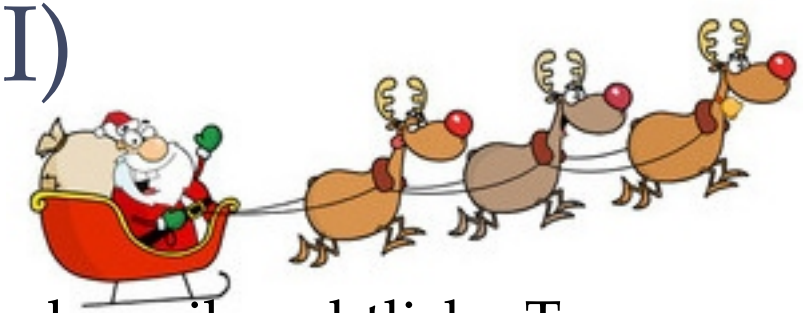
Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Beweisidee.

- Dynamische Programmierung!
- Berechne Daten über beste weihnachtliche Tour für jedes Quadrat im Zerlegungsbaum.
- Diese Daten können im Zerlegungsbaum effizient Bottom-Up propagiert werden.

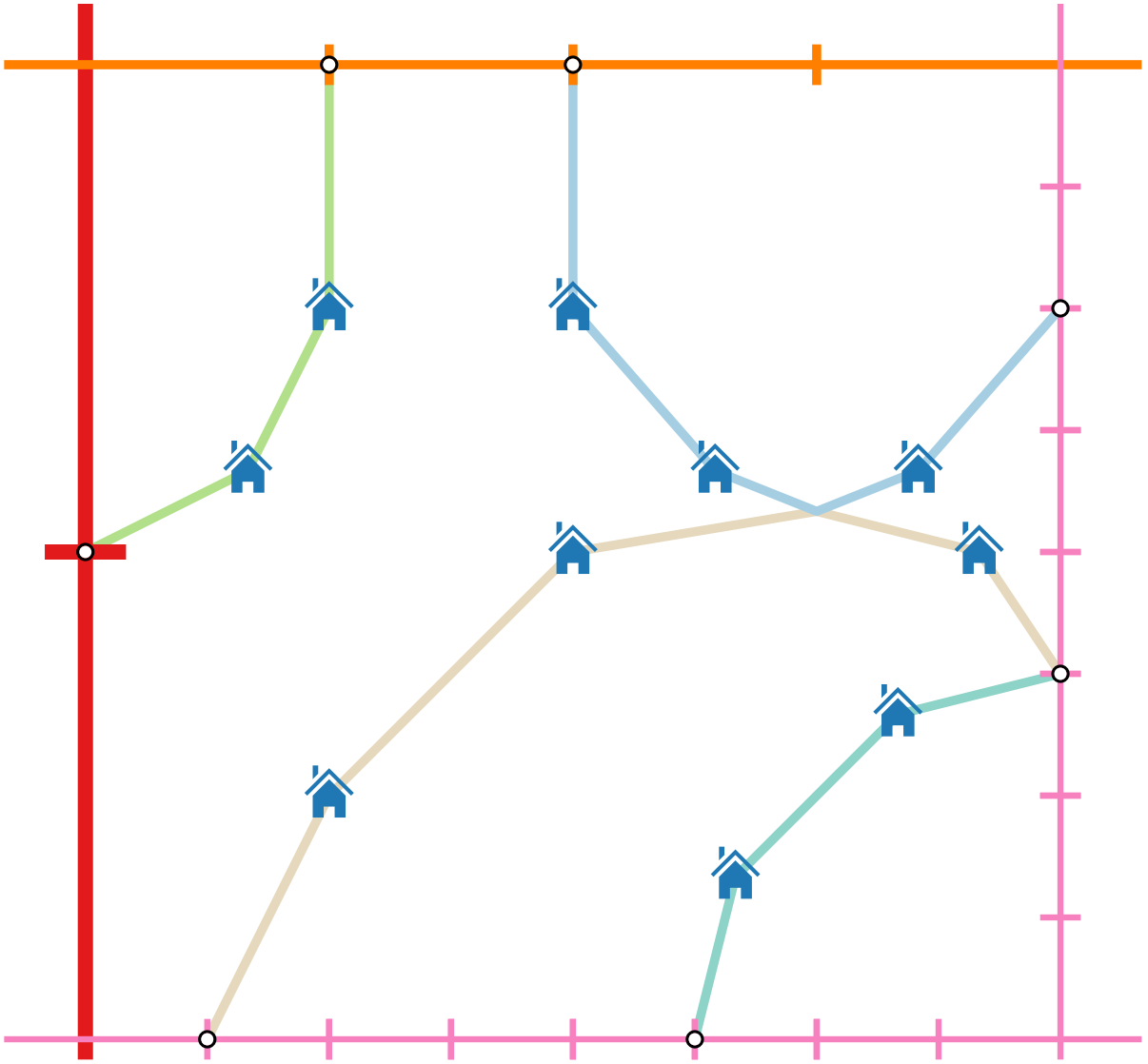
Dynamisches Programm (I)

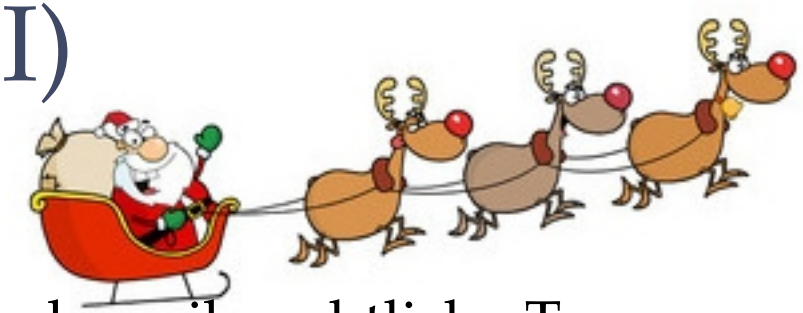




Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

Dynamisches Programm (I)

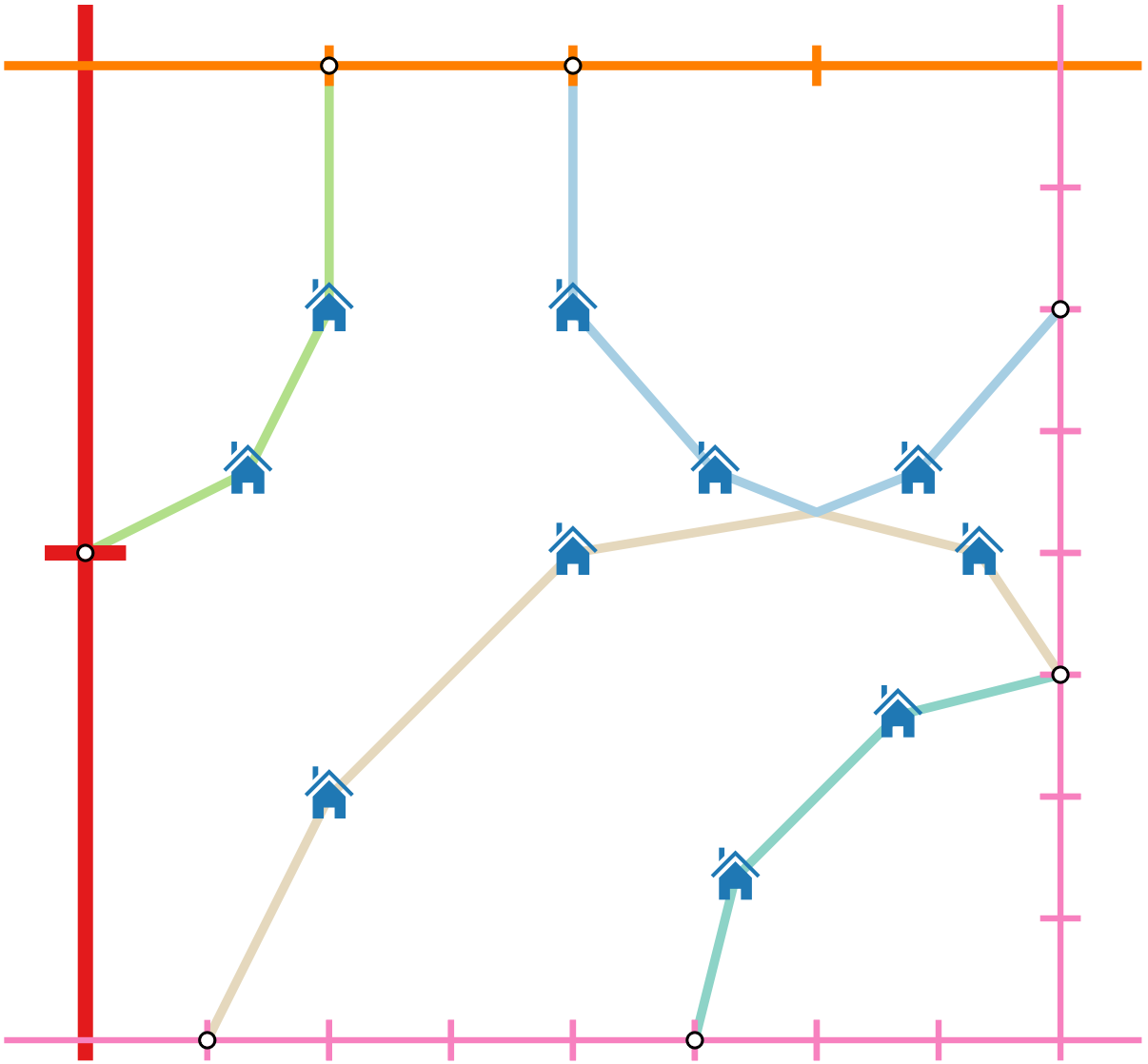


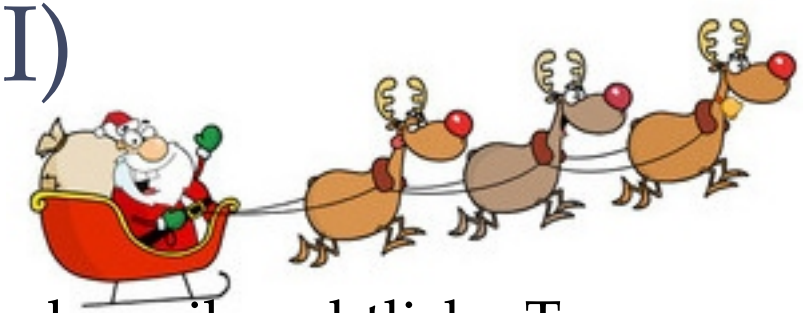


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden

Dynamisches Programm (I)

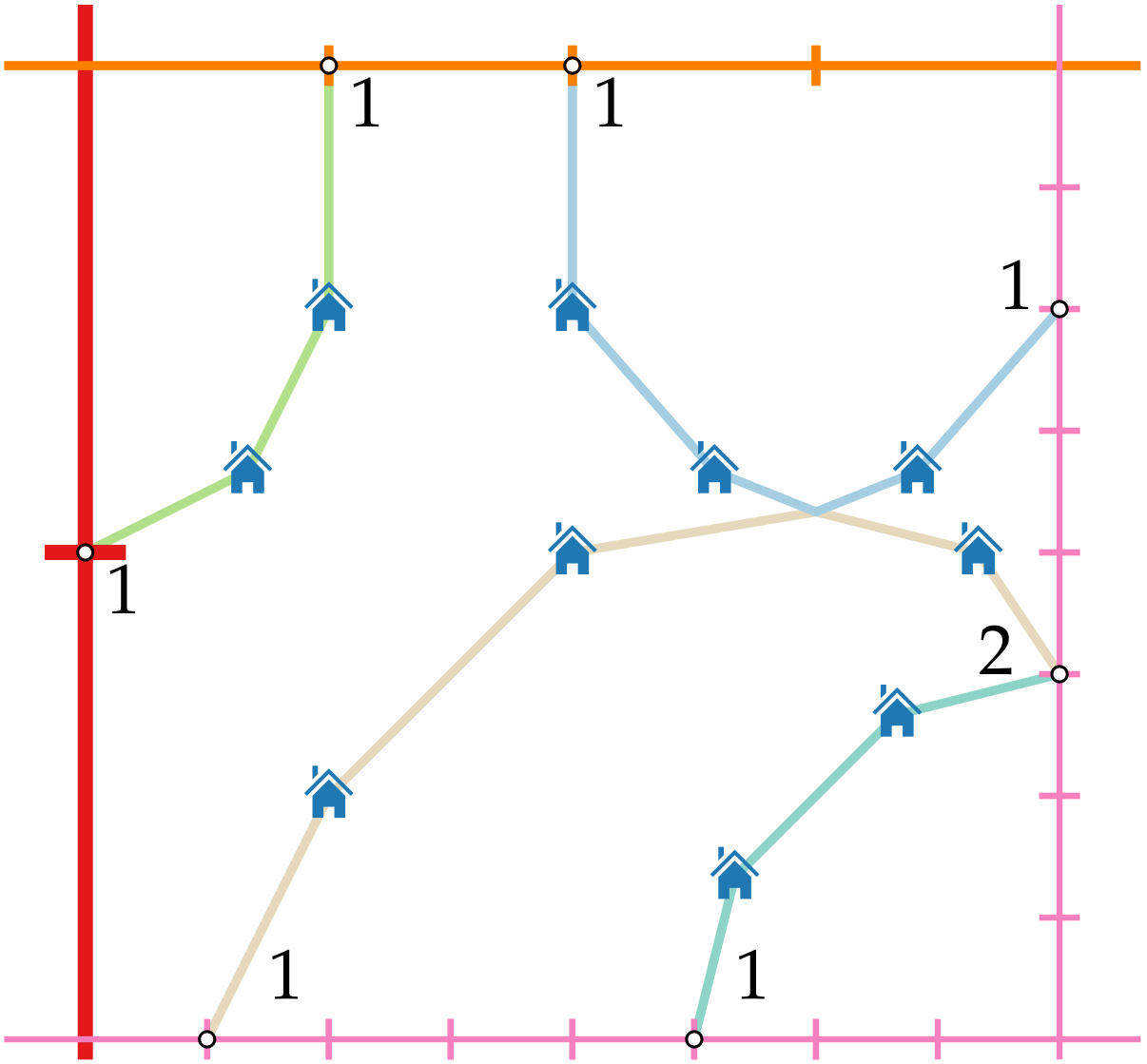


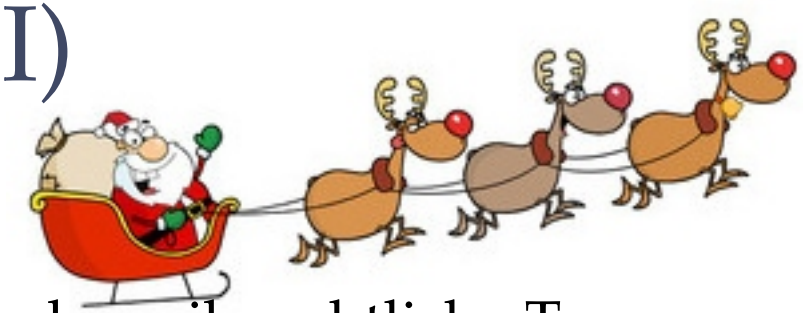


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

Dynamisches Programm (I)

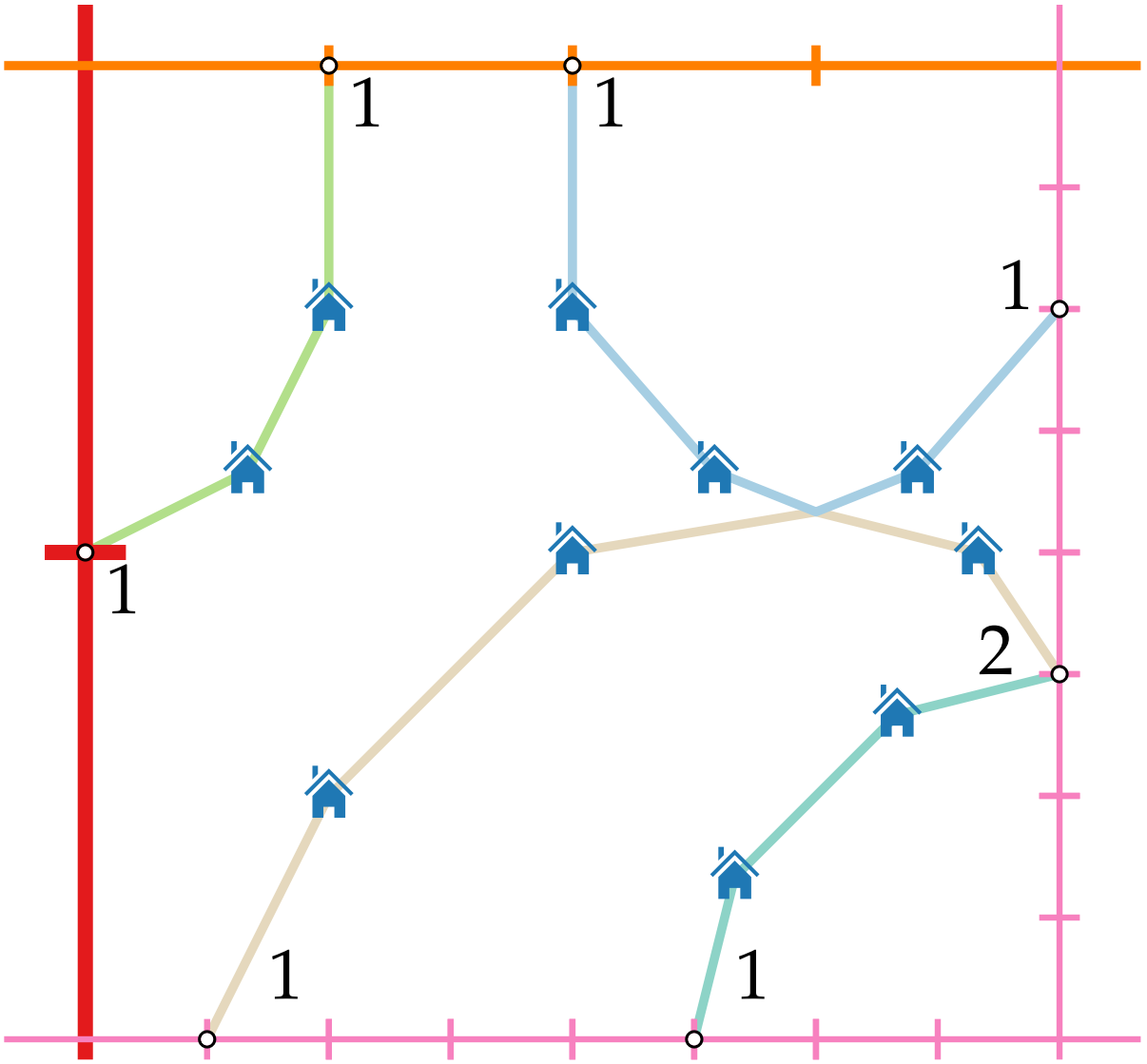


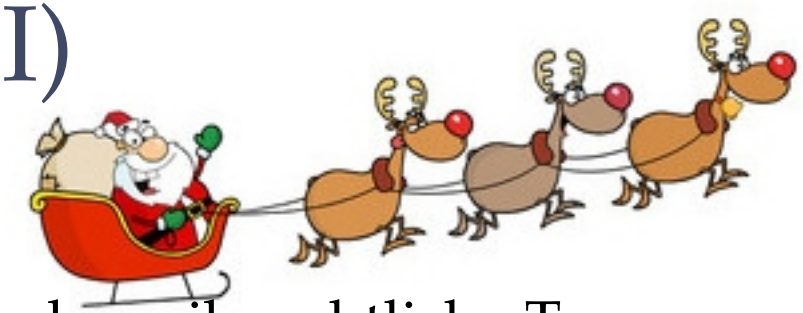


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

Dynamisches Programm (I)



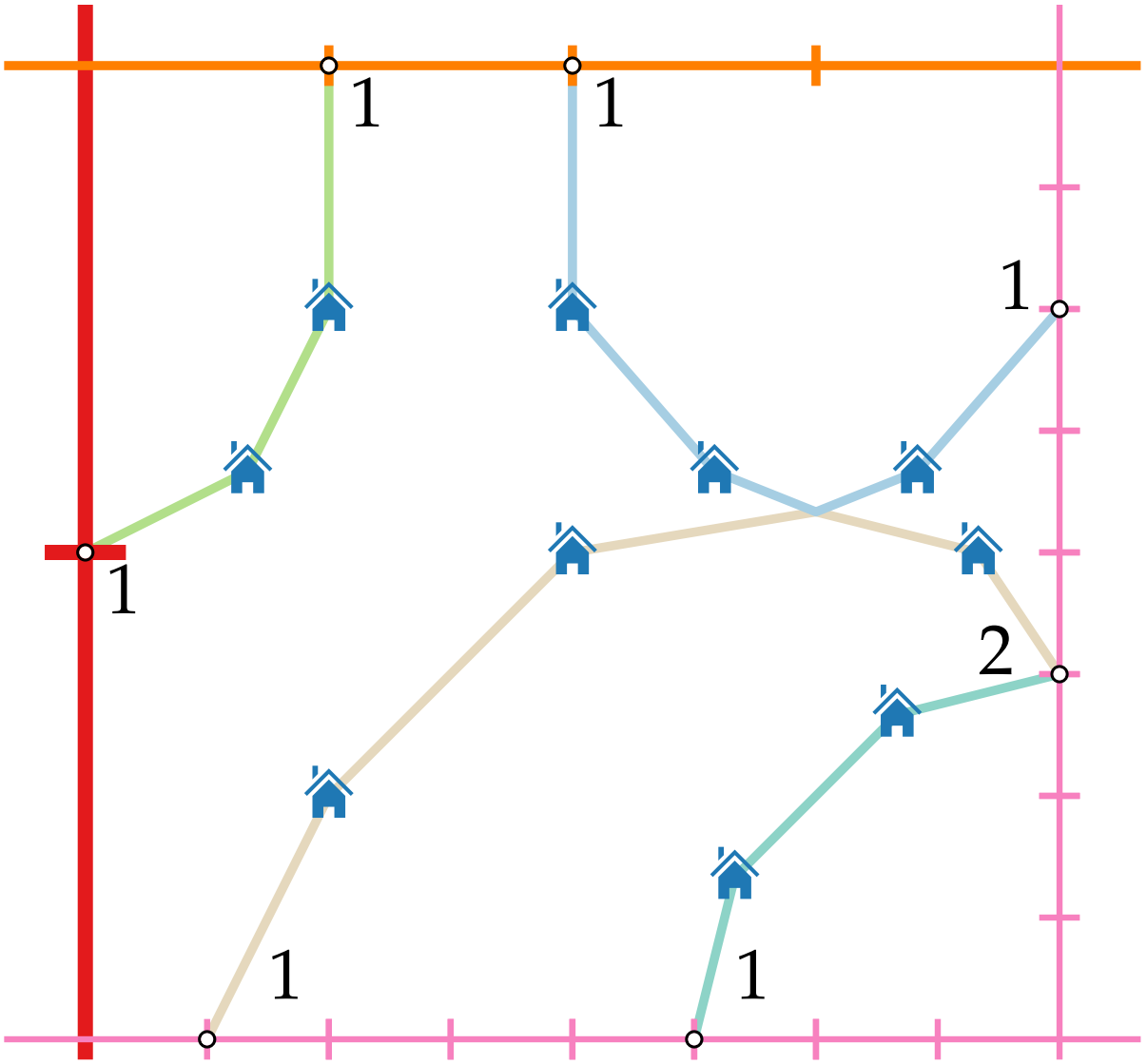


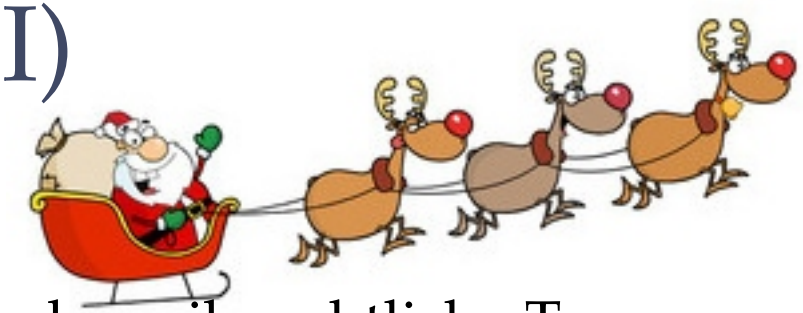
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

$\Rightarrow$ max. Möglichkeiten

Dynamisches Programm (I)



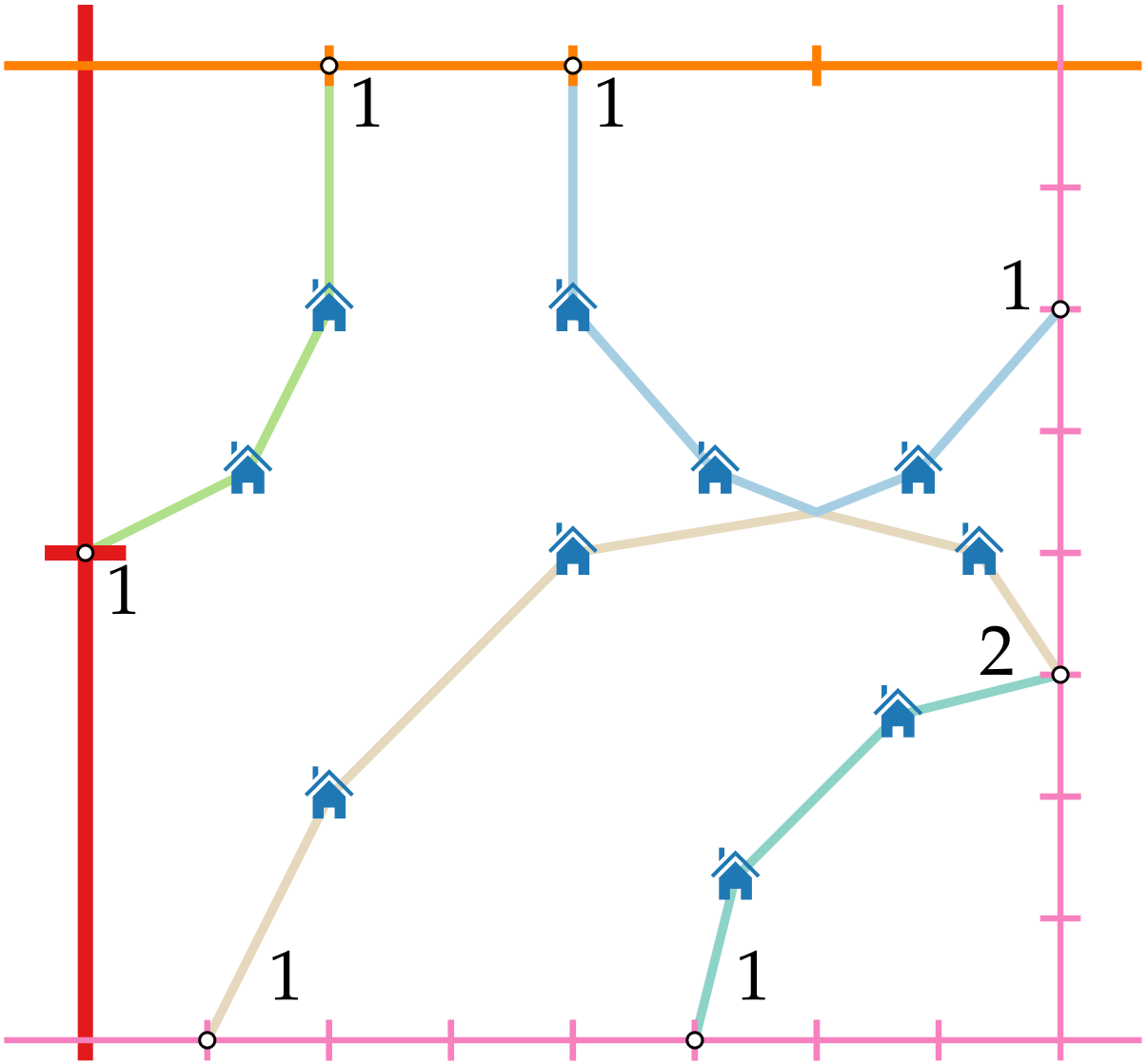


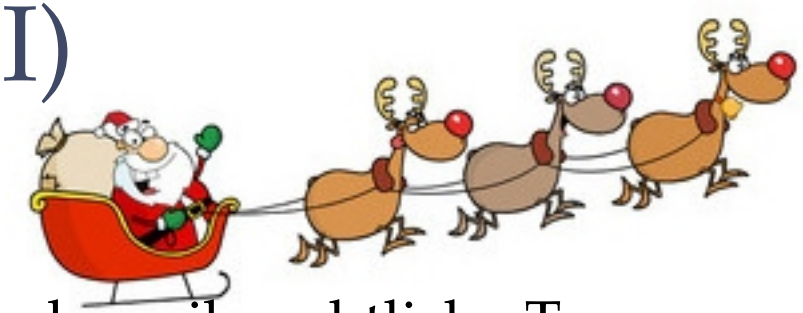
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

$\Rightarrow$ max. $3^{4m} =$ Möglichkeiten

Dynamisches Programm (I)





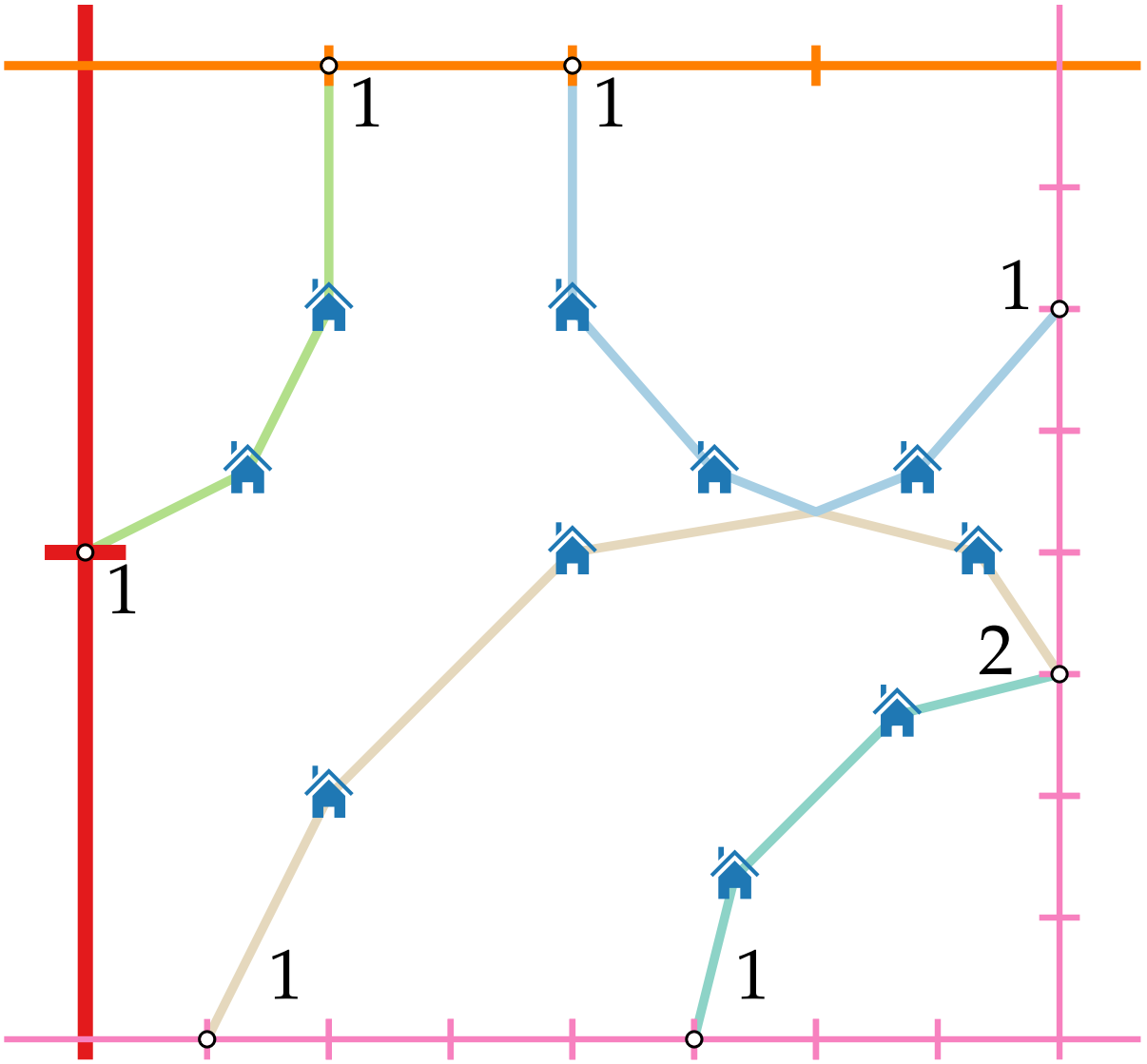
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

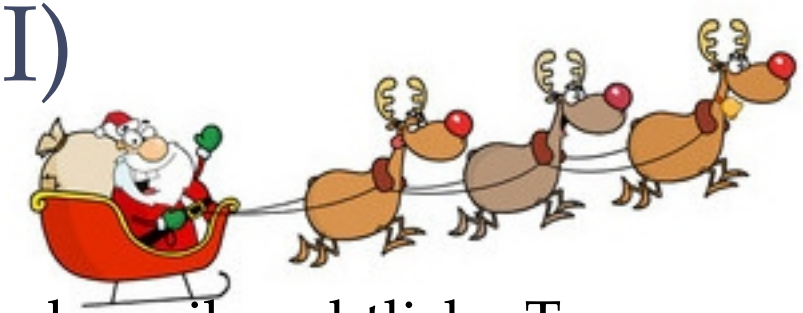
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

$\Rightarrow$ max. $3^{4m} =$ Möglichkeiten

$m = O((\log n)/\varepsilon)$

Dynamisches Programm (I)





Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

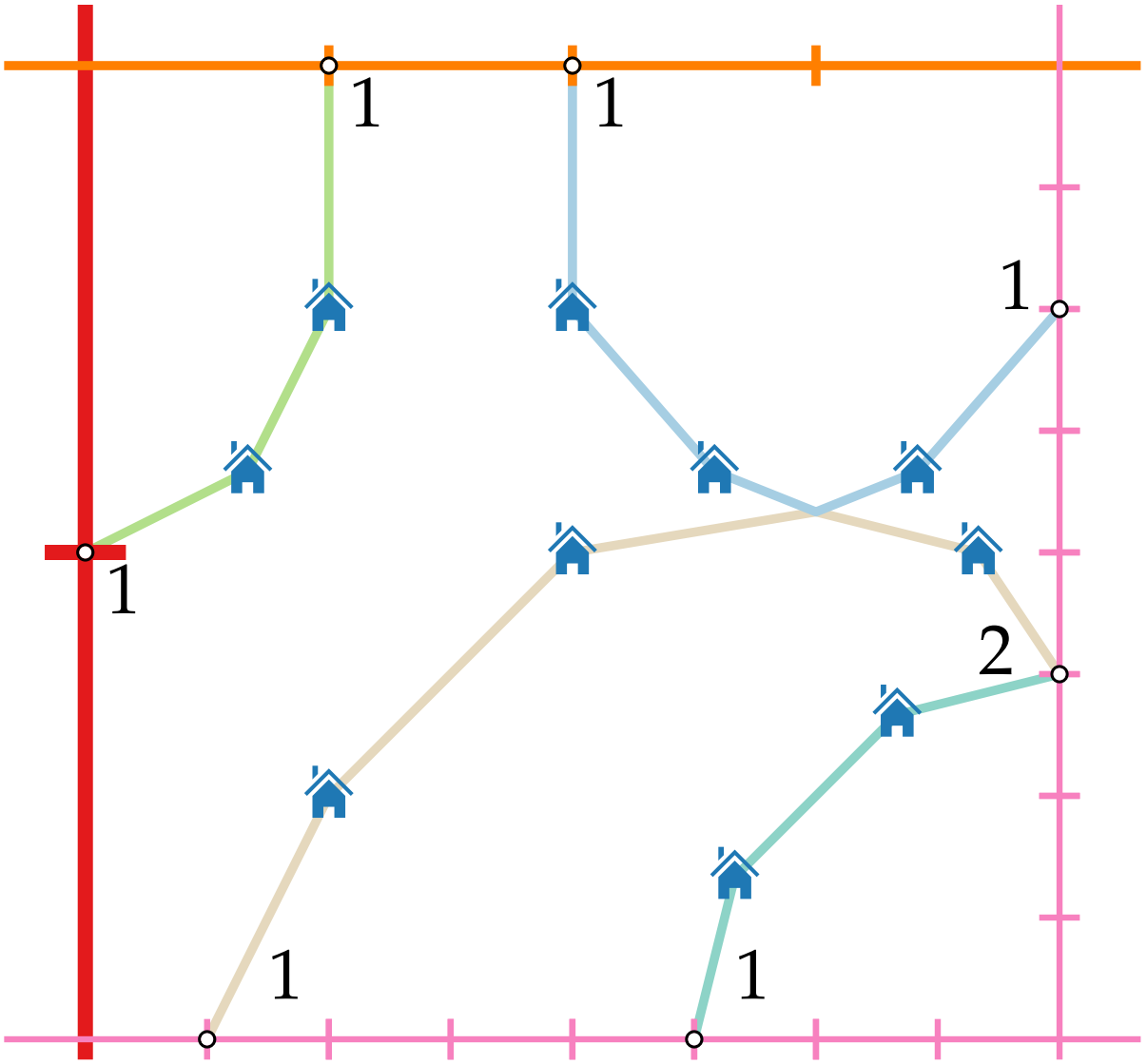
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

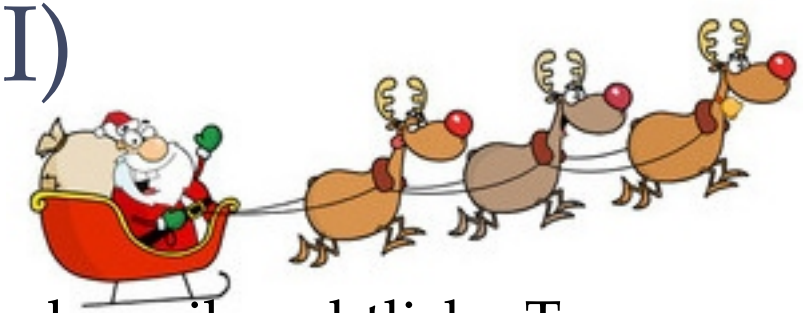
$$\Rightarrow \text{max. } 3^{4m} = 3^{O((\log n)/\varepsilon)}$$

$m = O((\log n)/\varepsilon)$

Möglichkeiten

Dynamisches Programm (I)





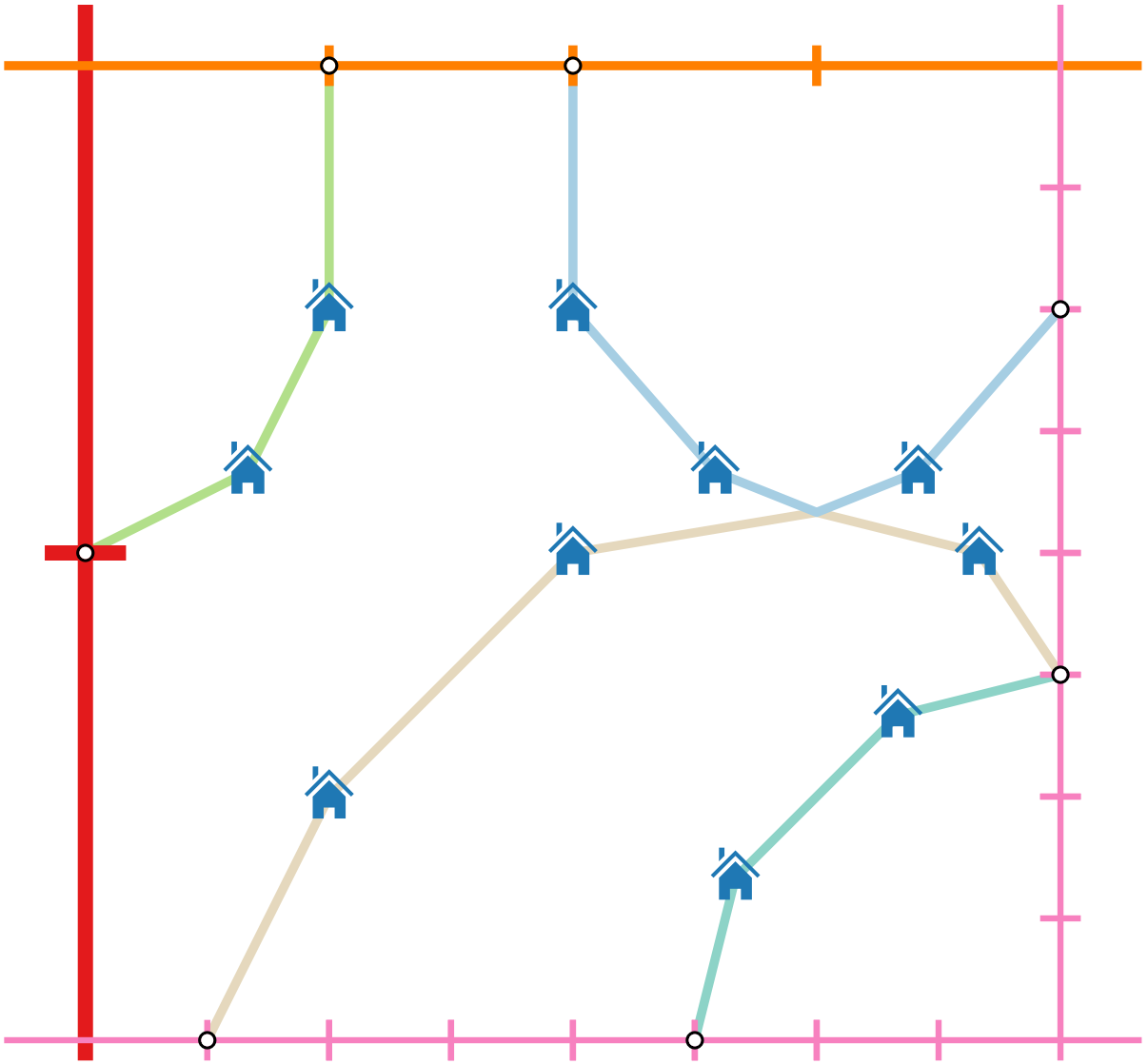
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

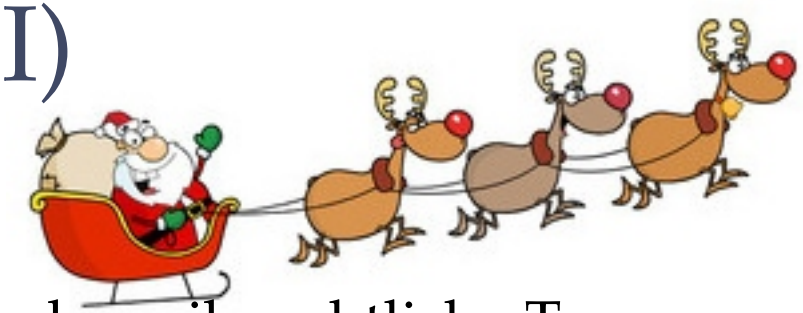
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

$$\Rightarrow \text{max. } 3^{4m} = 3^{O((\log n)/\varepsilon)} = n^{O(1/\varepsilon)} \text{ Möglichkeiten}$$

$m = O((\log n)/\varepsilon)$

Dynamisches Programm (I)

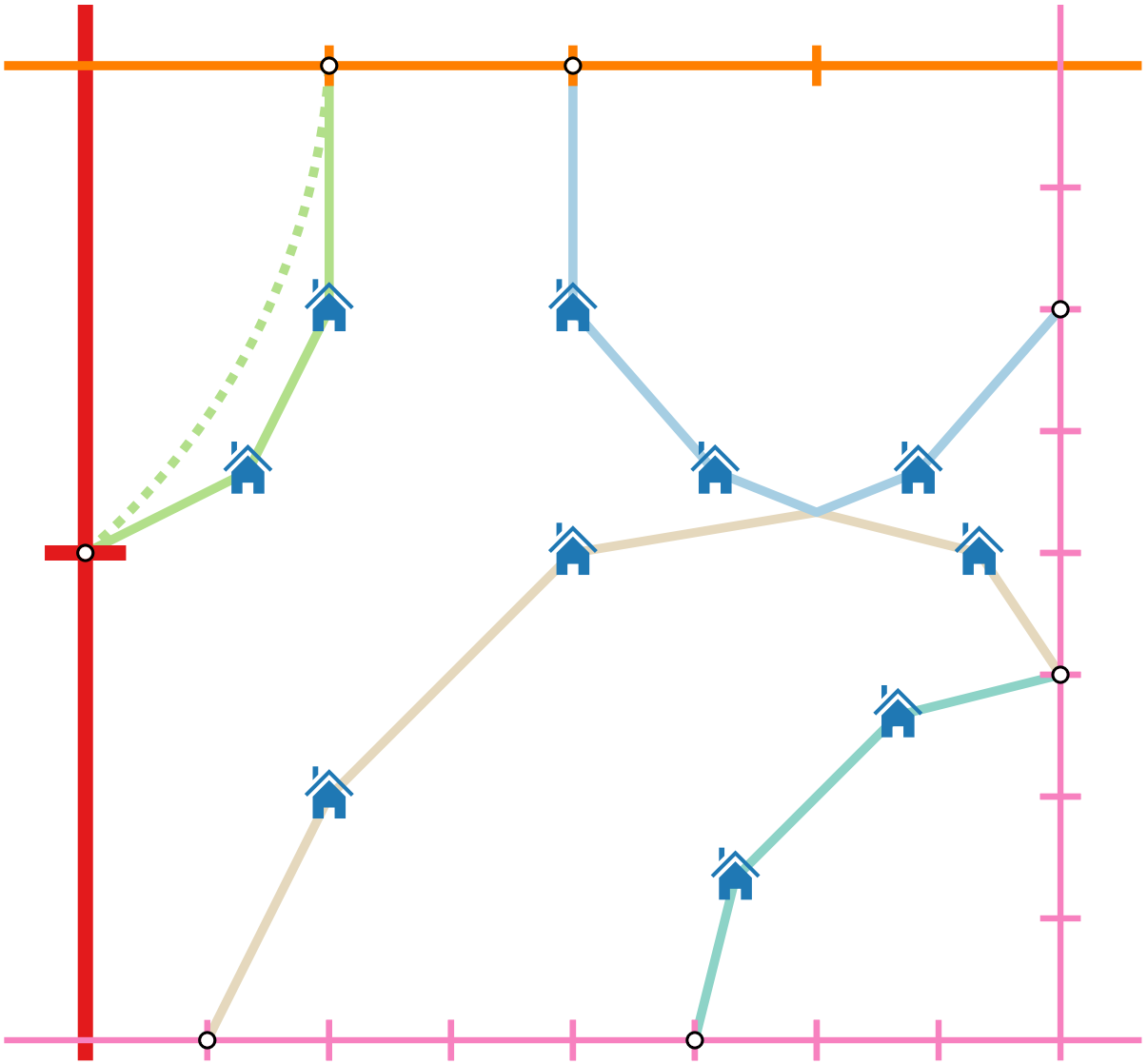


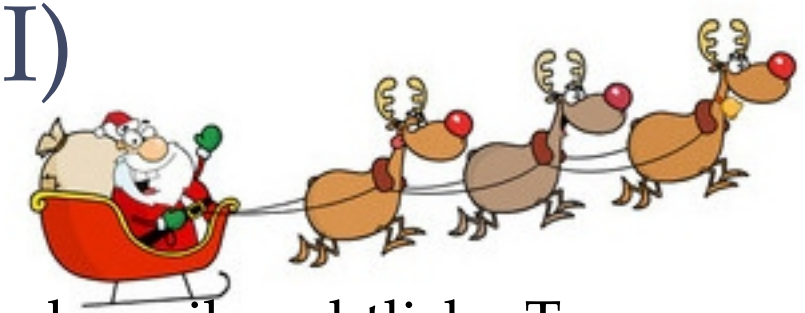


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

Dynamisches Programm (I)

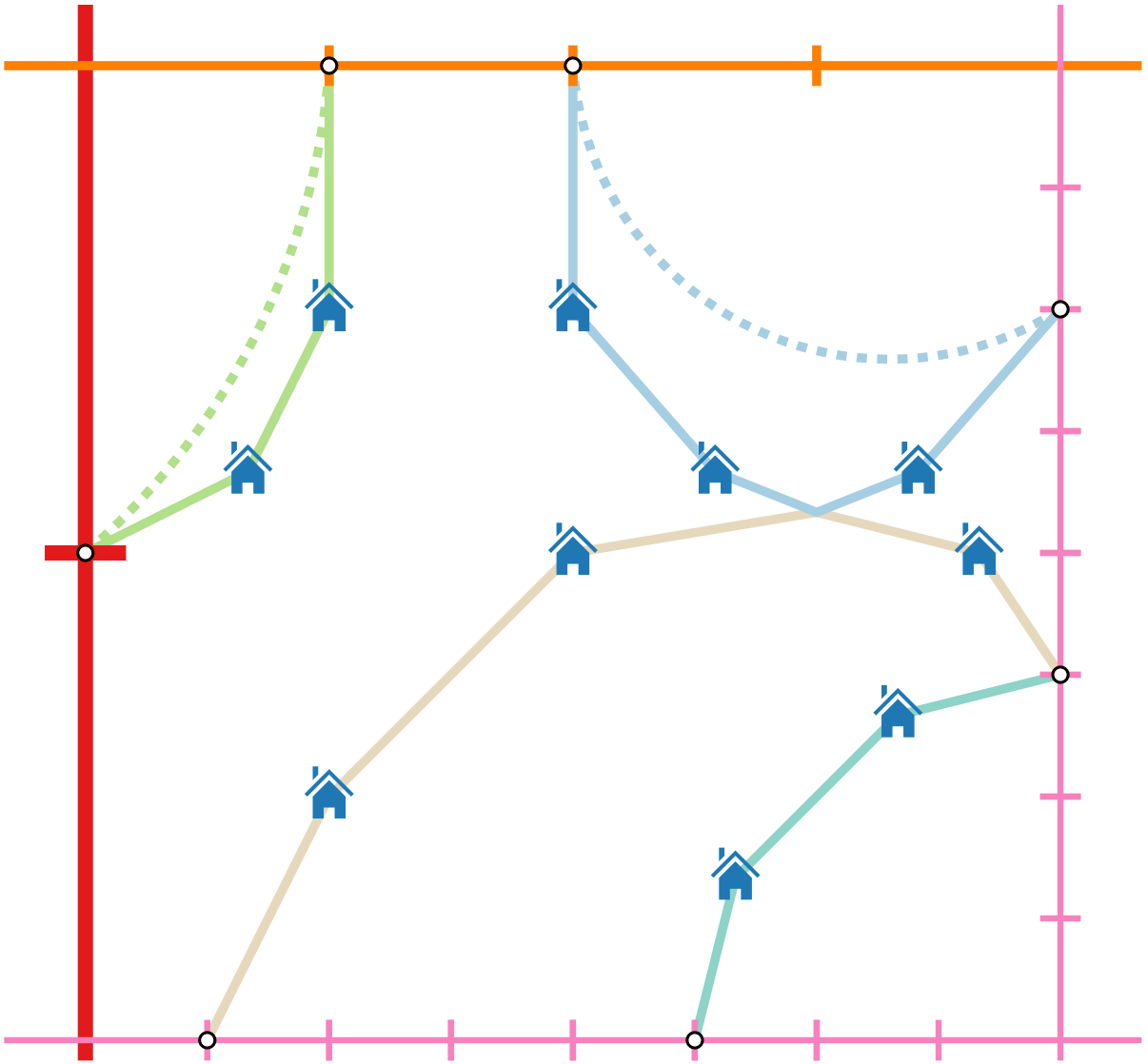


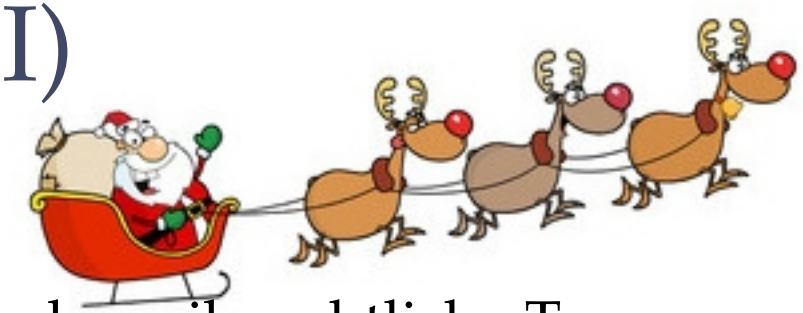


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

Dynamisches Programm (I)

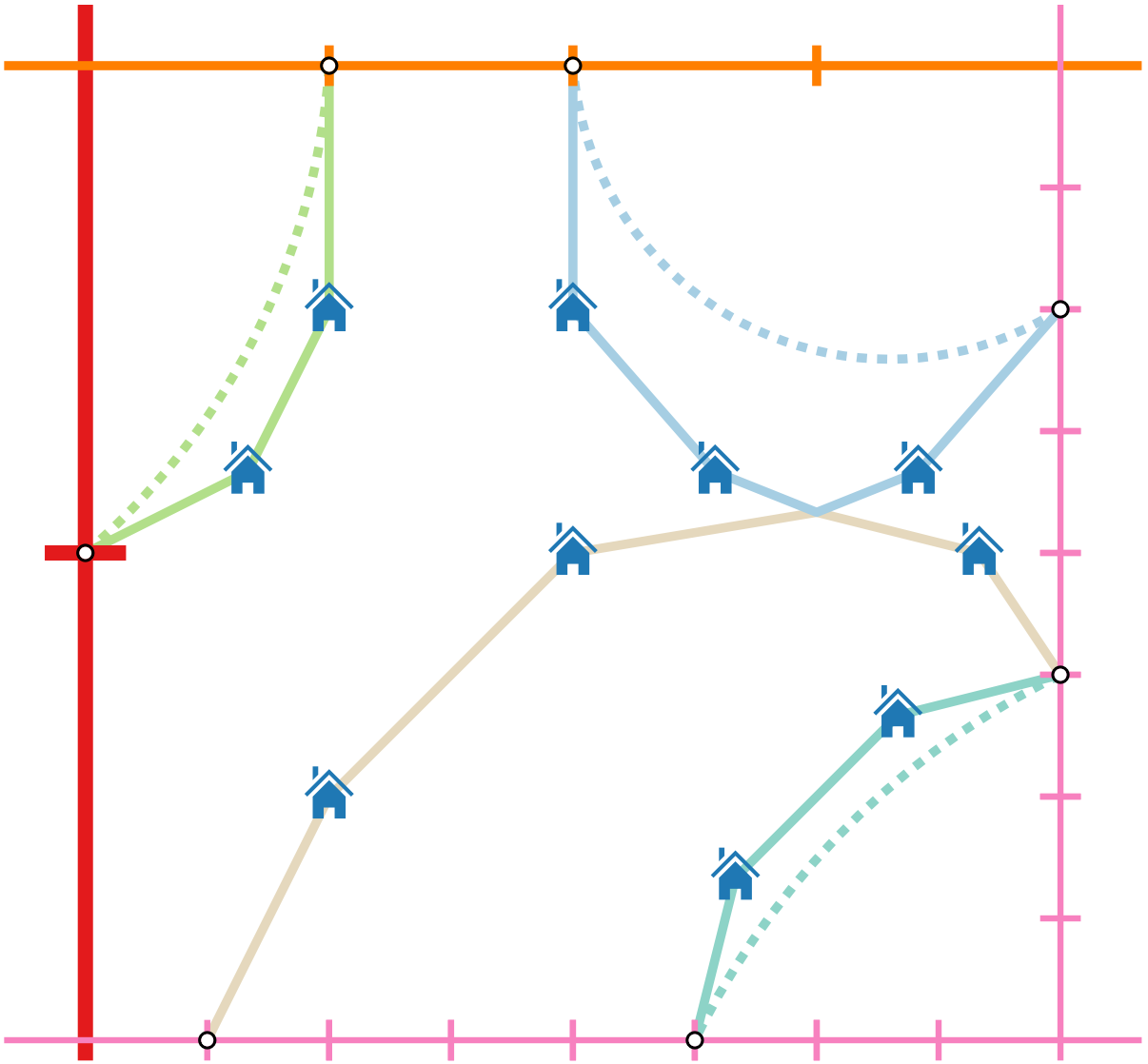


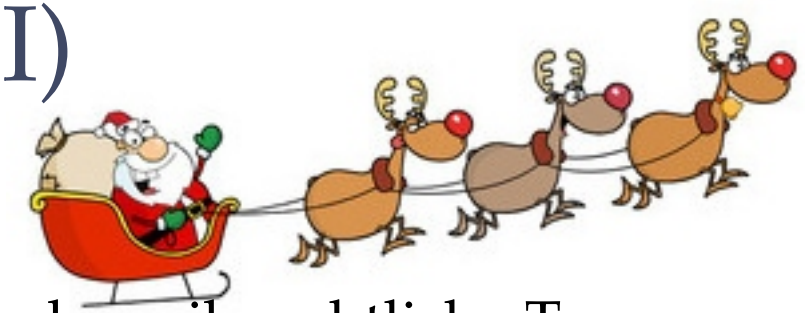


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

Dynamisches Programm (I)

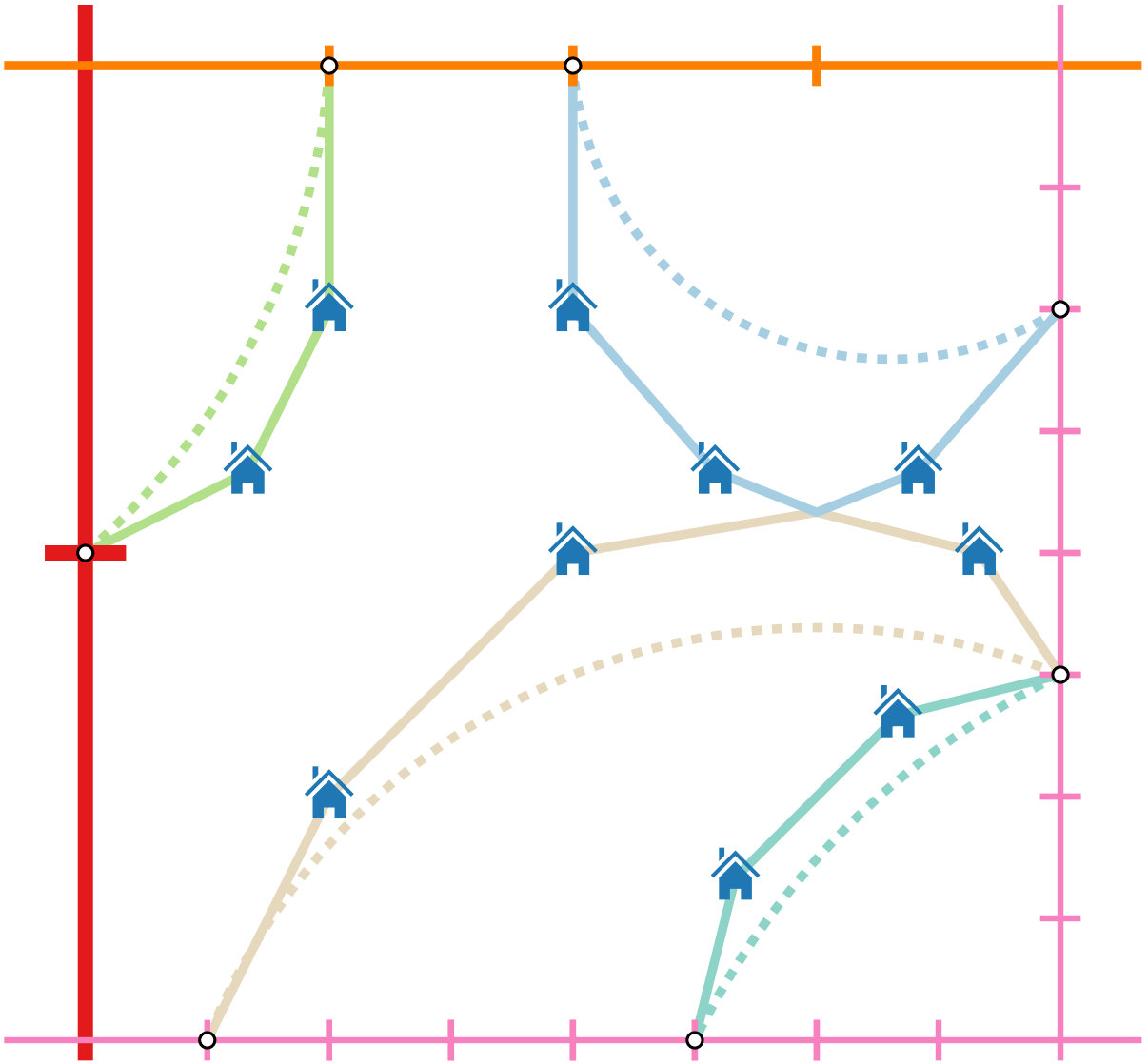


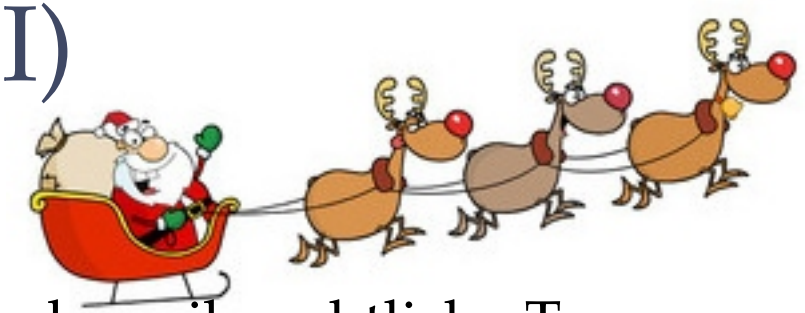


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

Dynamisches Programm (I)

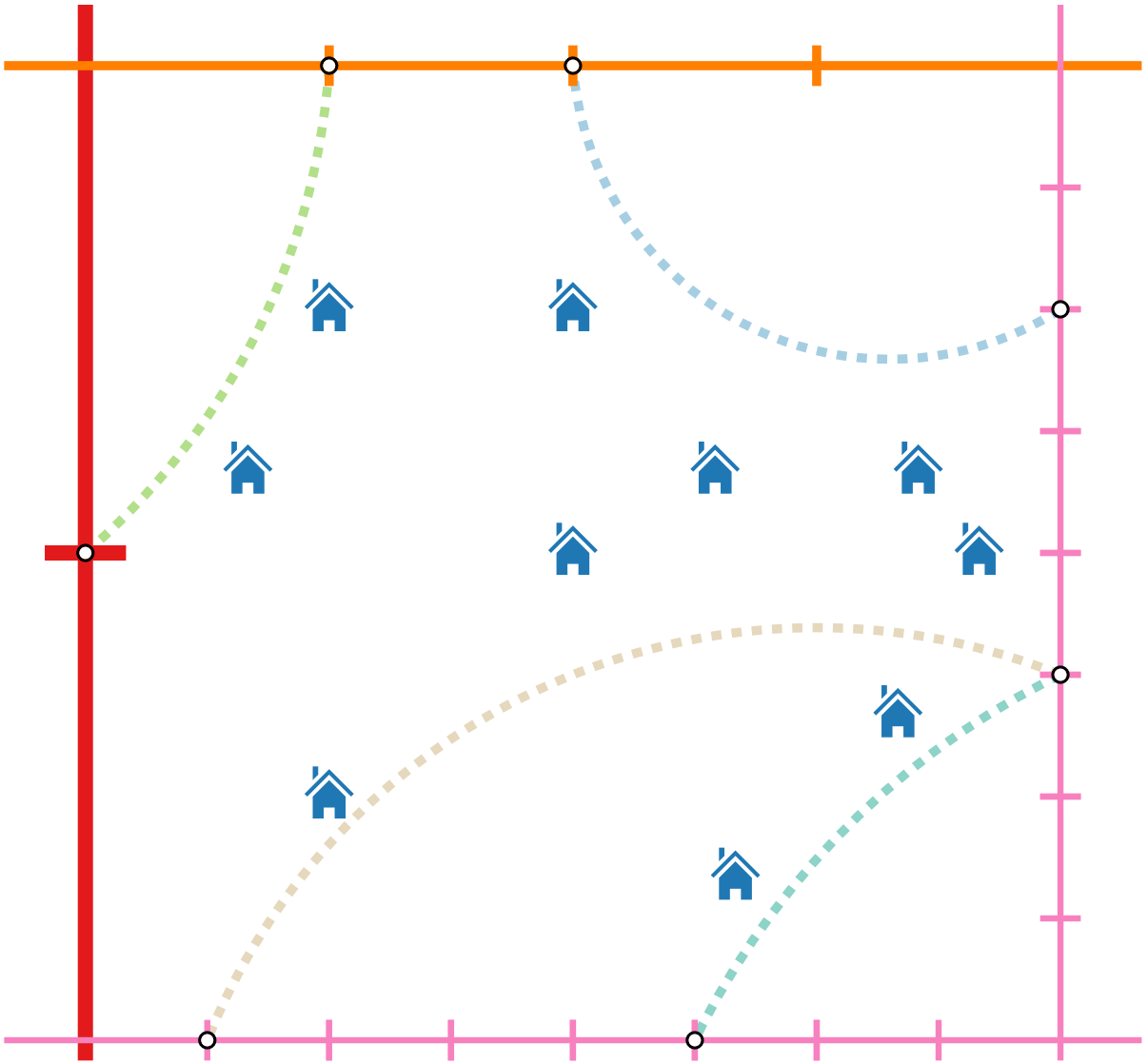


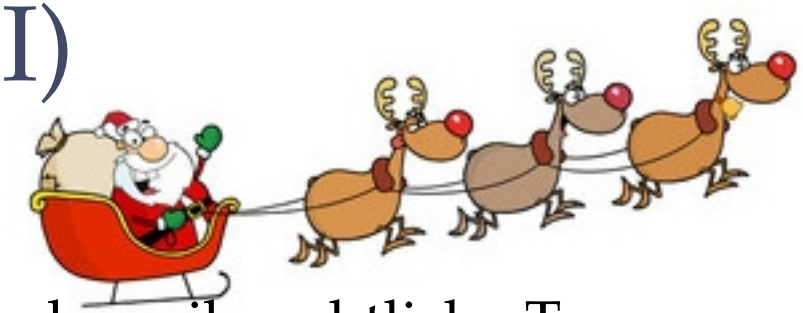


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

Dynamisches Programm (I)

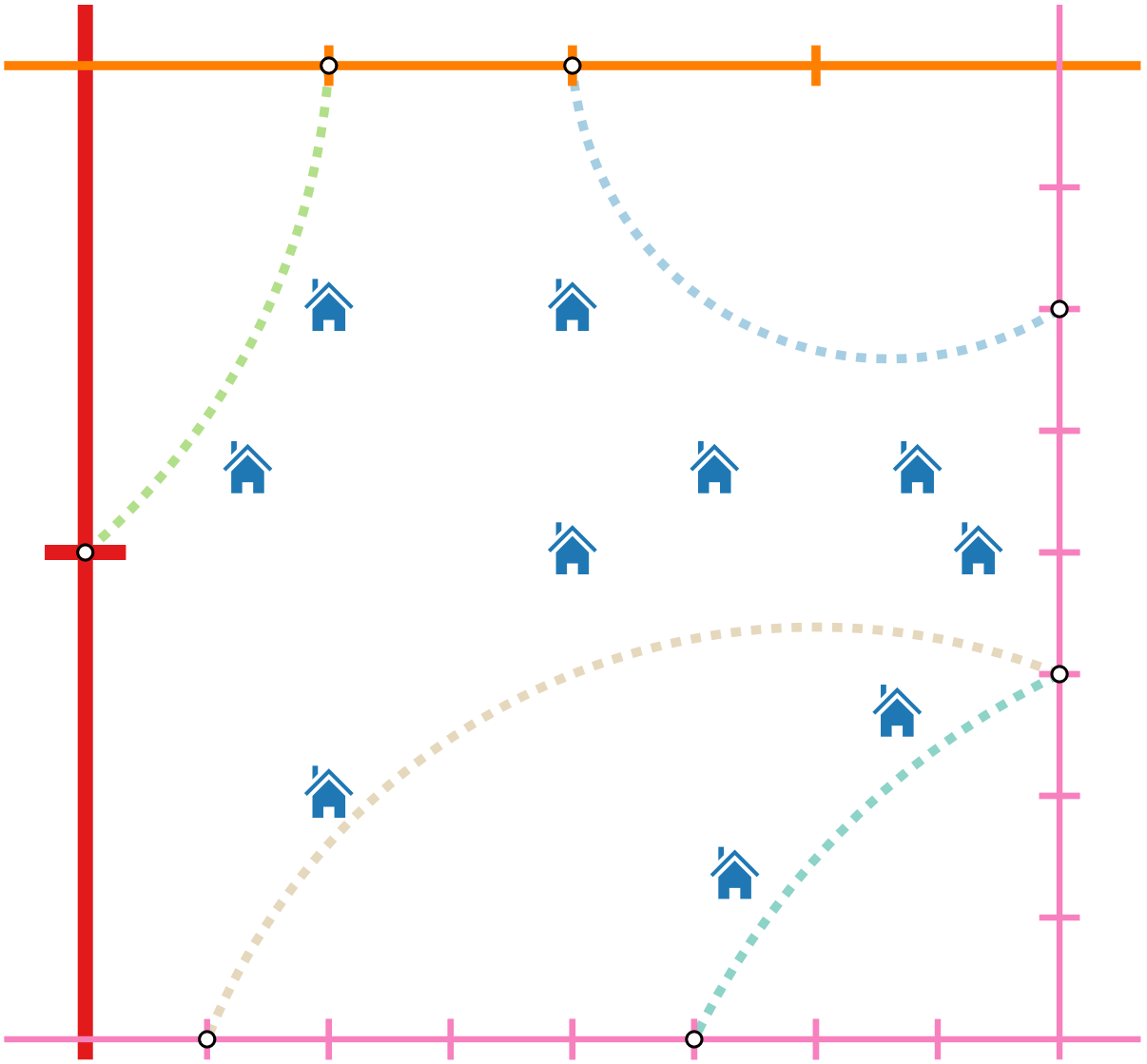


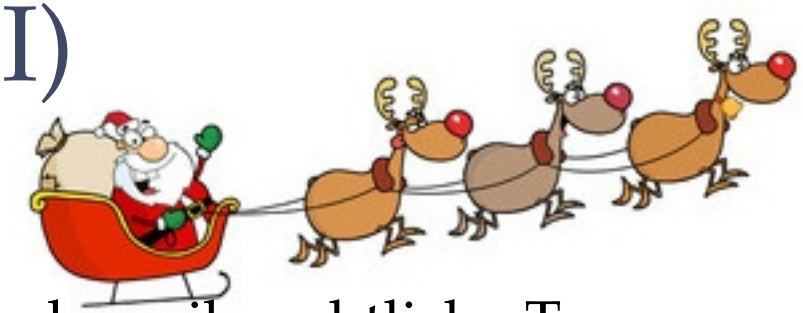


Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

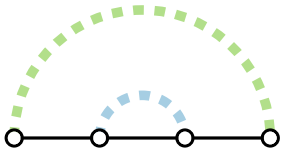
Dynamisches Programm (I)



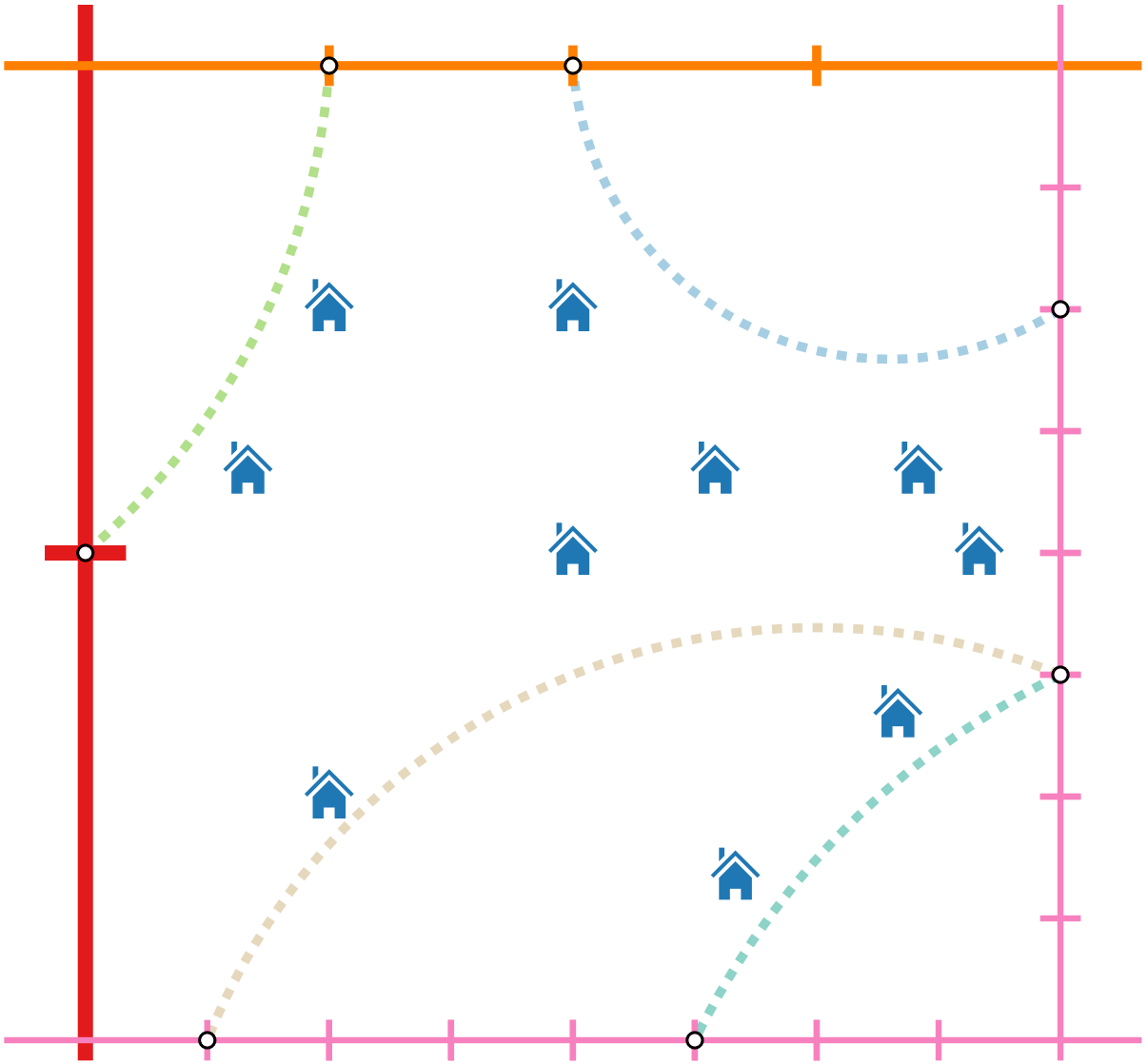


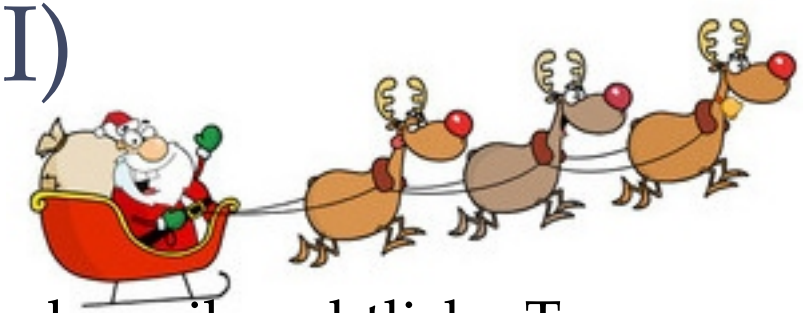
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale



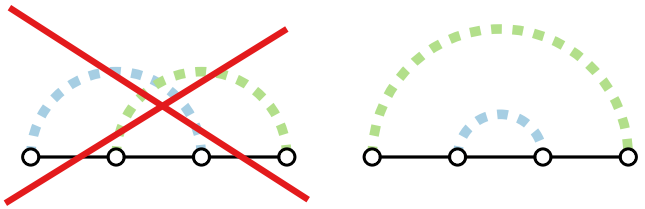
Dynamisches Programm (I)



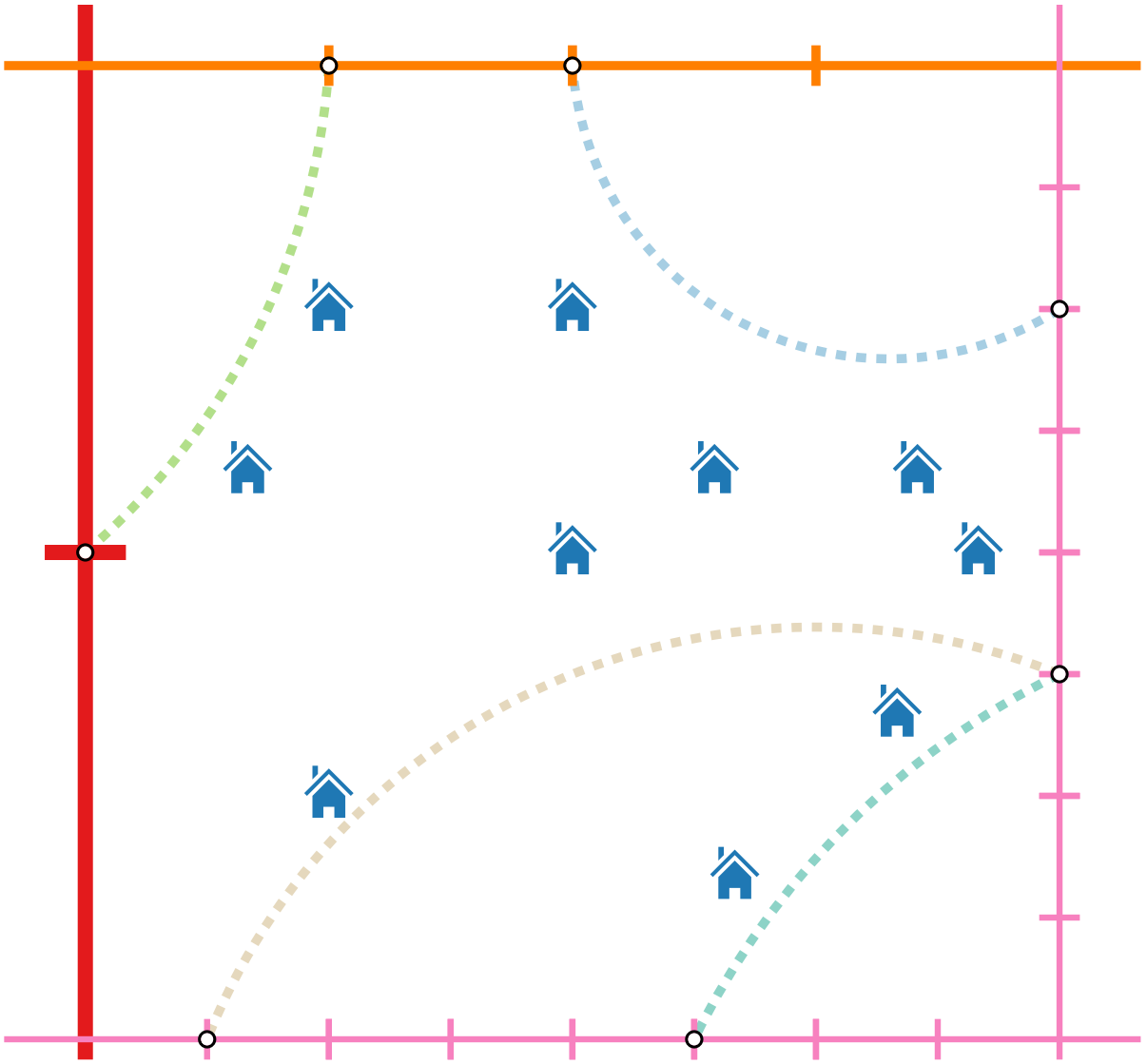


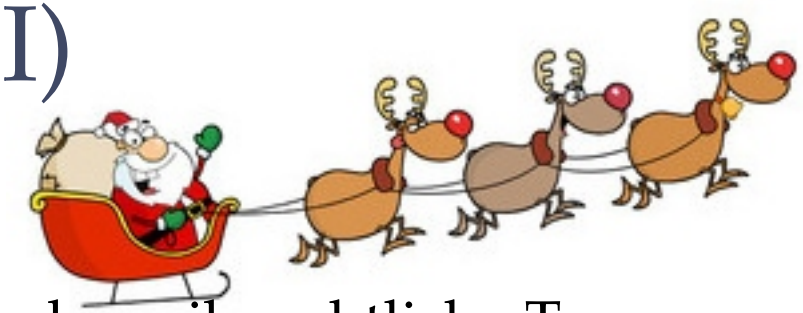
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale



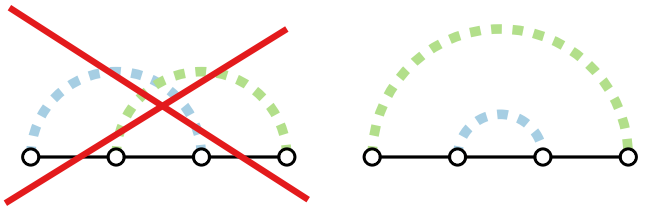
Dynamisches Programm (I)





Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

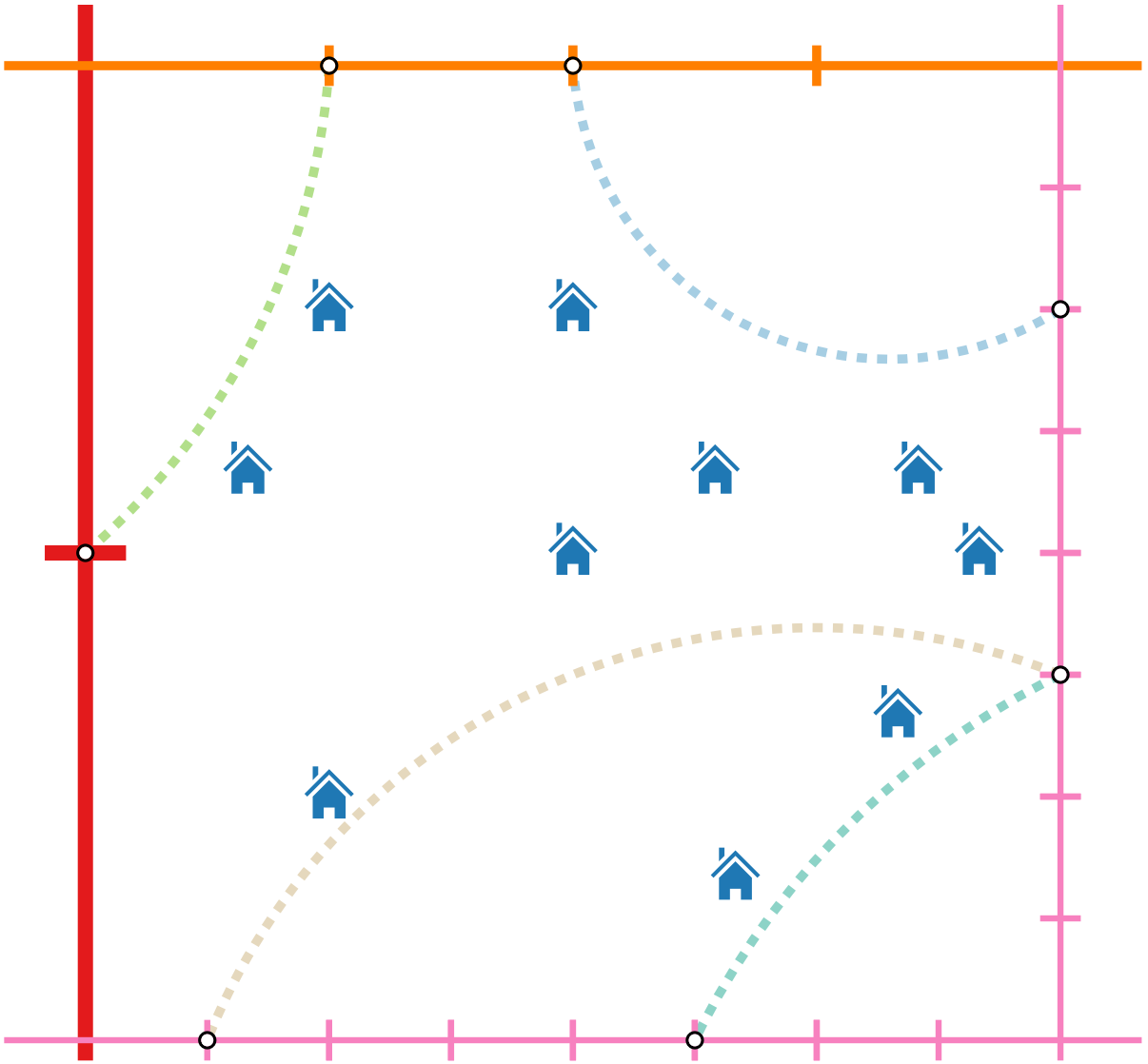
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

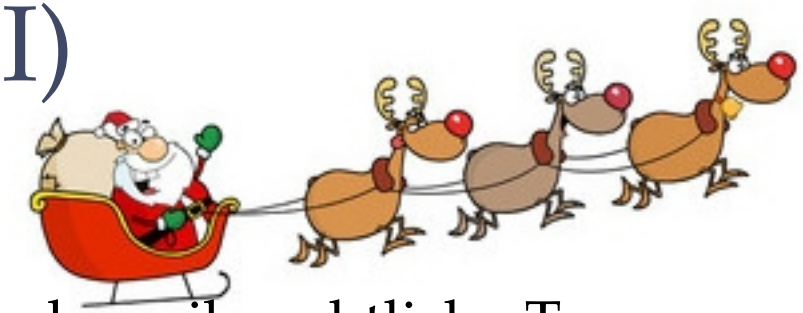


$\Rightarrow$ max.

krf. Paarungen

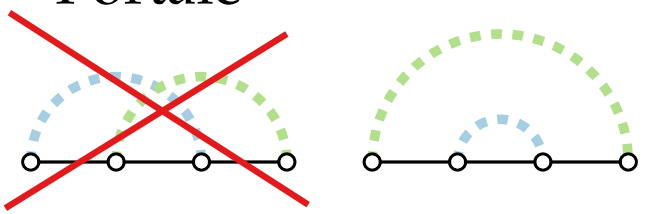
Dynamisches Programm (I)





Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

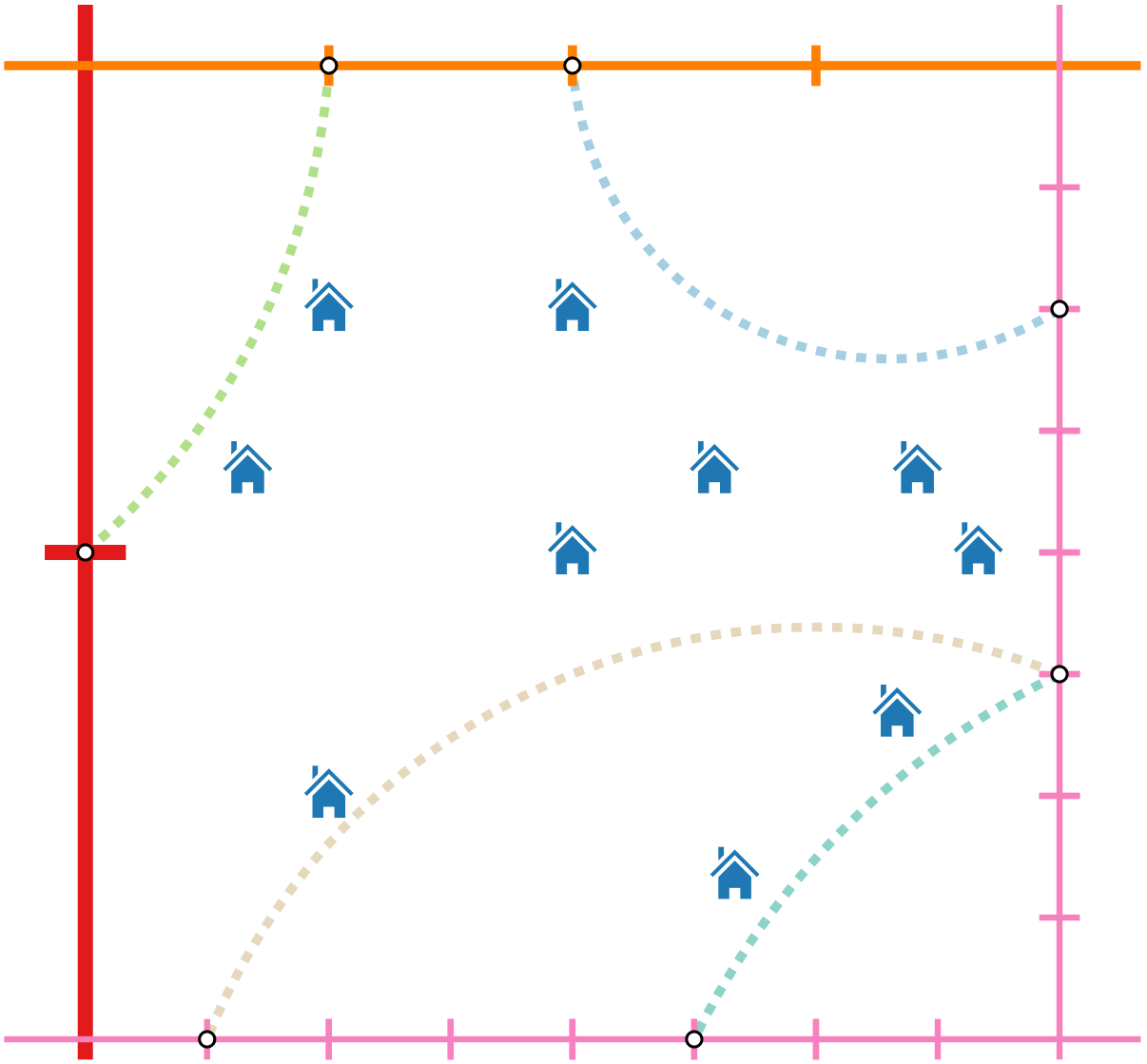
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

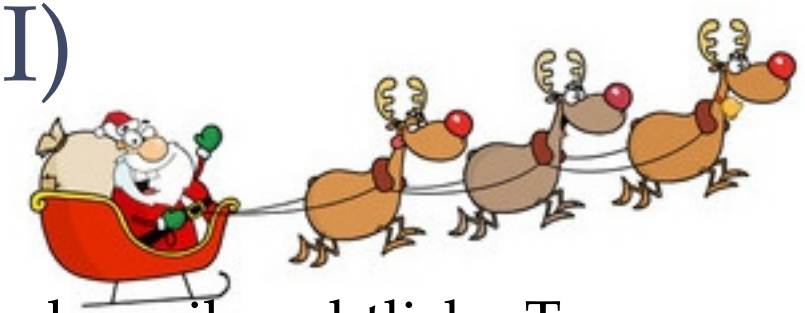


krf. Paarungen

$$\Rightarrow \text{max.} \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{\#Besuchsvektoren}} \times$$

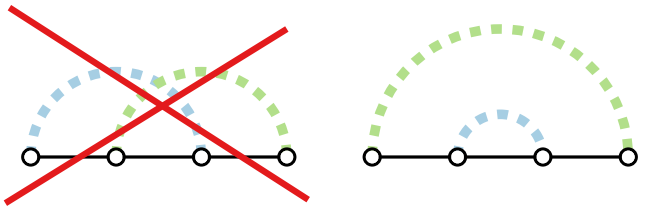
Dynamisches Programm (I)





Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

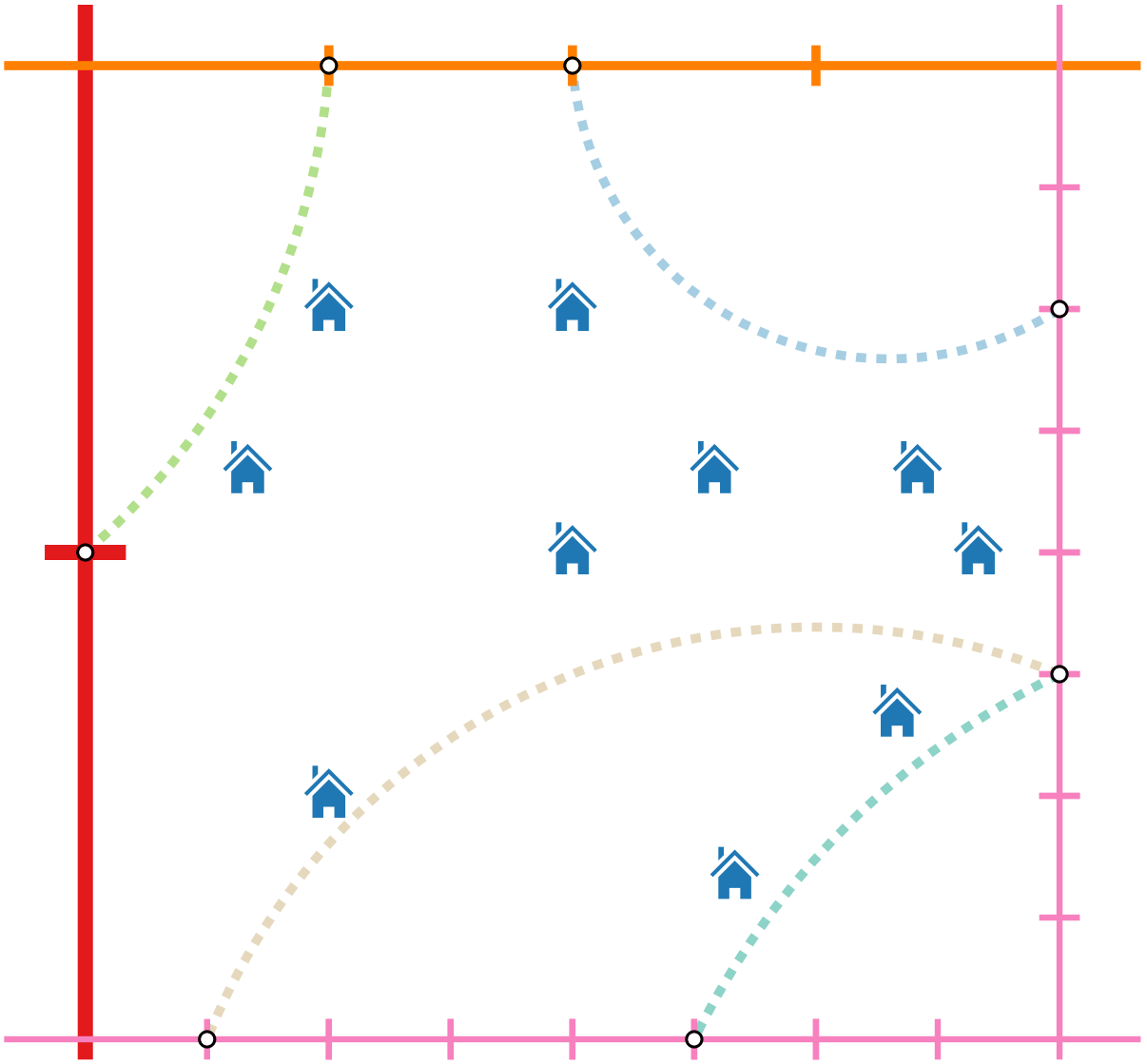
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

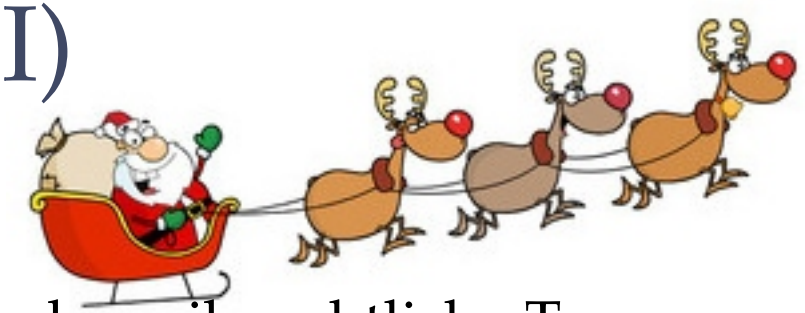


krf. Paarungen

$$\Rightarrow \text{max.} \underbrace{\qquad\qquad}_{\#\text{Besuchsvektoren}} \times \underbrace{\qquad\qquad}_{\#\text{real. Paarungen}}$$

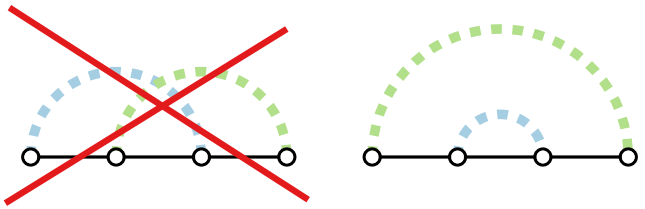
Dynamisches Programm (I)





Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

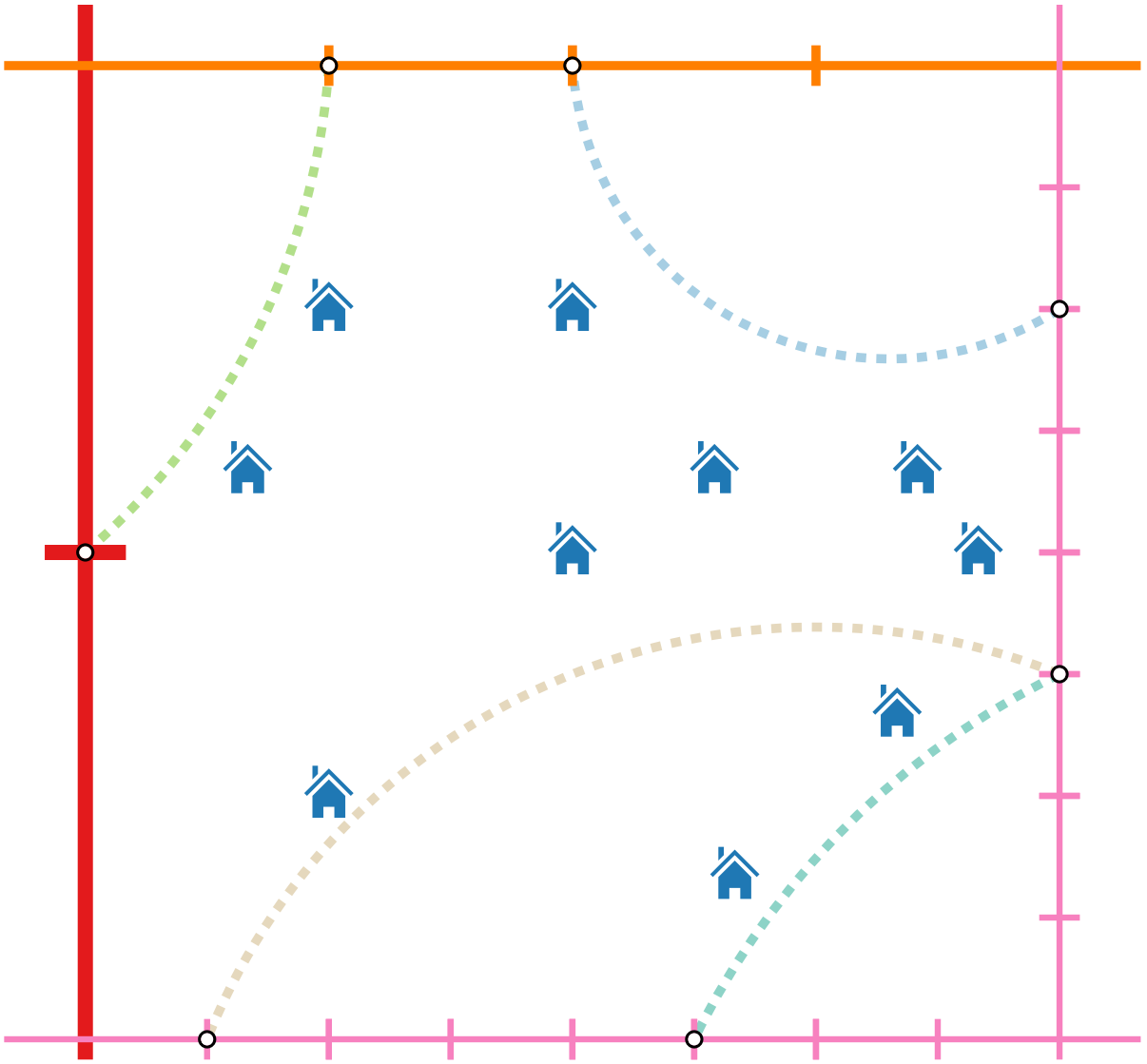
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

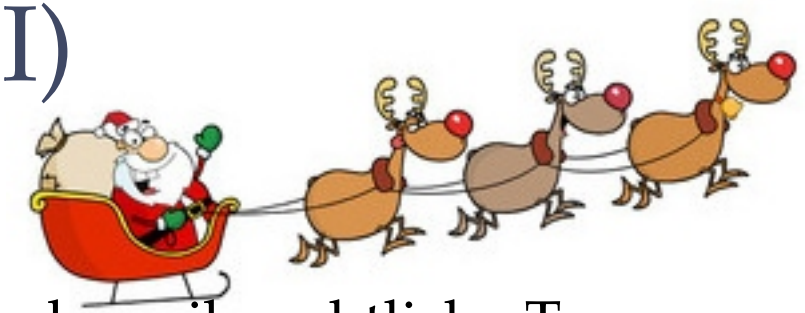


krf. Paarungen

$$\Rightarrow \text{max.} \quad \underbrace{n^{O(1/\varepsilon)}}_{\text{\#Besuchsvektoren}} \times \underbrace{\qquad}_{\text{\#real. Paarungen}}$$

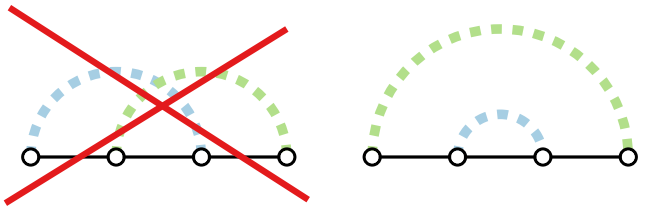
Dynamisches Programm (I)





Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

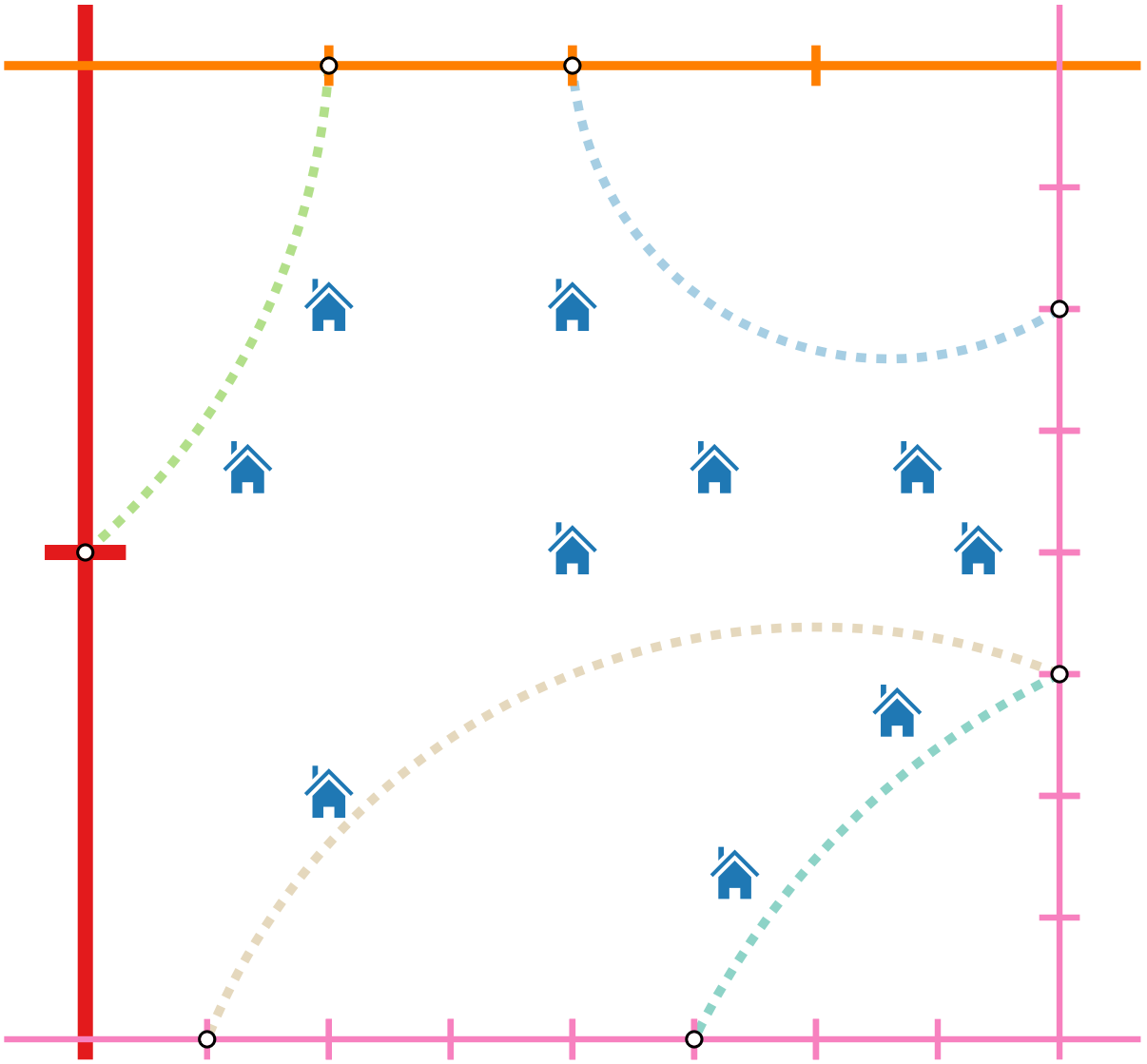
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale

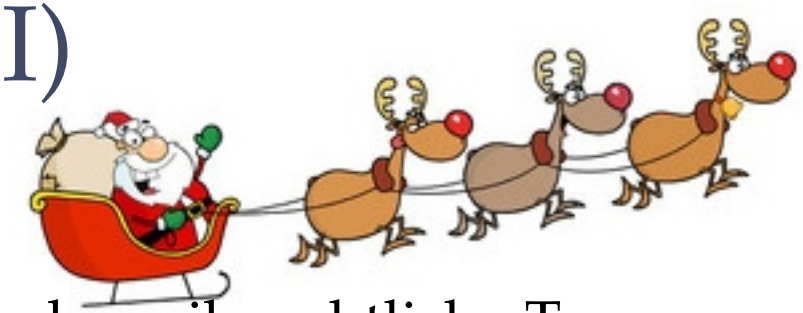


krf. Paarungen

$$\Rightarrow \text{max.} \quad \underbrace{n^{O(1/\varepsilon)}}_{\text{\#Besuchsvektoren}} \times \underbrace{2^{O(m)}}_{\text{\#real. Paarungen}}$$

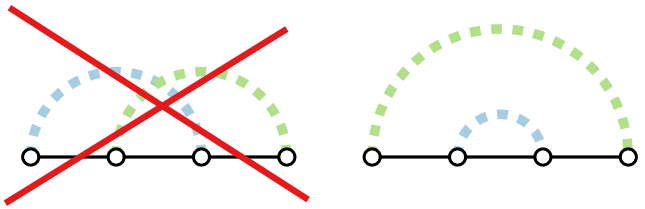
Dynamisches Programm (I)





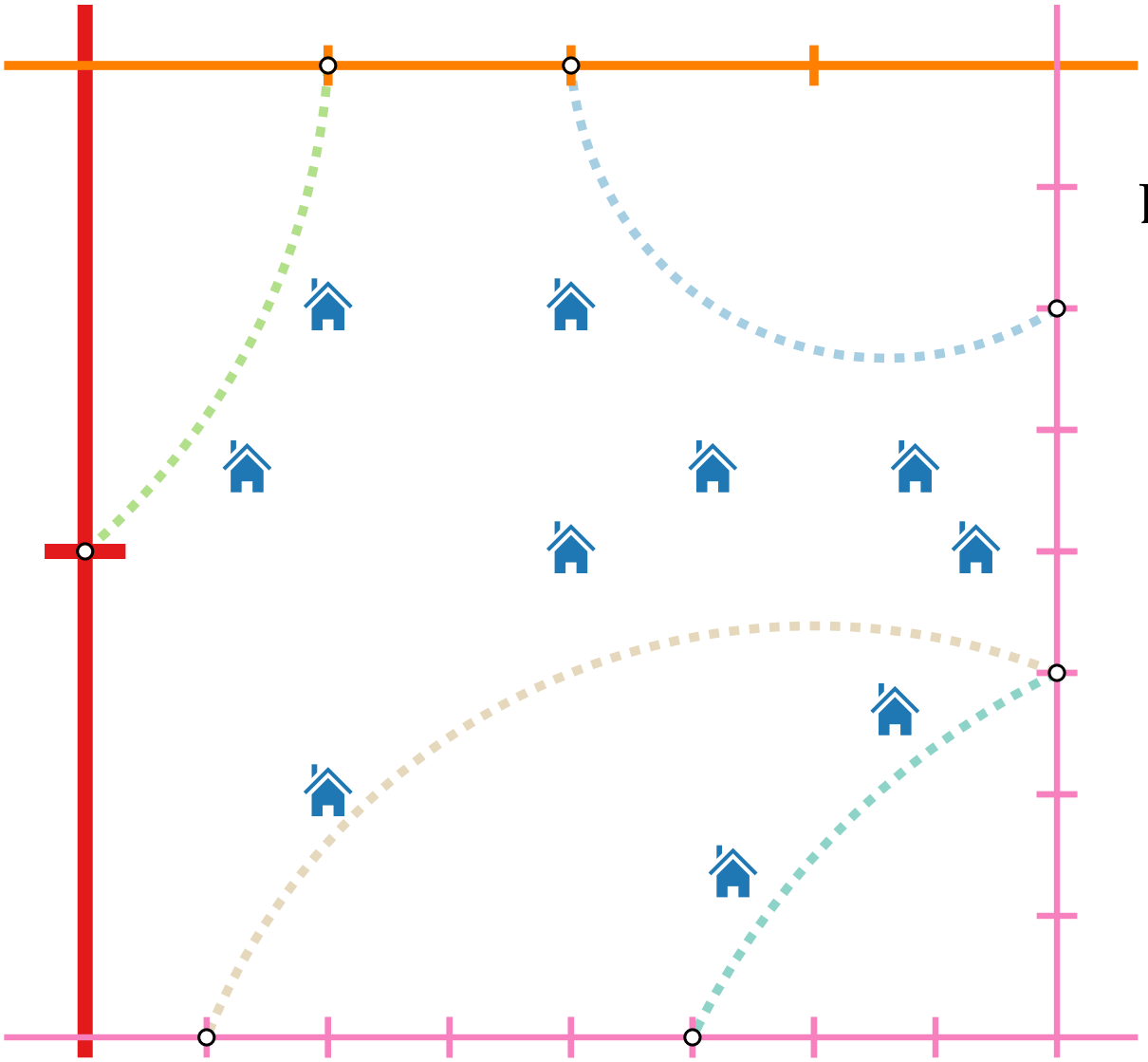
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale



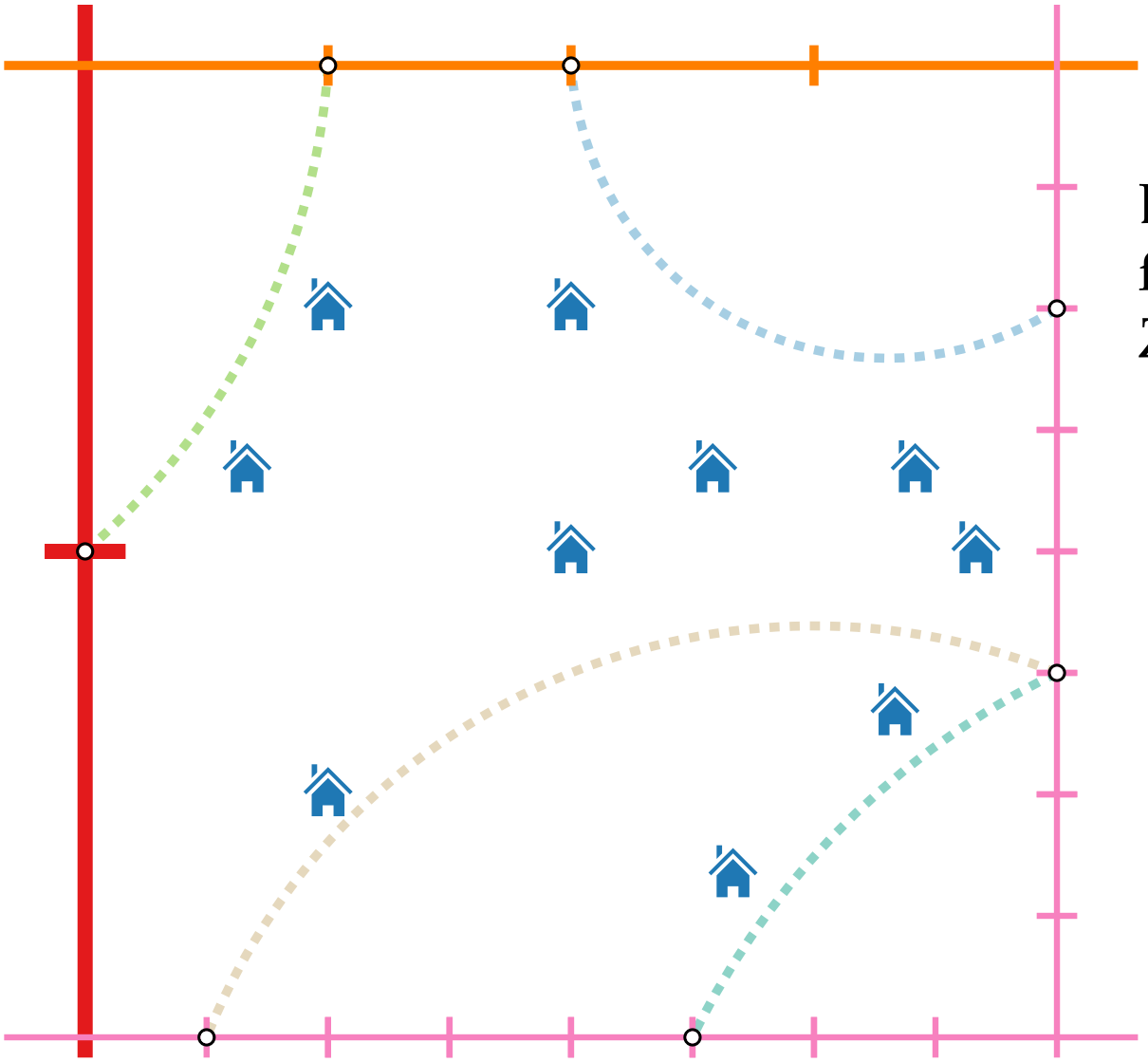
$$\Rightarrow \text{max.} \quad \underbrace{n^{O(1/\varepsilon)}}_{\text{\#Besuchsvektoren}} \times \underbrace{2^{O(m)}}_{\text{\#real. Paarungen}} = n^{O(1/\varepsilon)} \text{ krf. Paarungen}$$

Dynamisches Programm (II)



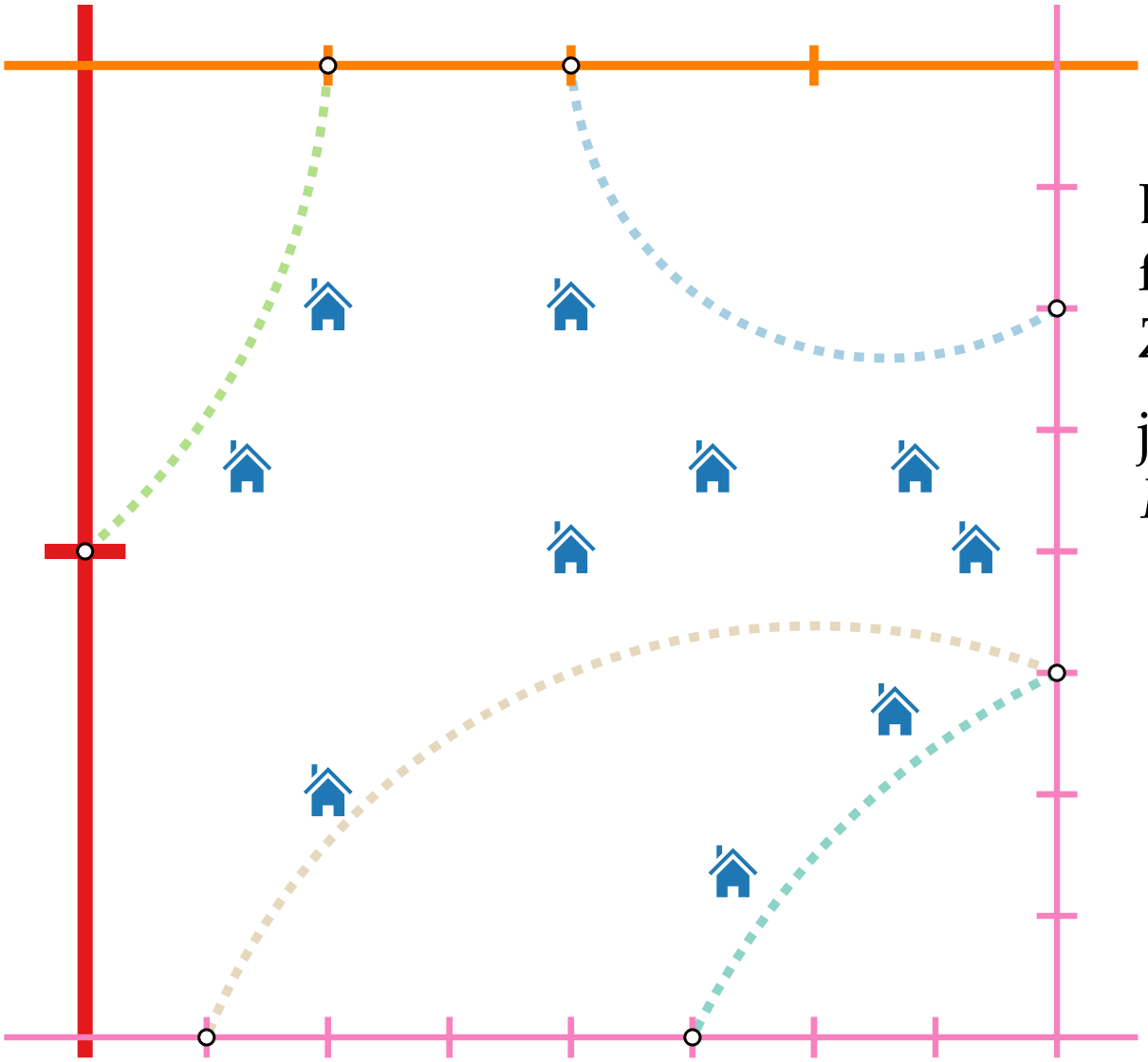
Berechne:

Dynamisches Programm (II)



Berechne:
für jedes Quadrat Q im Zerlegungsbaum und

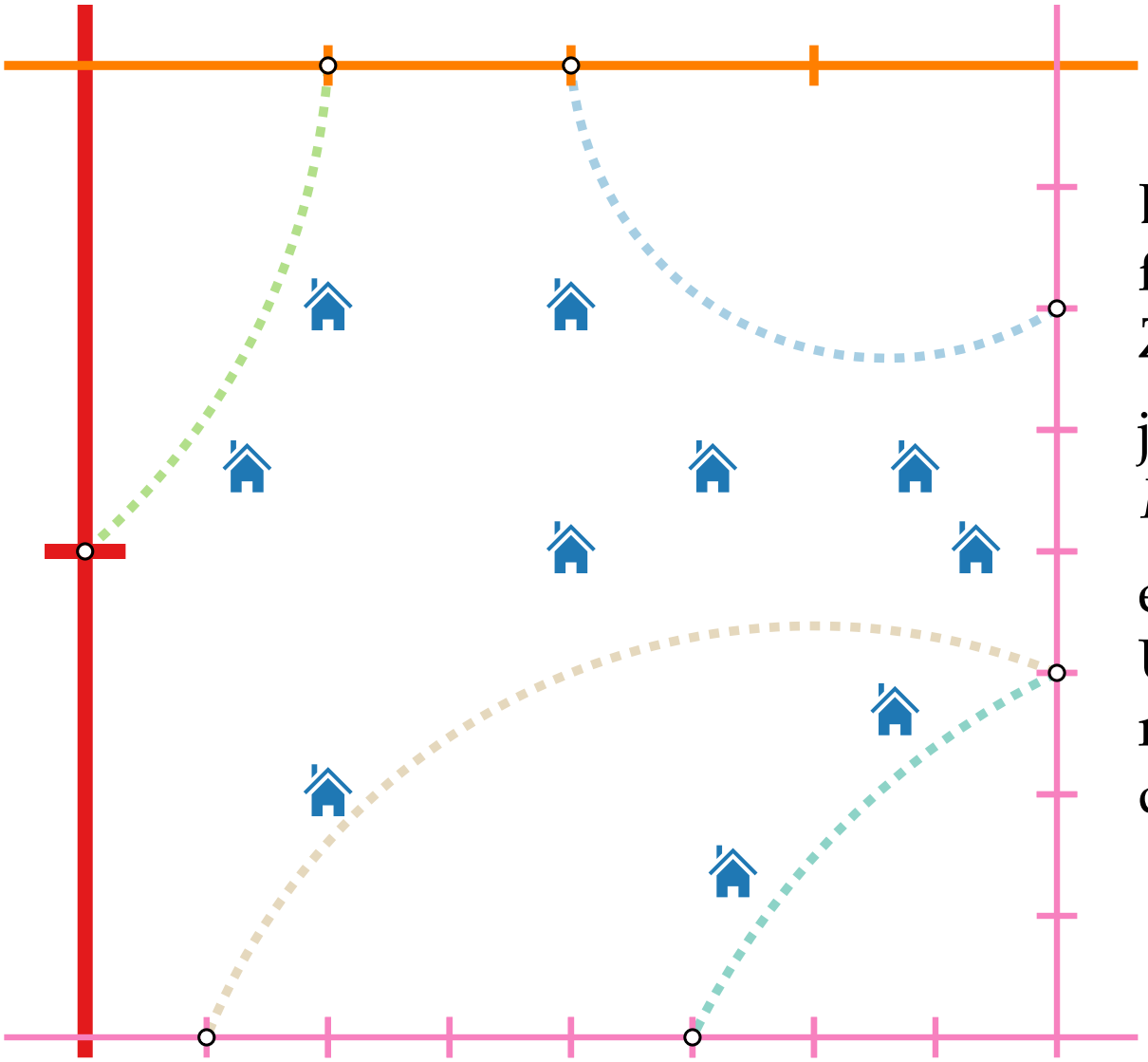
Dynamisches Programm (II)



Berechne:
für jedes Quadrat Q im Zerlegungsbaum und

jede kreuzungsfreie Paarung P für Q

Dynamisches Programm (II)

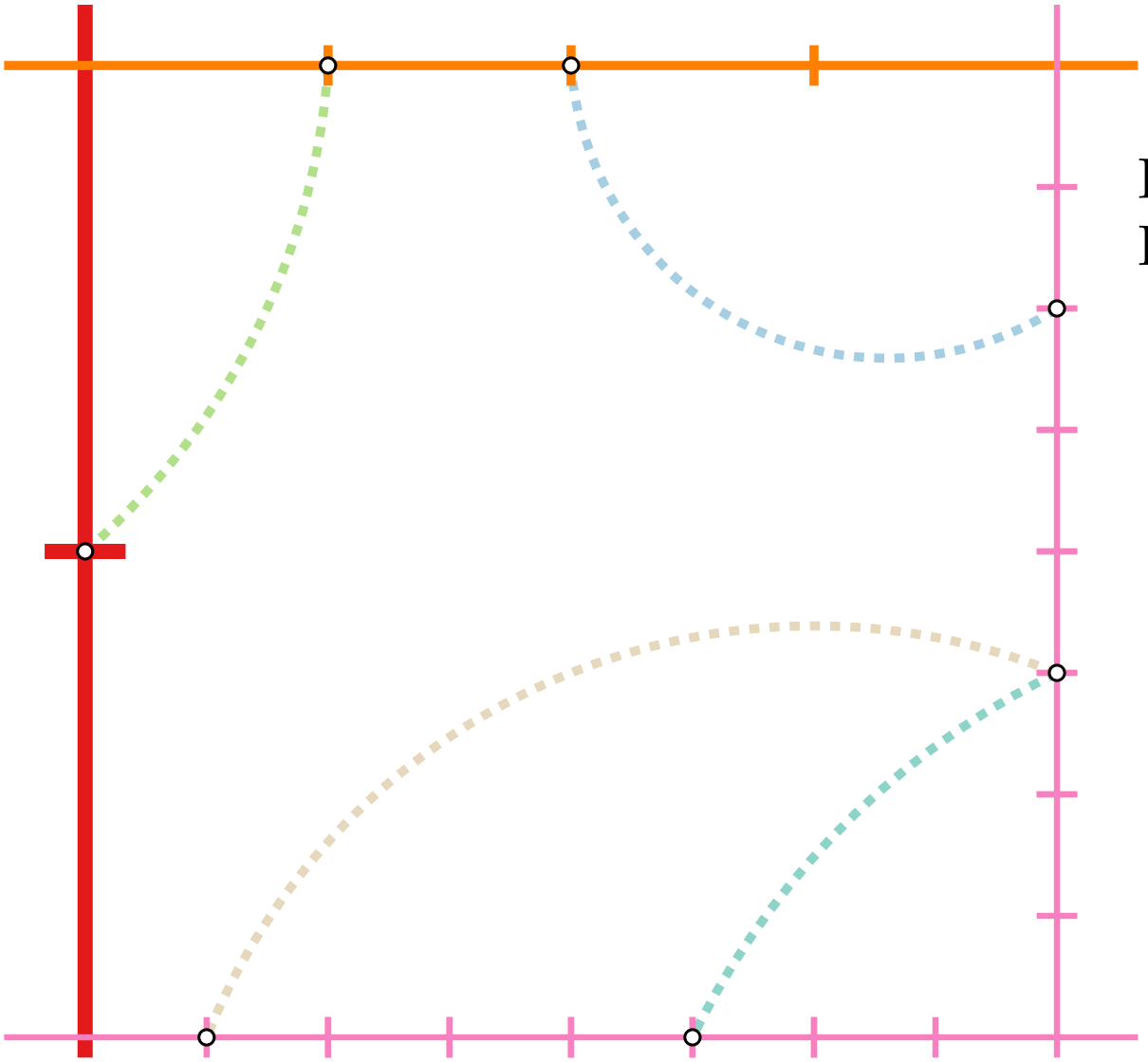


Berechne:
für jedes Quadrat Q im Zerlegungsbaum und

jede kreuzungsfreie Paarung P für Q

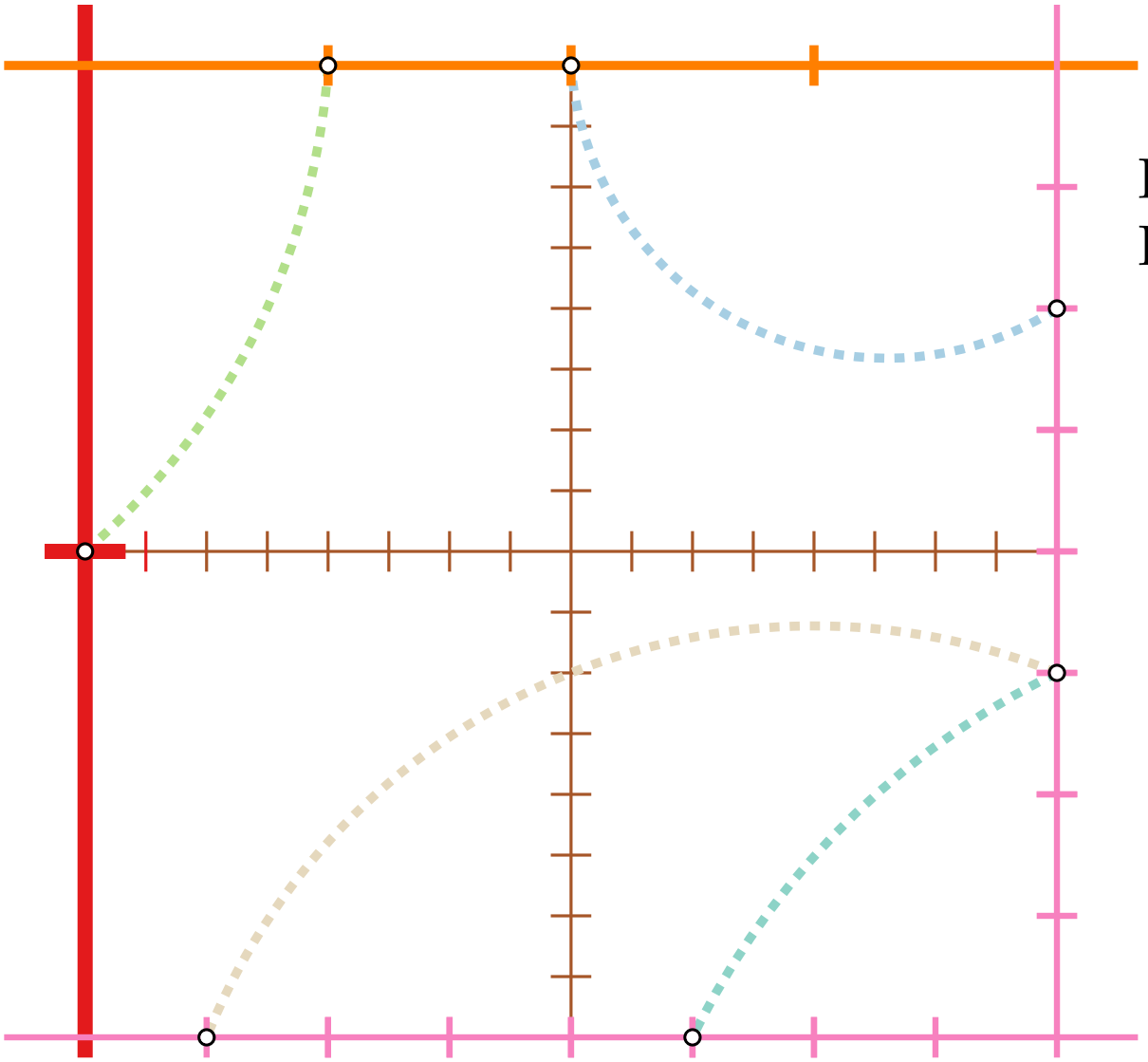
eine günstigste Überdeckung der Häuser mit weihnachtlichen Pfaden, die P respektiert.

Dynamisches Programm (III)



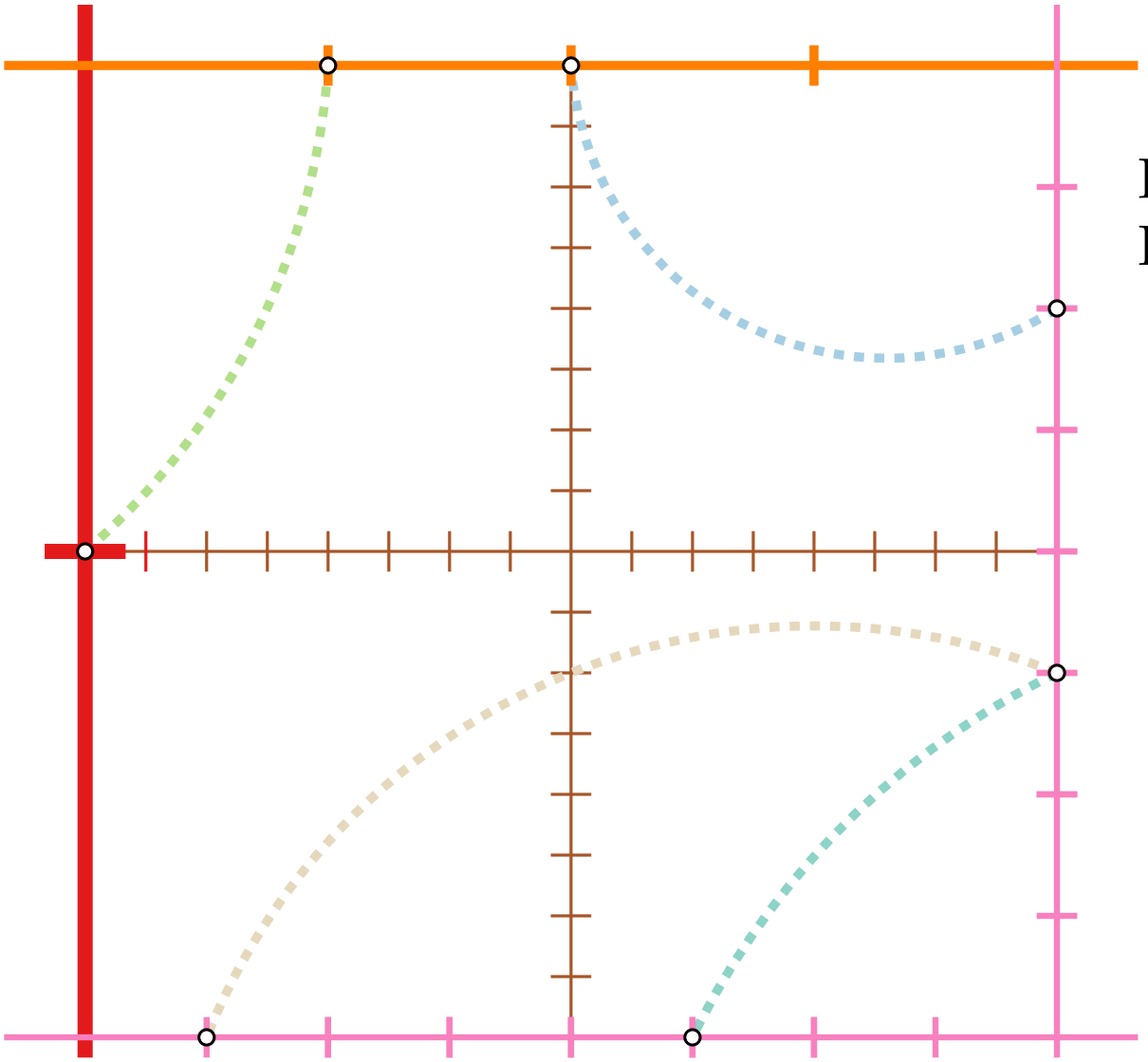
Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

Dynamisches Programm (III)



Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

Dynamisches Programm (III)

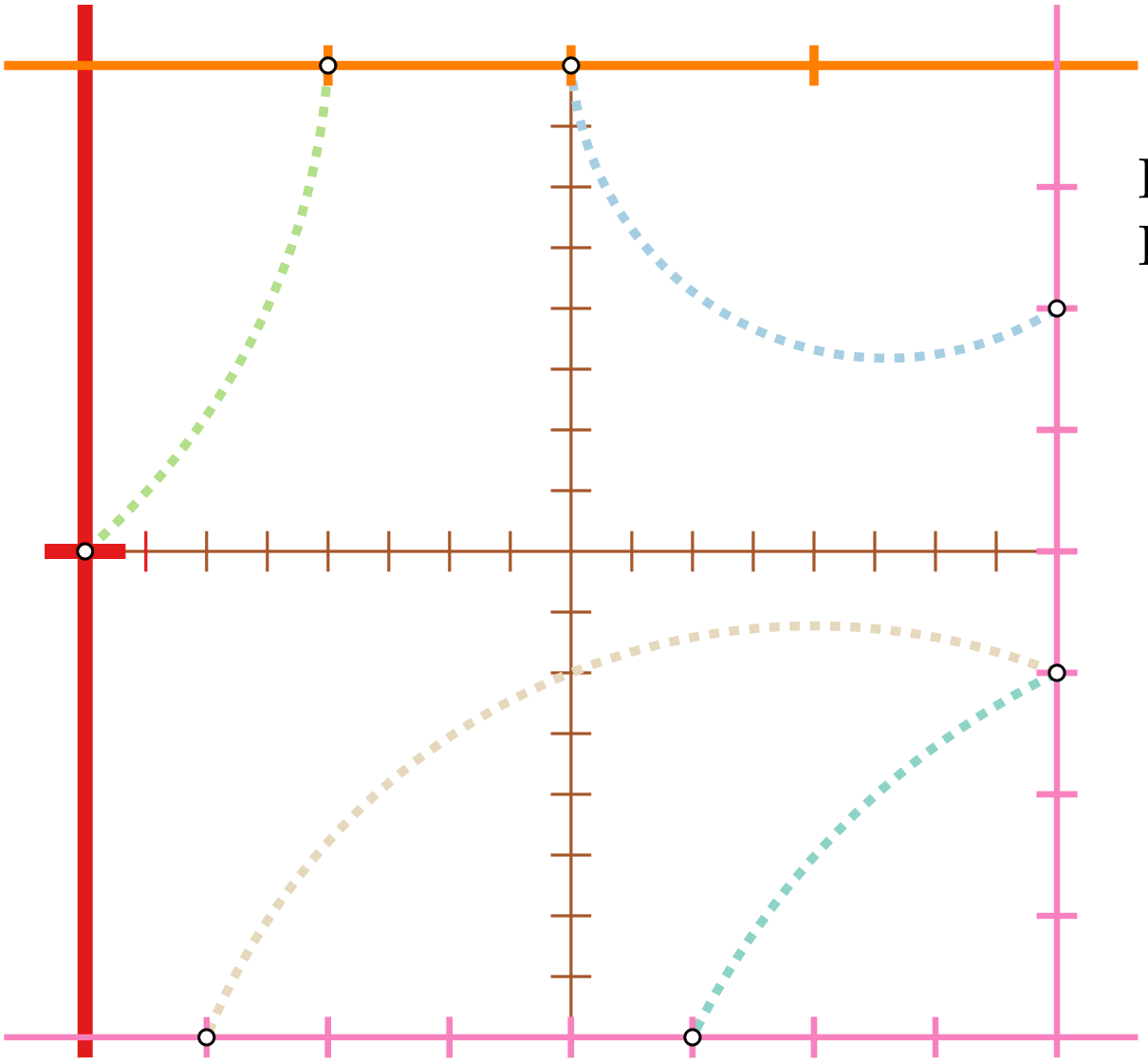


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle

  kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate

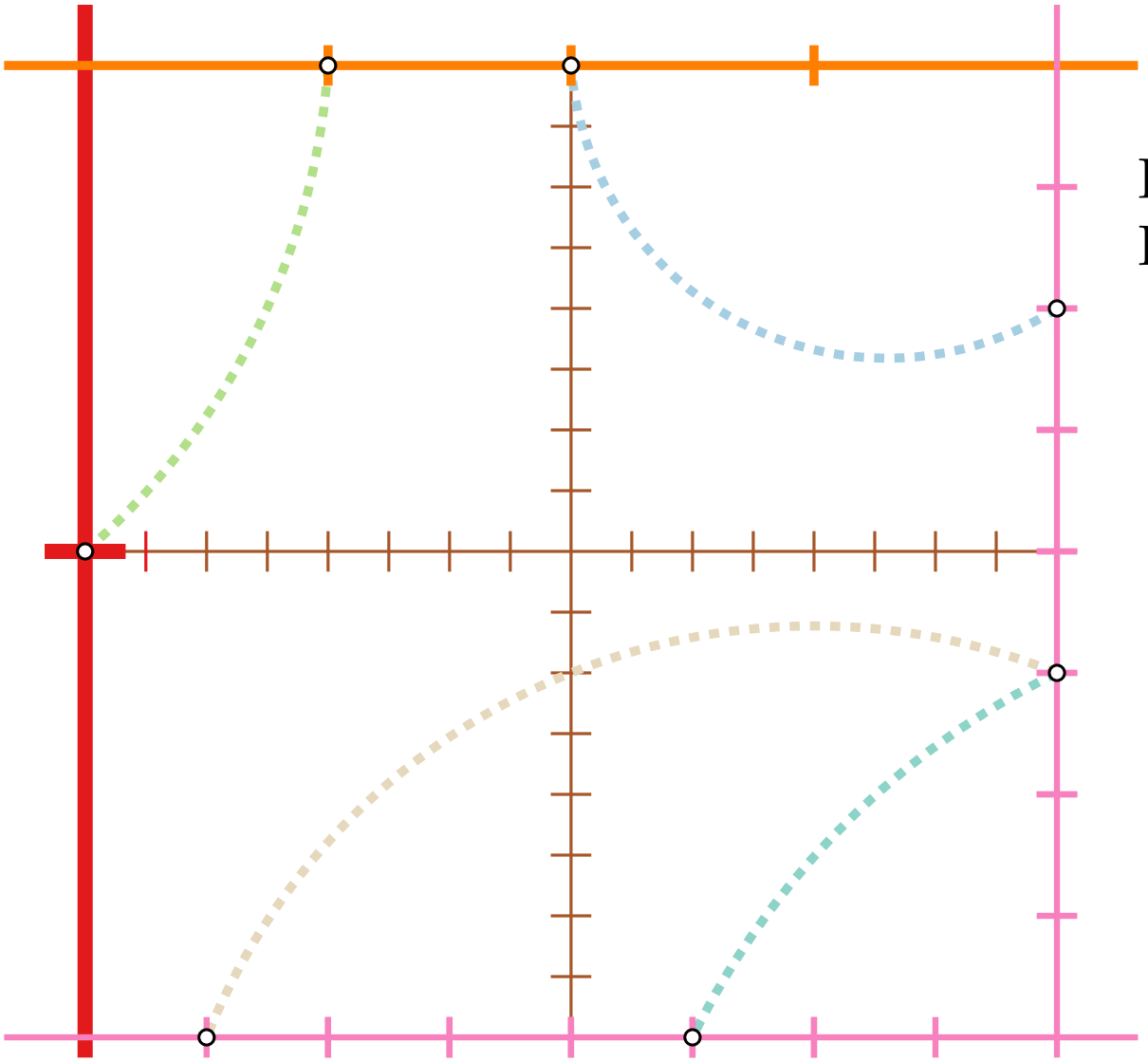
Dynamisches Programm (III)



Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 =$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate

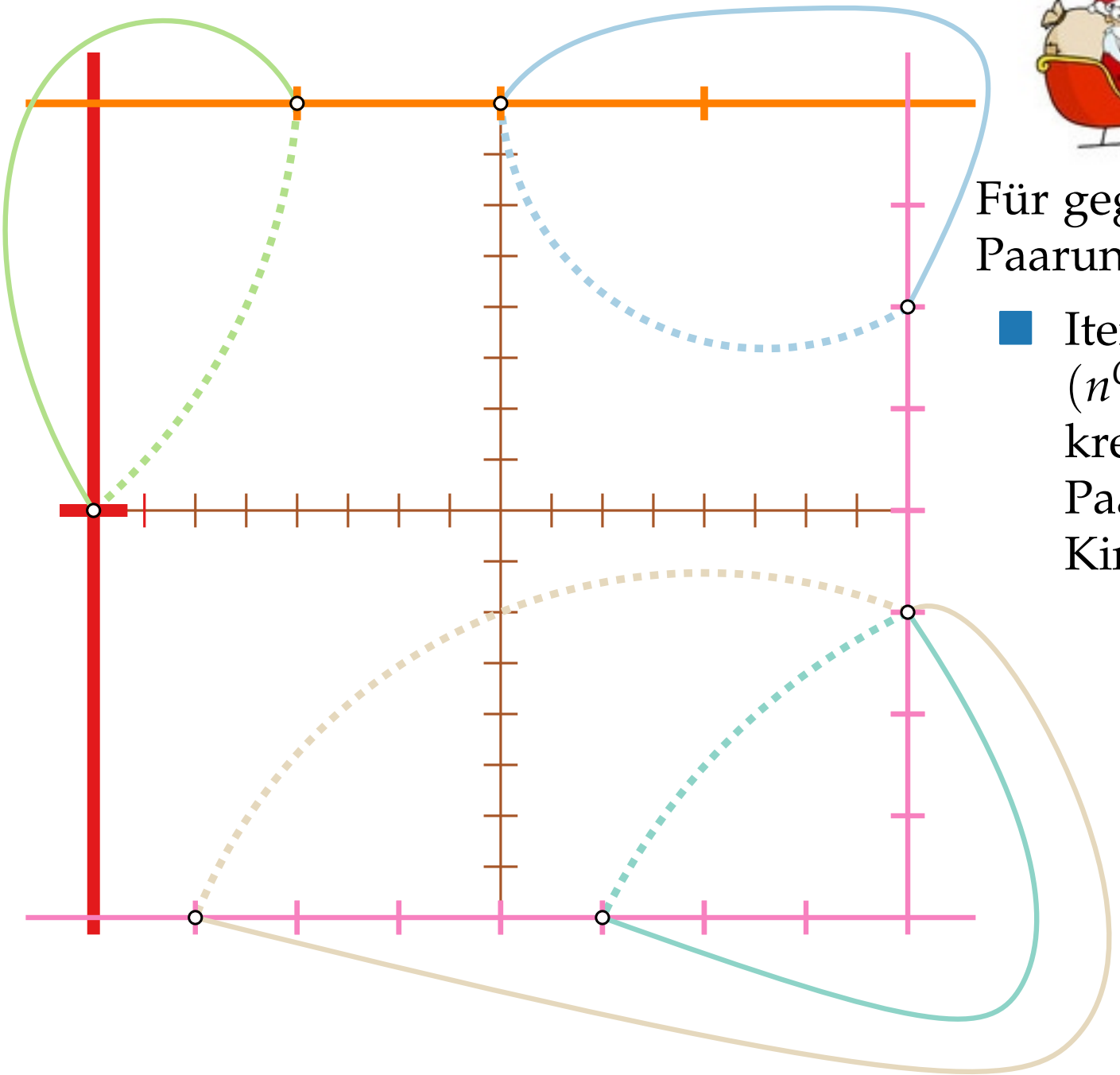
Dynamisches Programm (III)



Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate

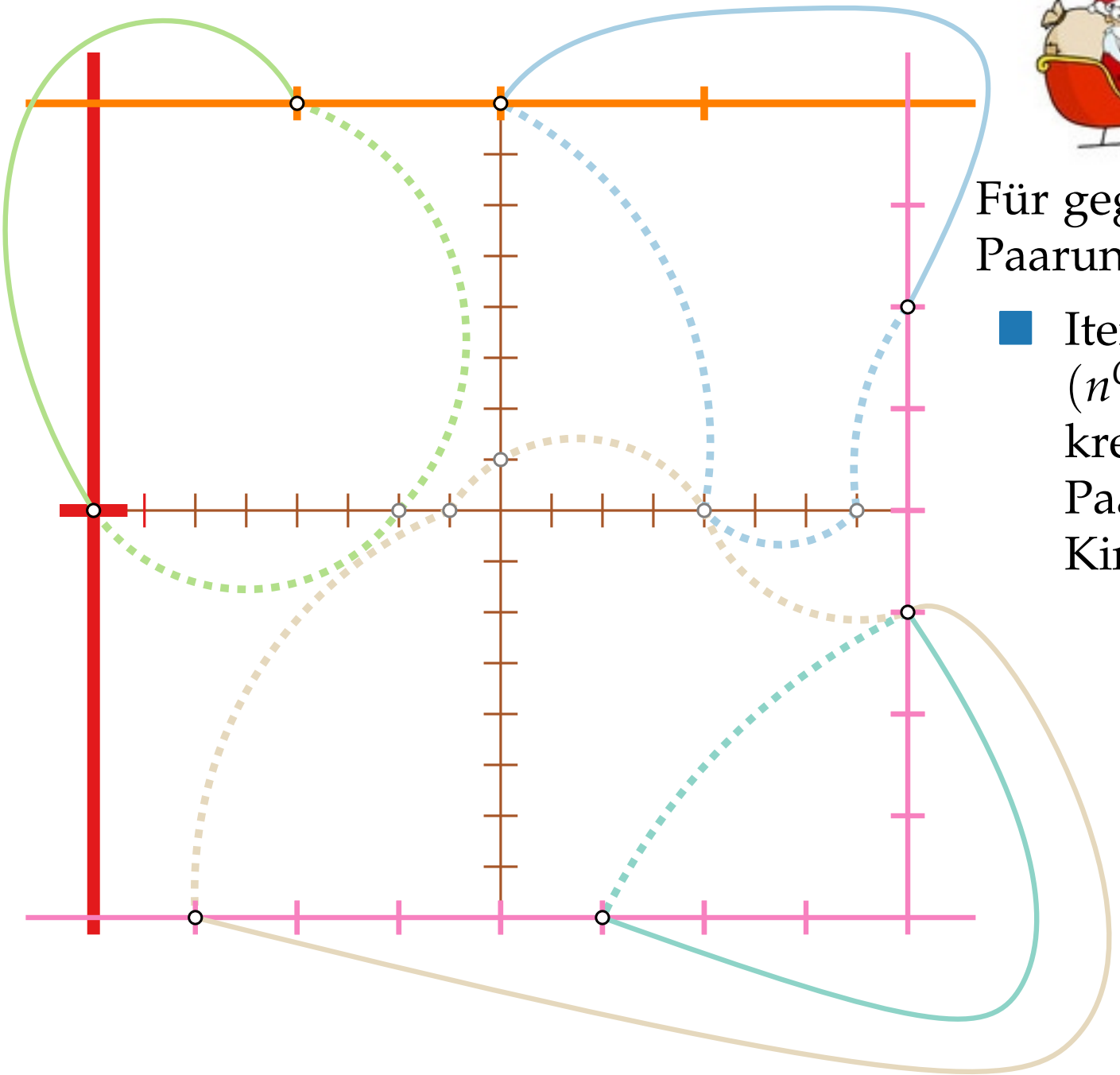
Dynamisches Programm (III)



Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate

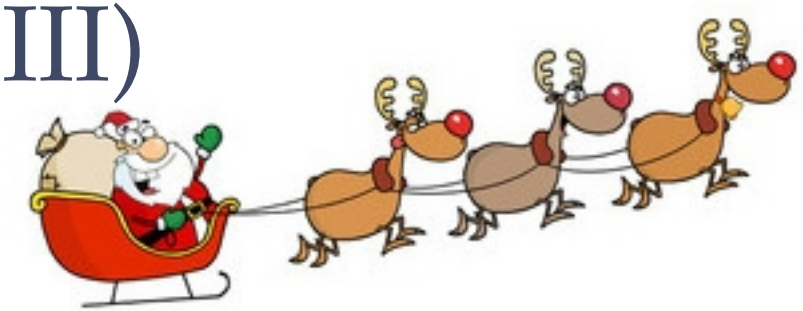
Dynamisches Programm (III)

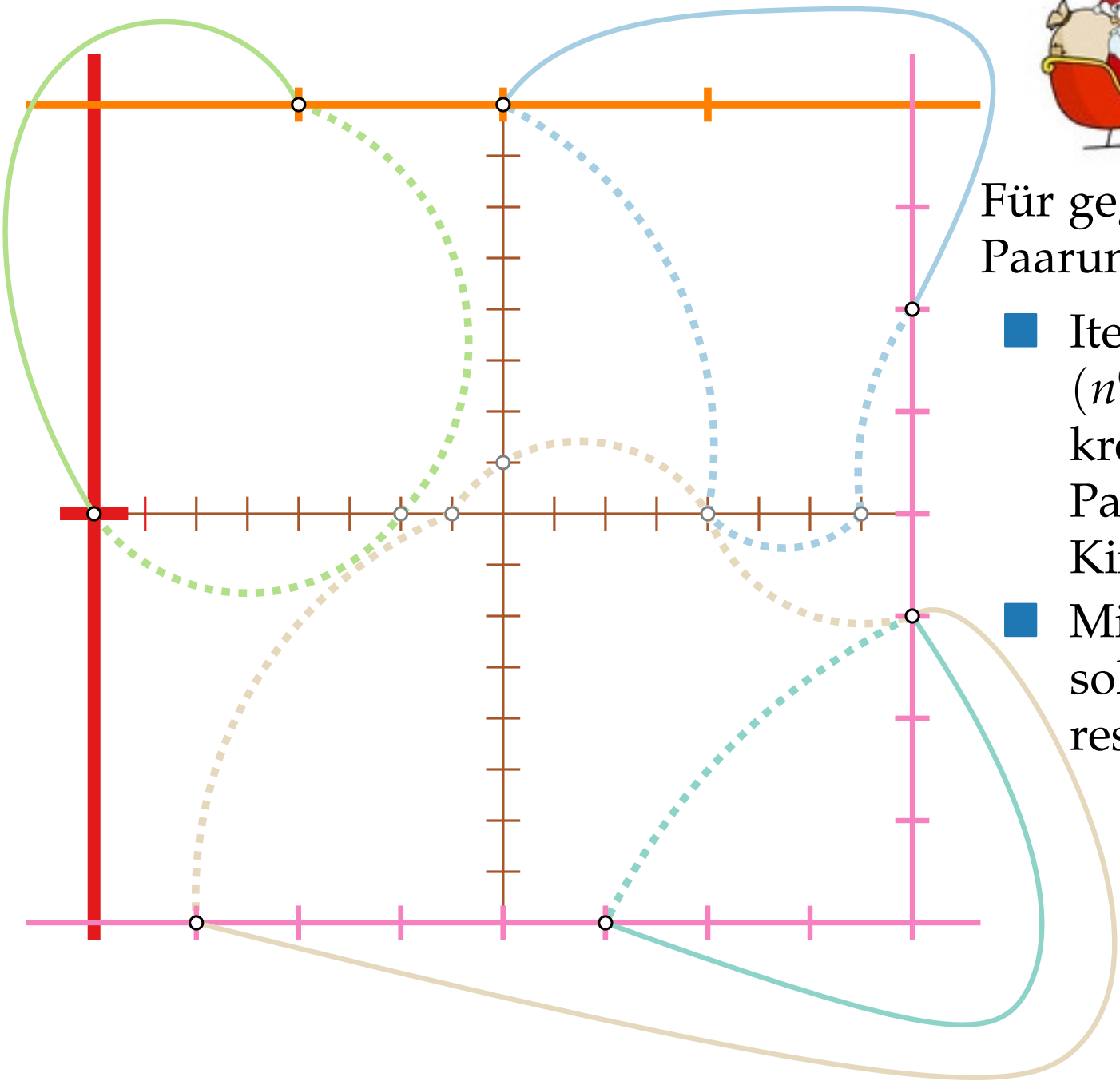


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate

Dynamisches Programm (III)

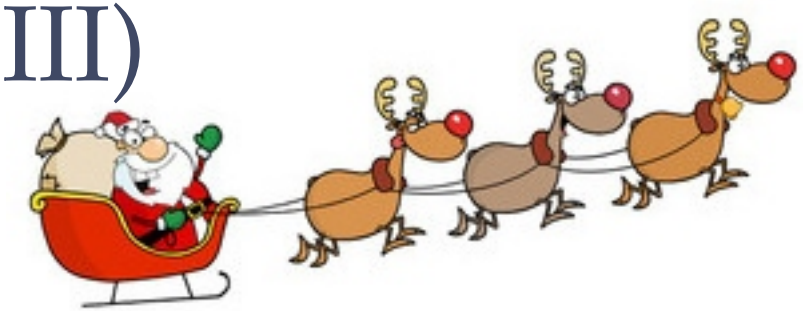


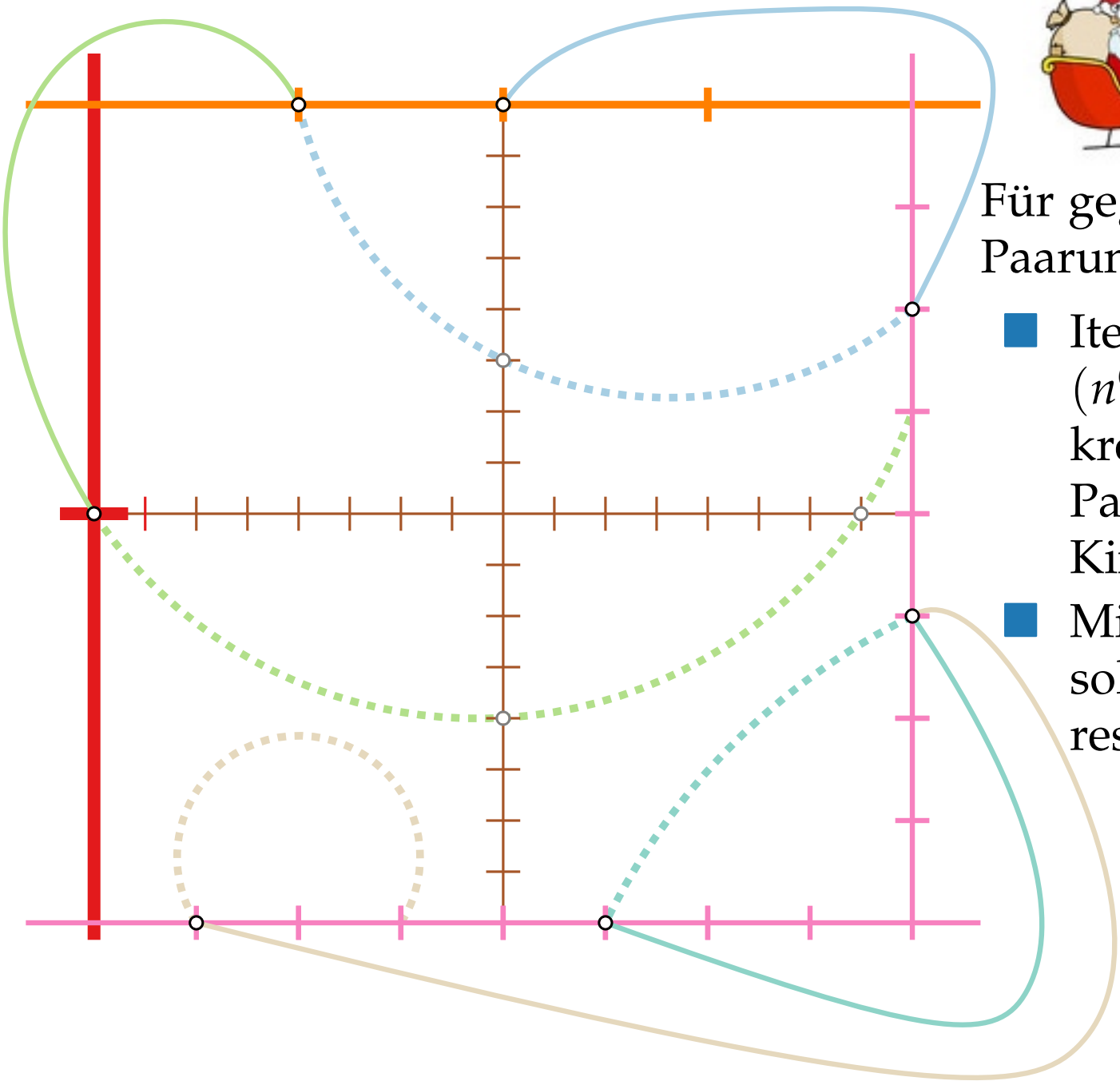


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren

Dynamisches Programm (III)

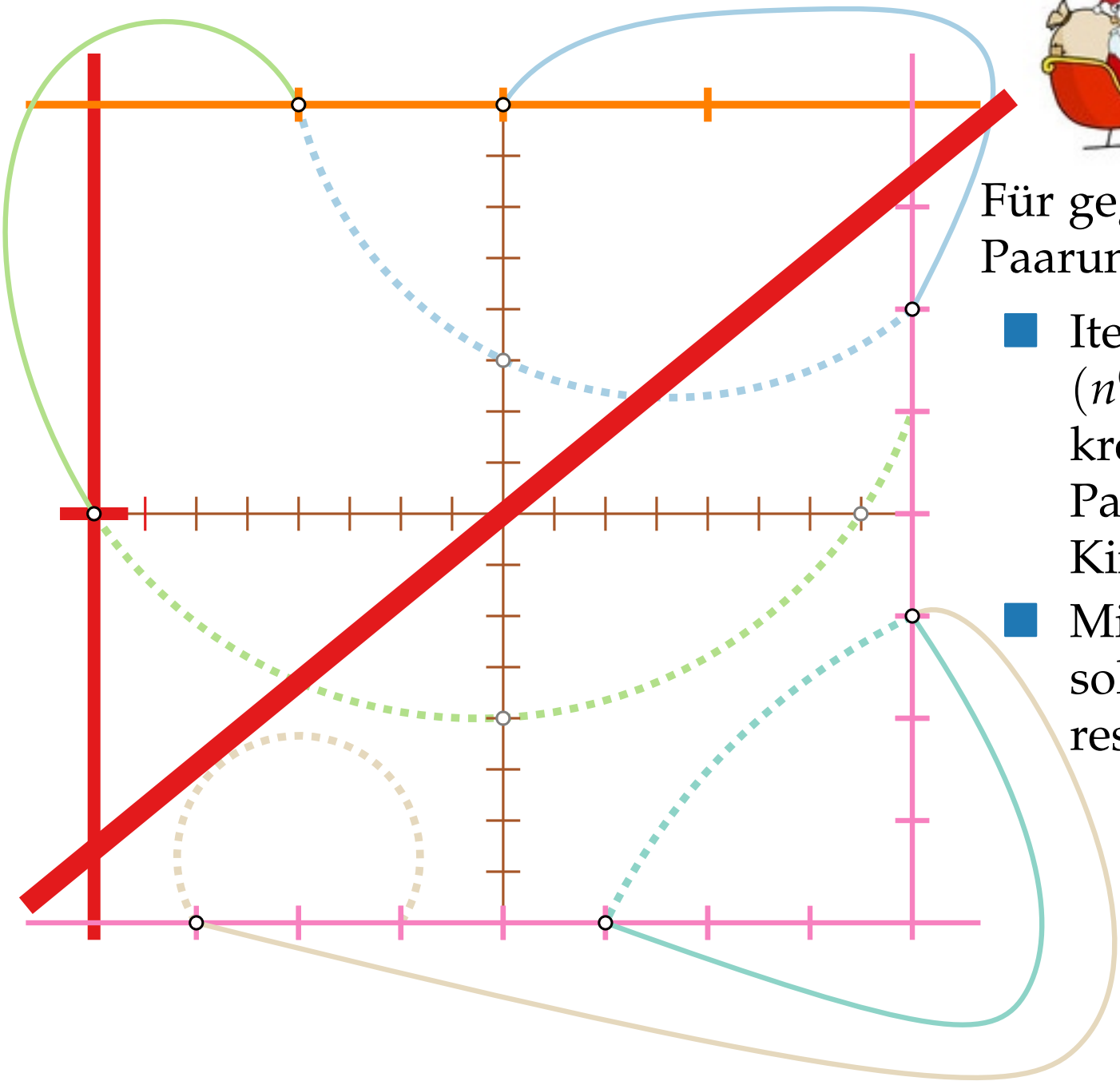


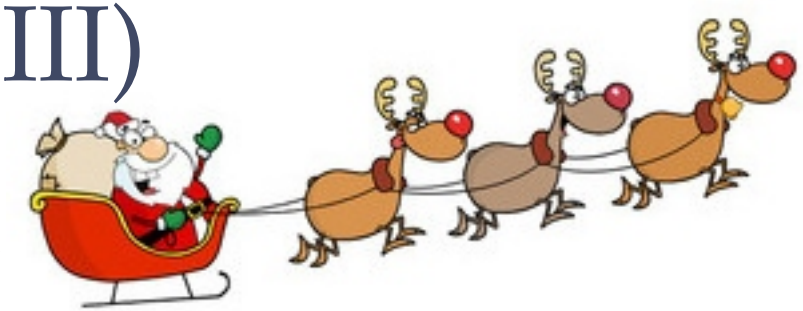


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren

Dynamisches Programm (III)

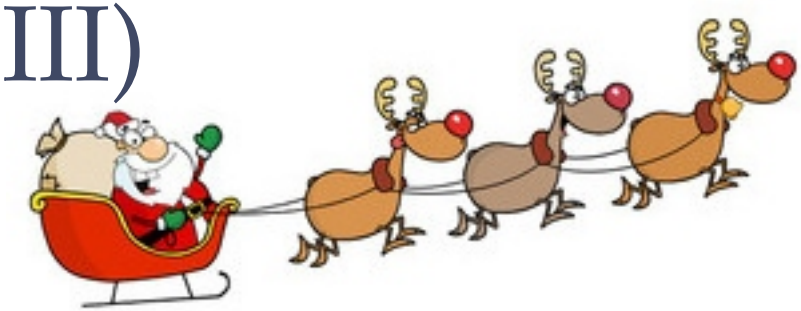


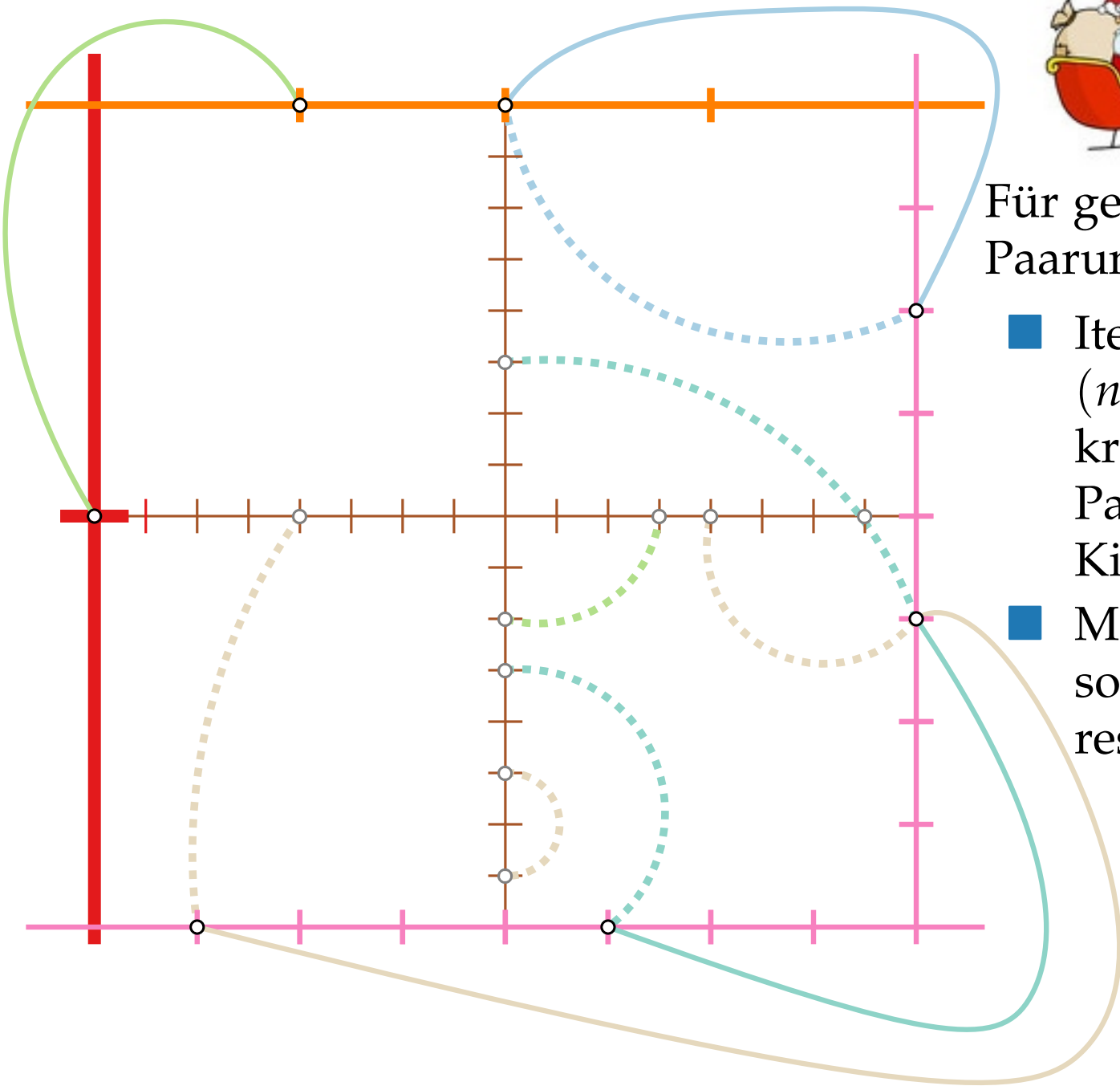


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren

Dynamisches Programm (III)

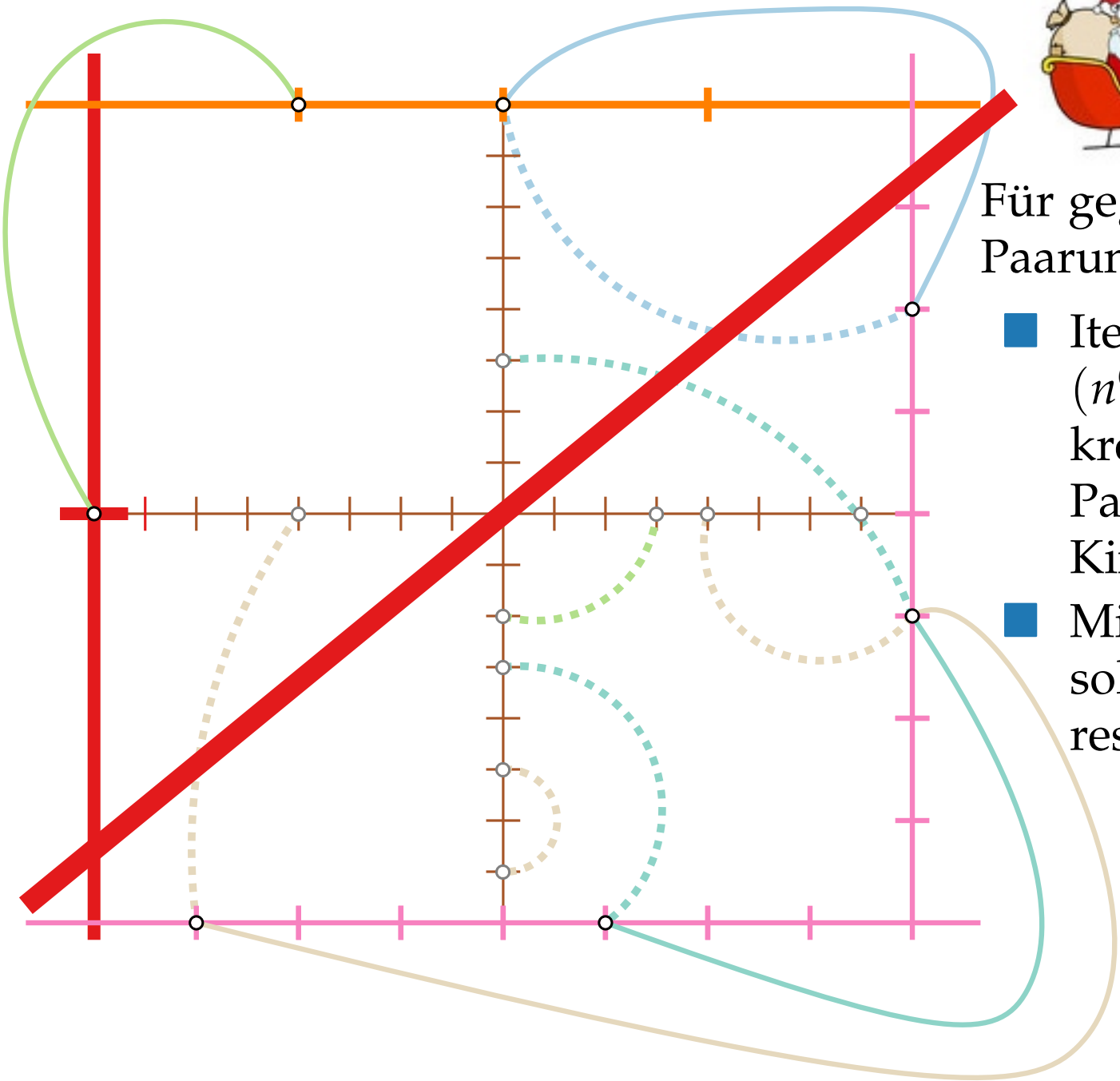


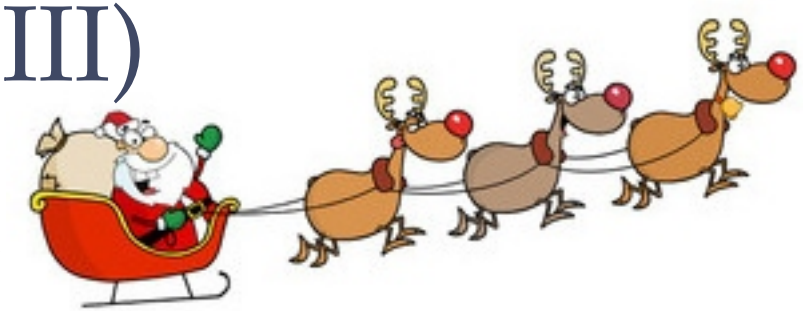


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren

Dynamisches Programm (III)

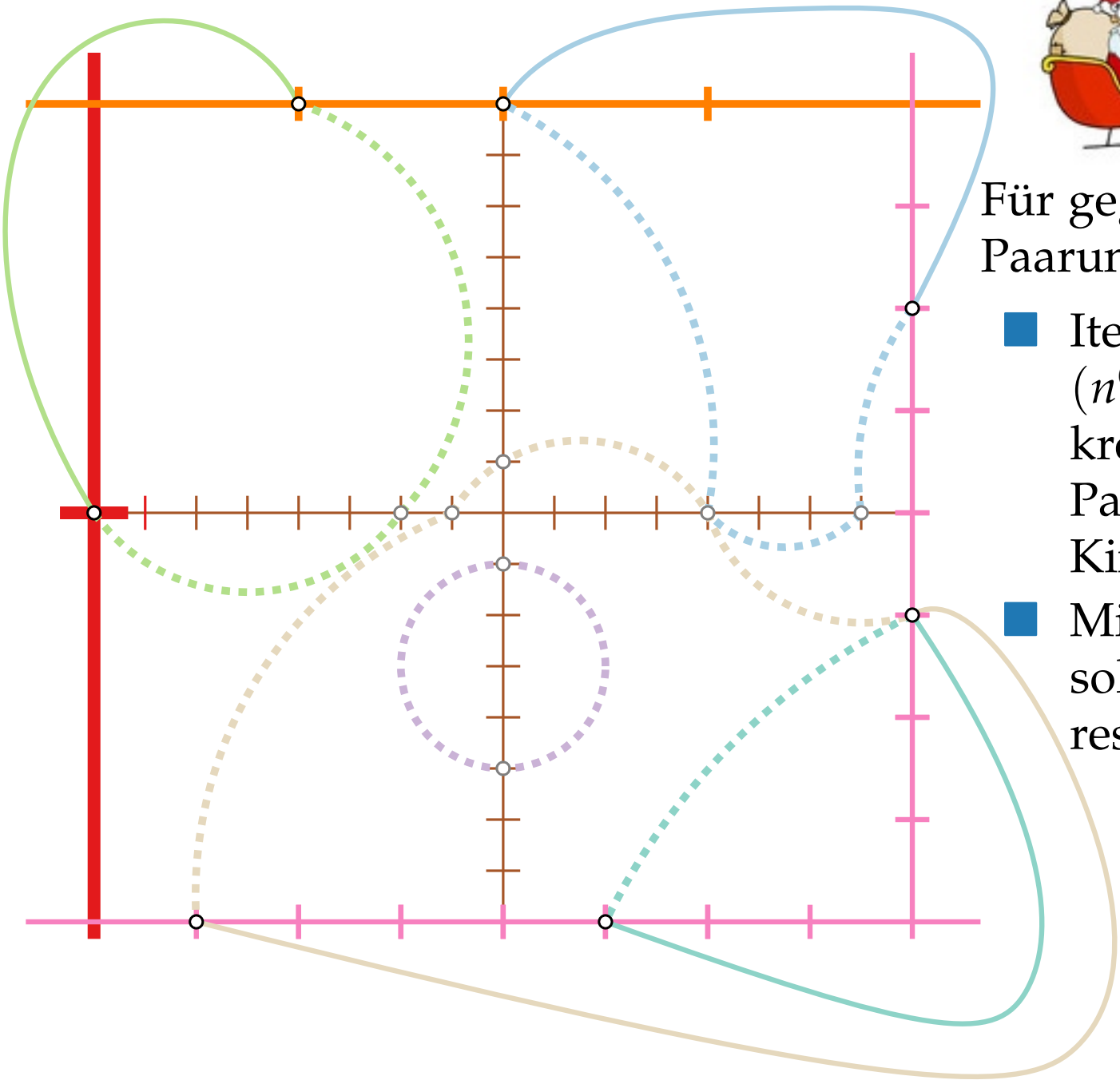


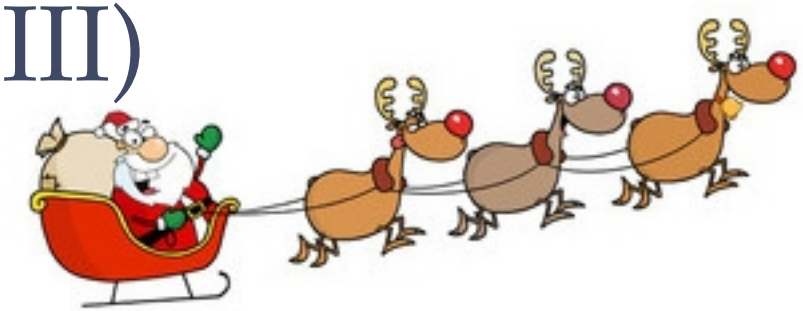


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren

Dynamisches Programm (III)

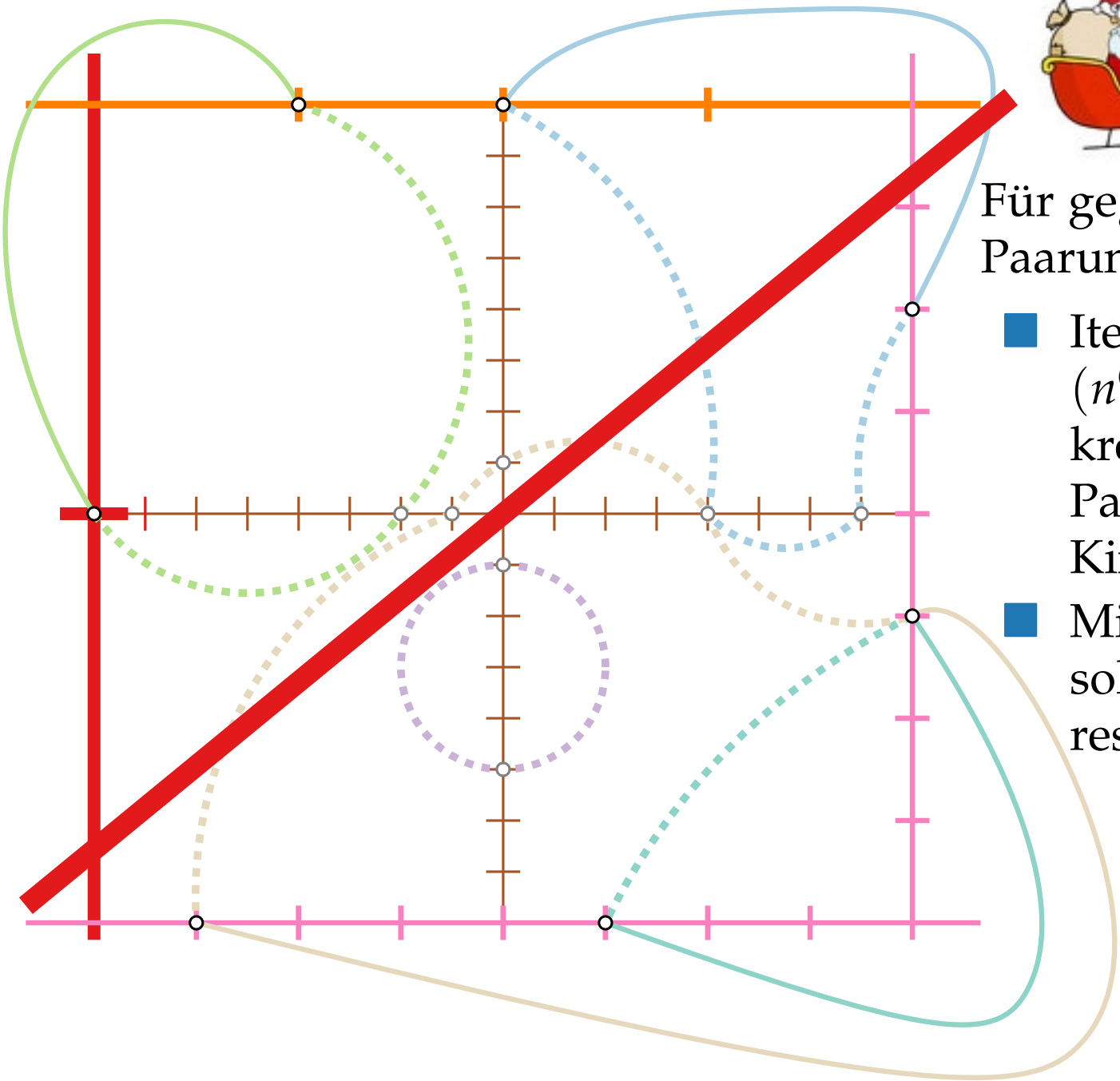


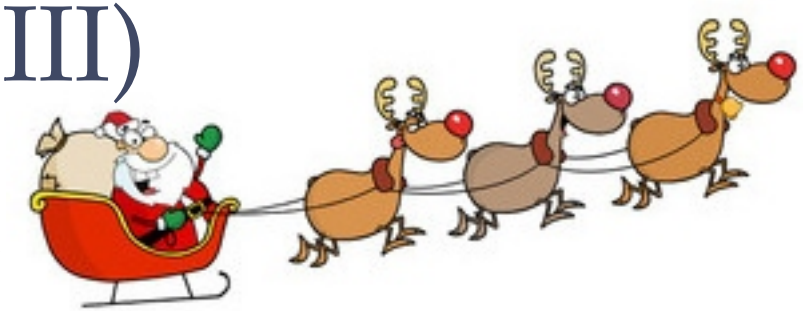


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren

Dynamisches Programm (III)

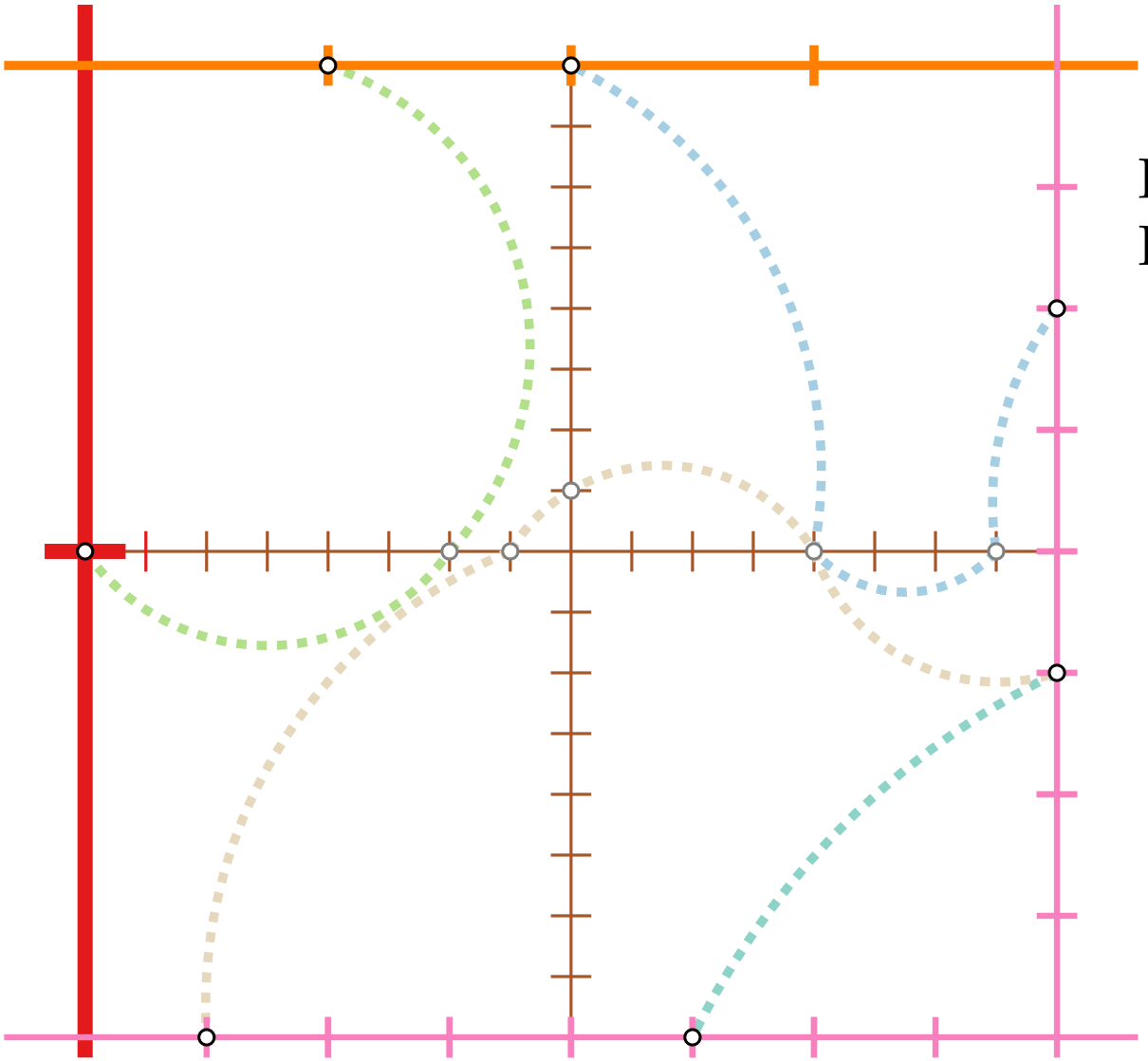




Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren

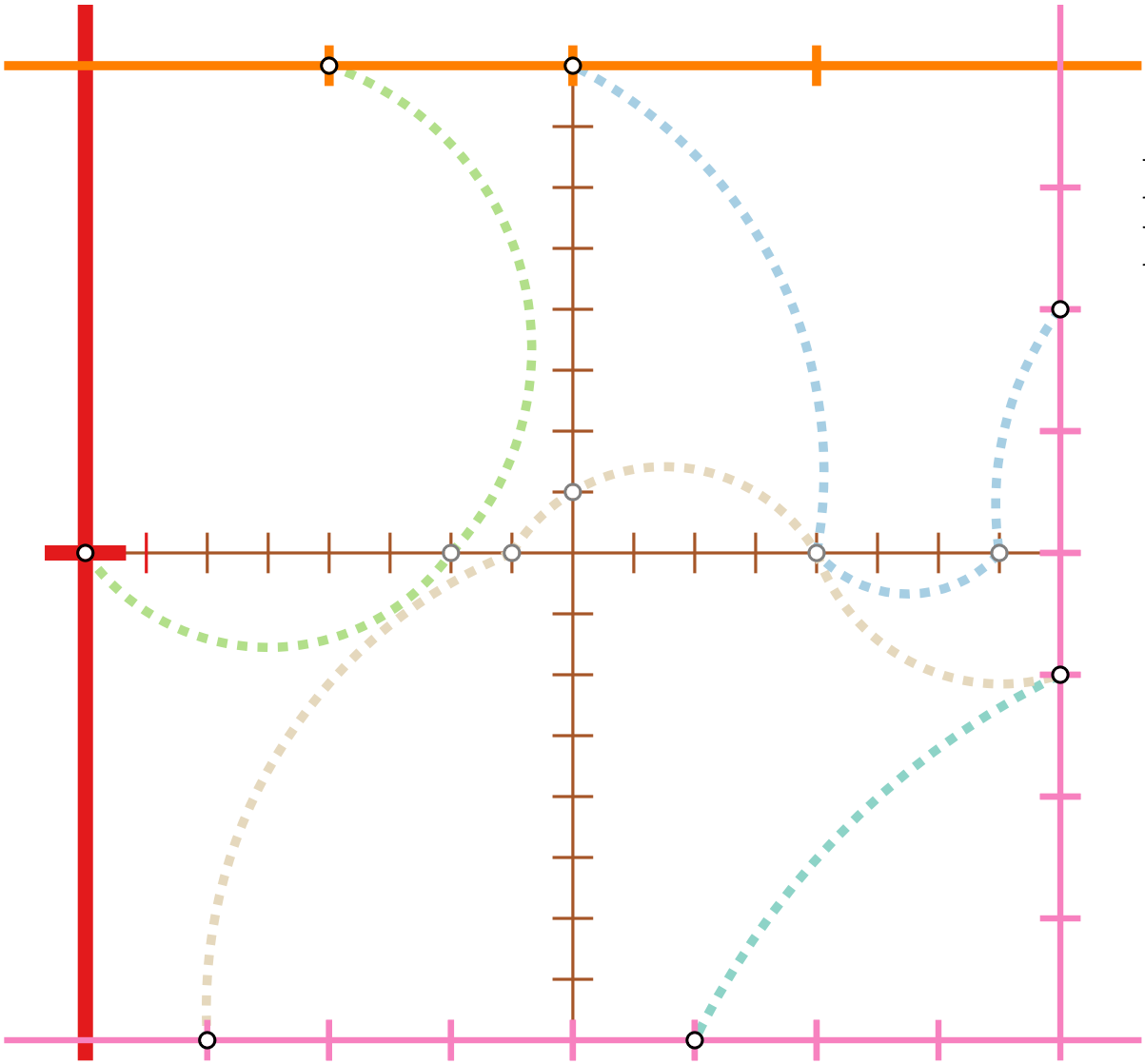
Dynamisches Programm (III)

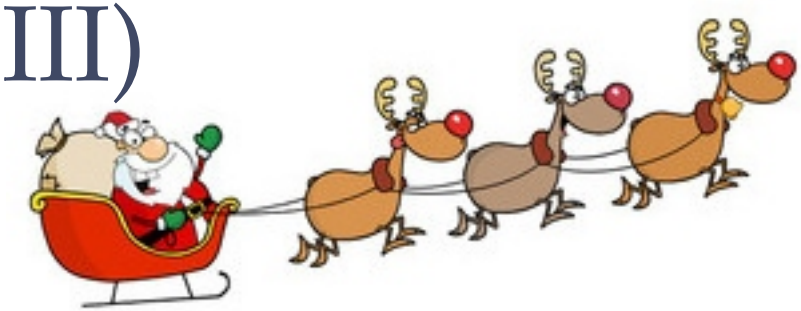


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren
- Korrektheit per Induktion

Dynamisches Programm (III)



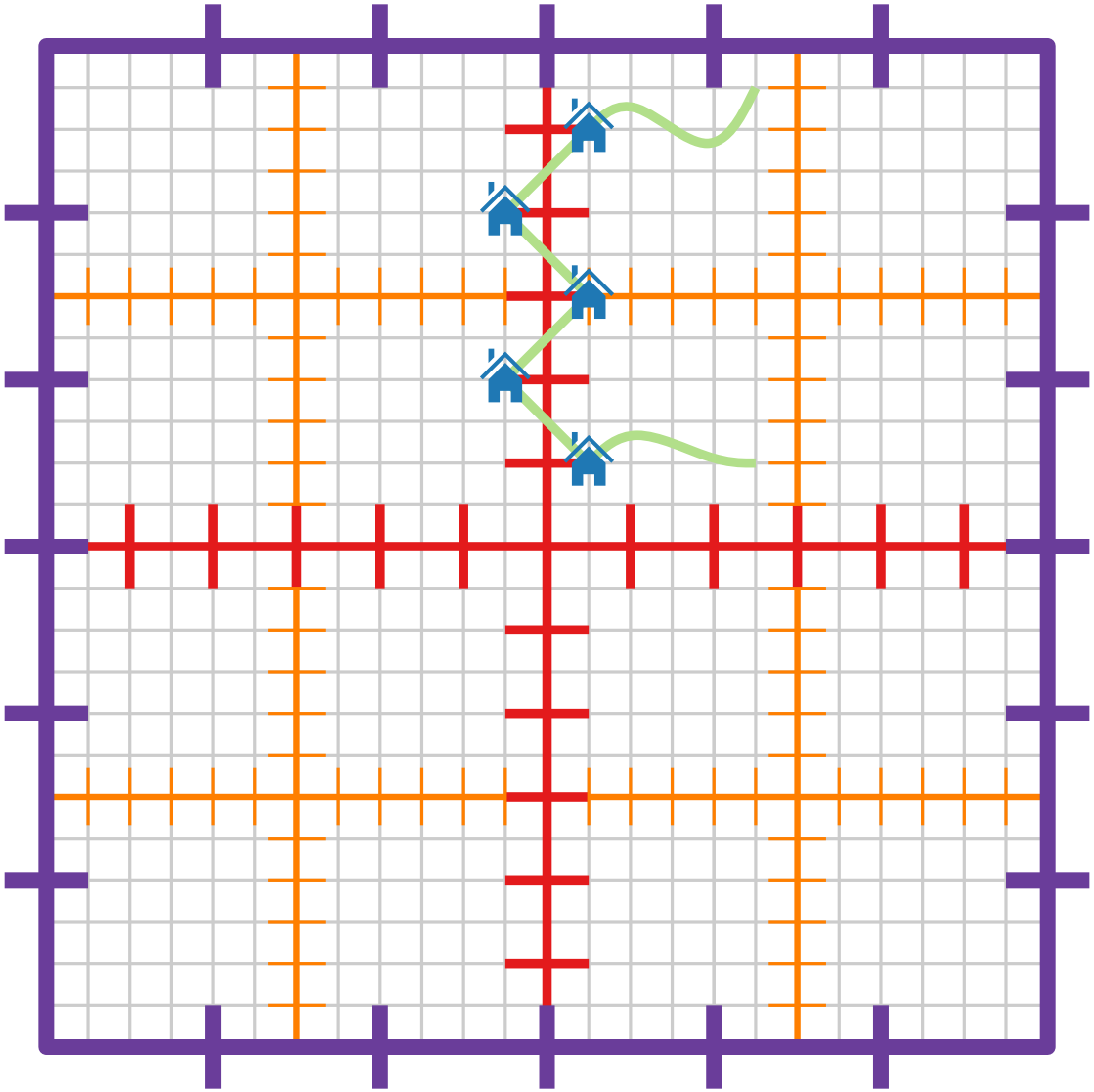


Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren
- Korrektheit per Induktion

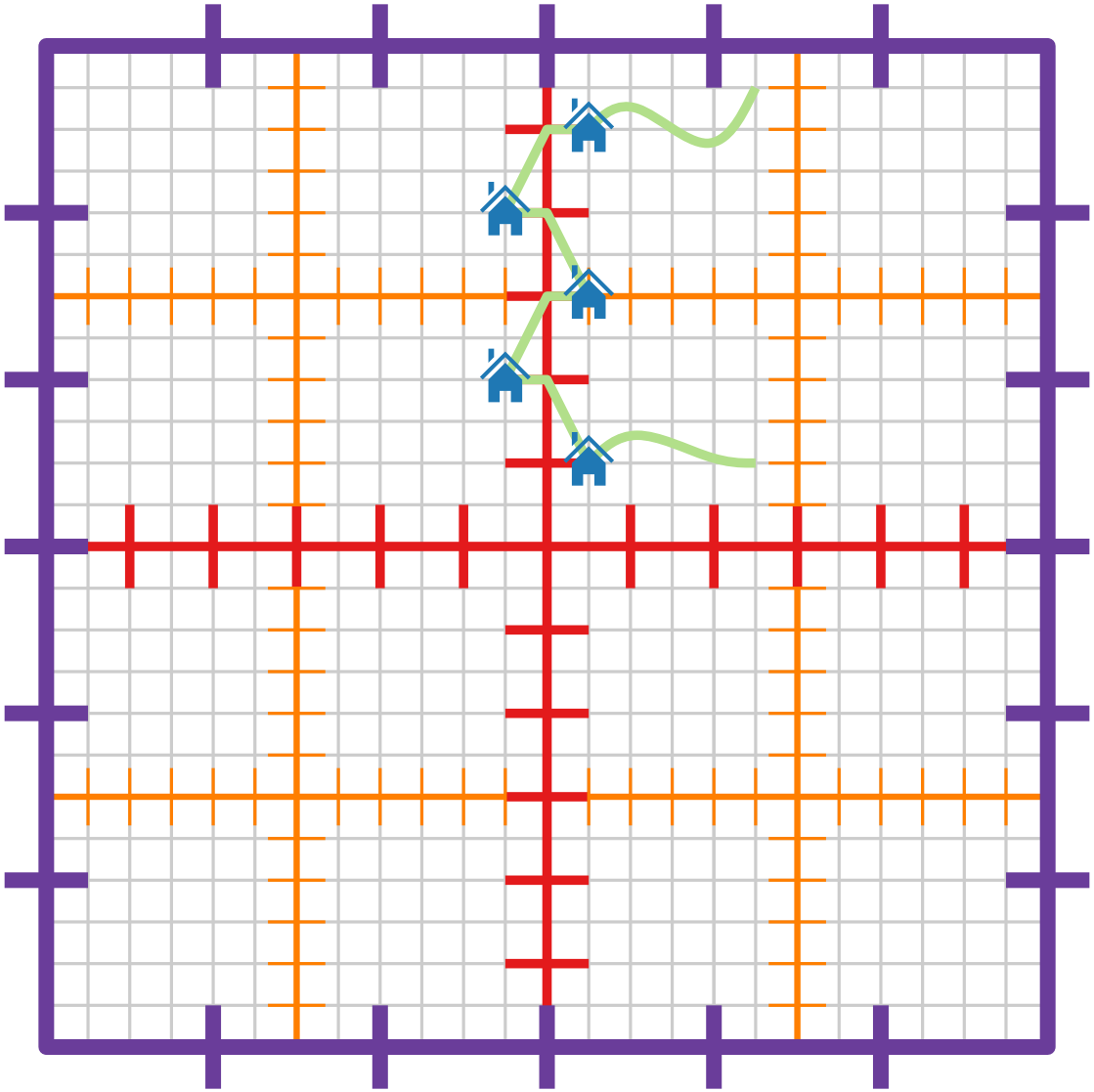
Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Verschobene Zerlegung



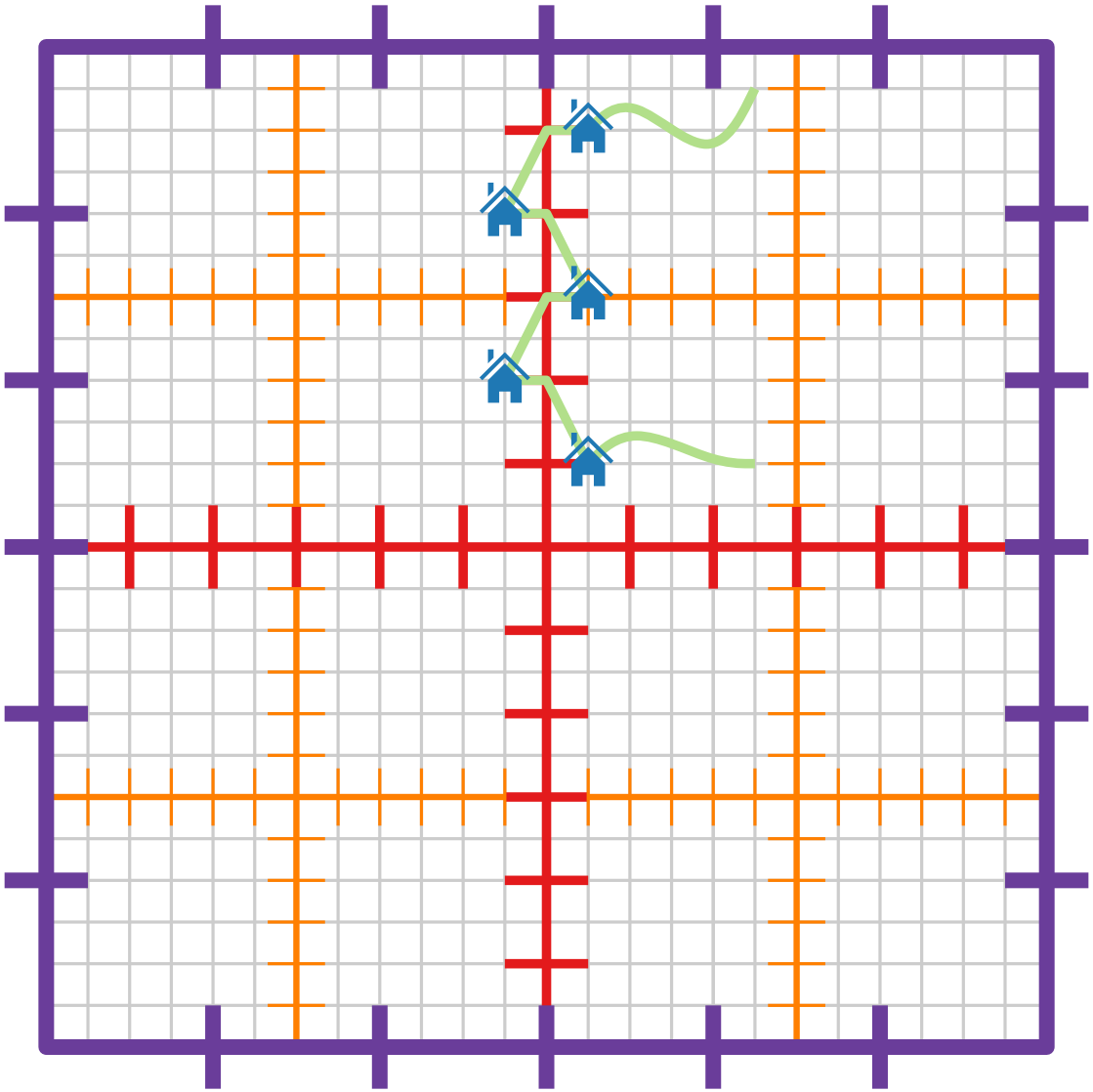
- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.

Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.

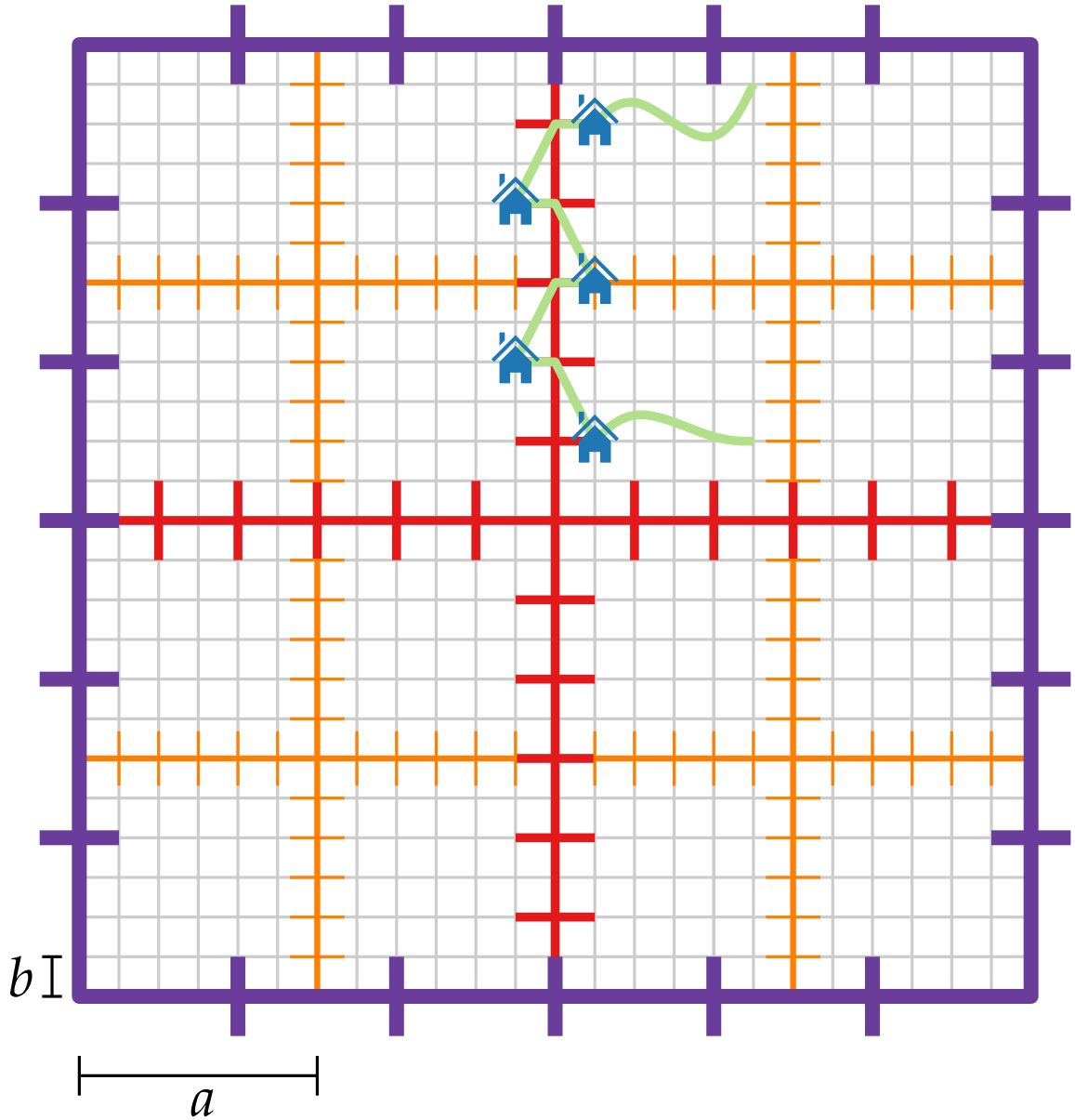
Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

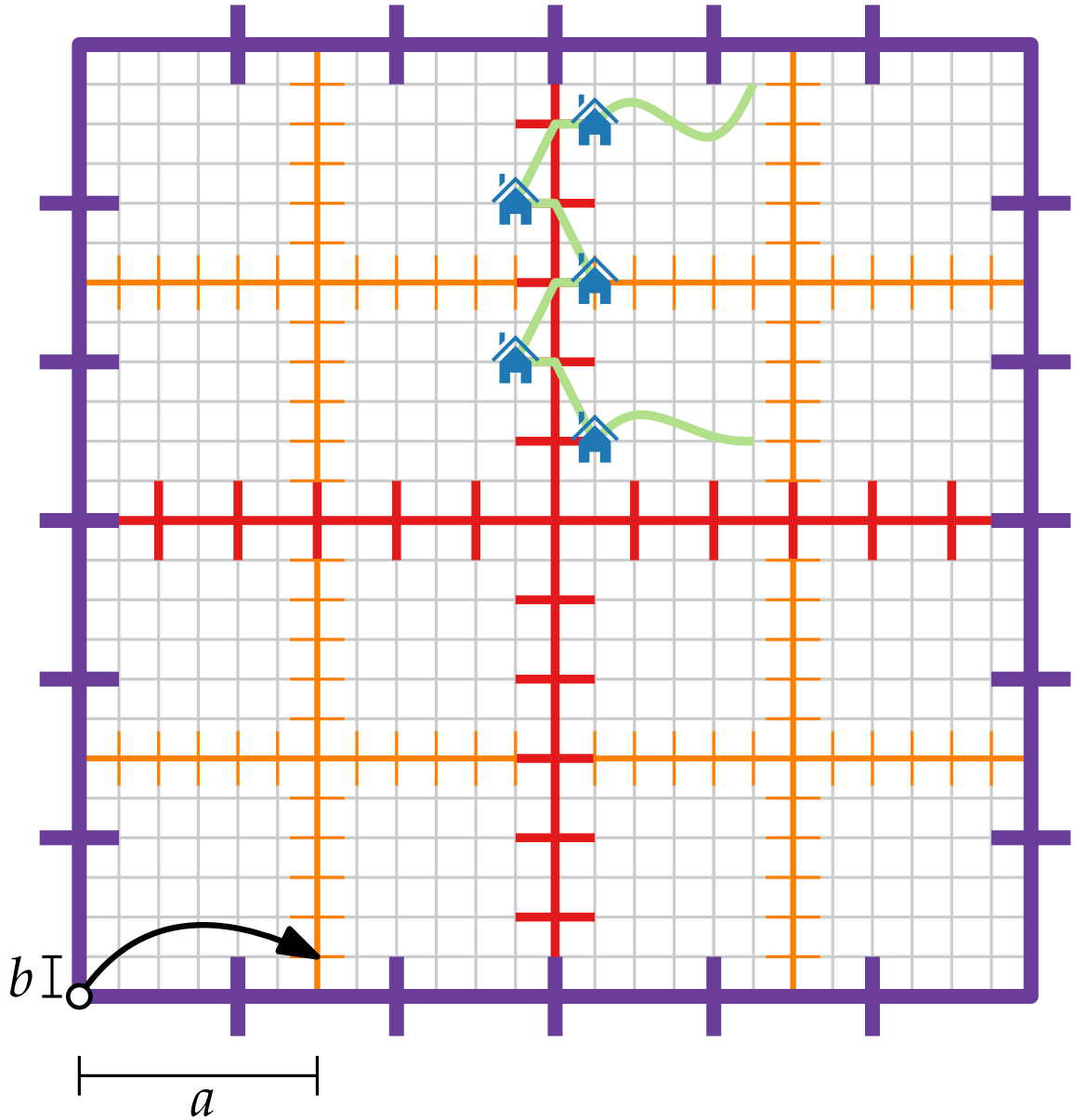
Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

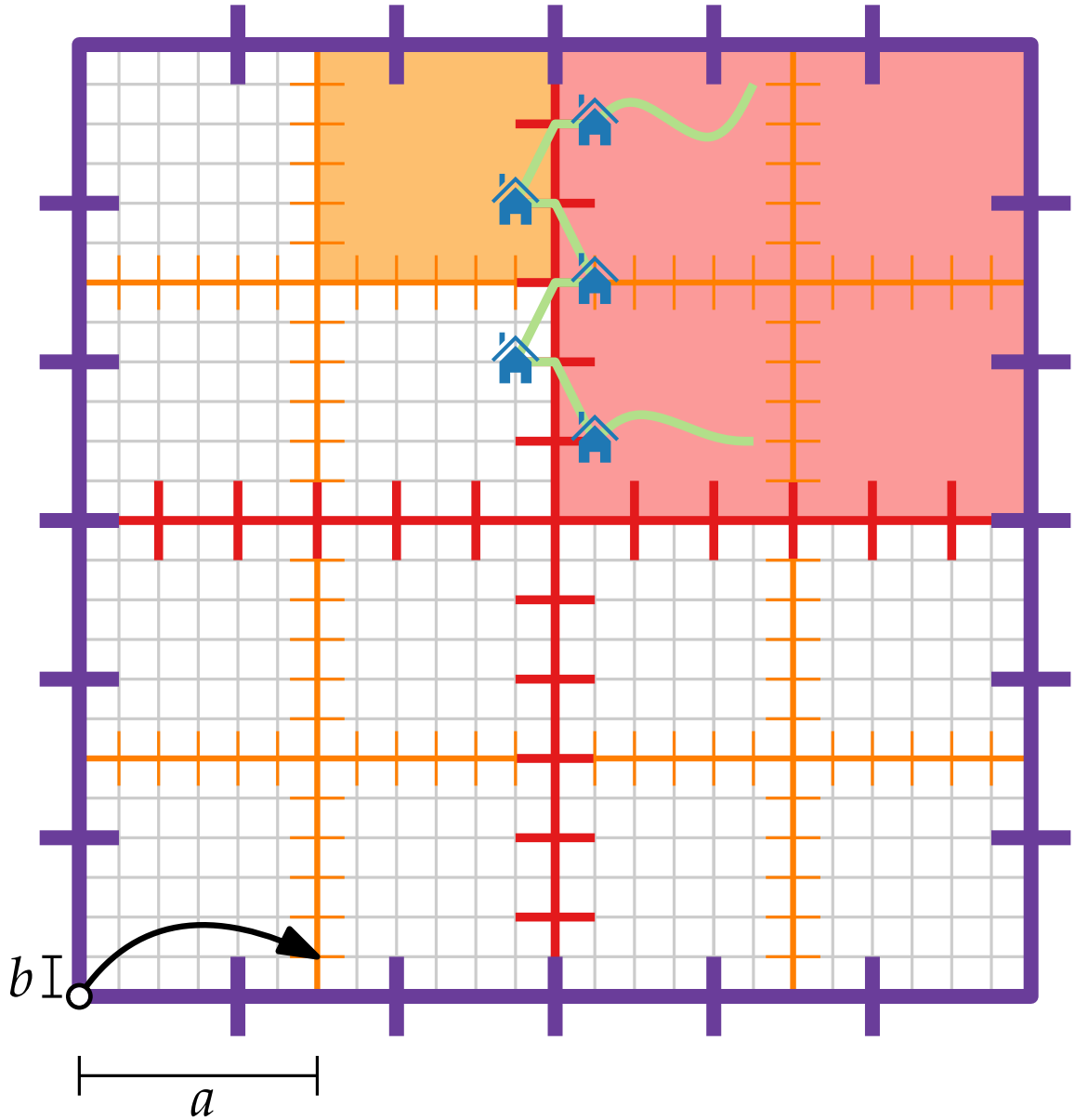
Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

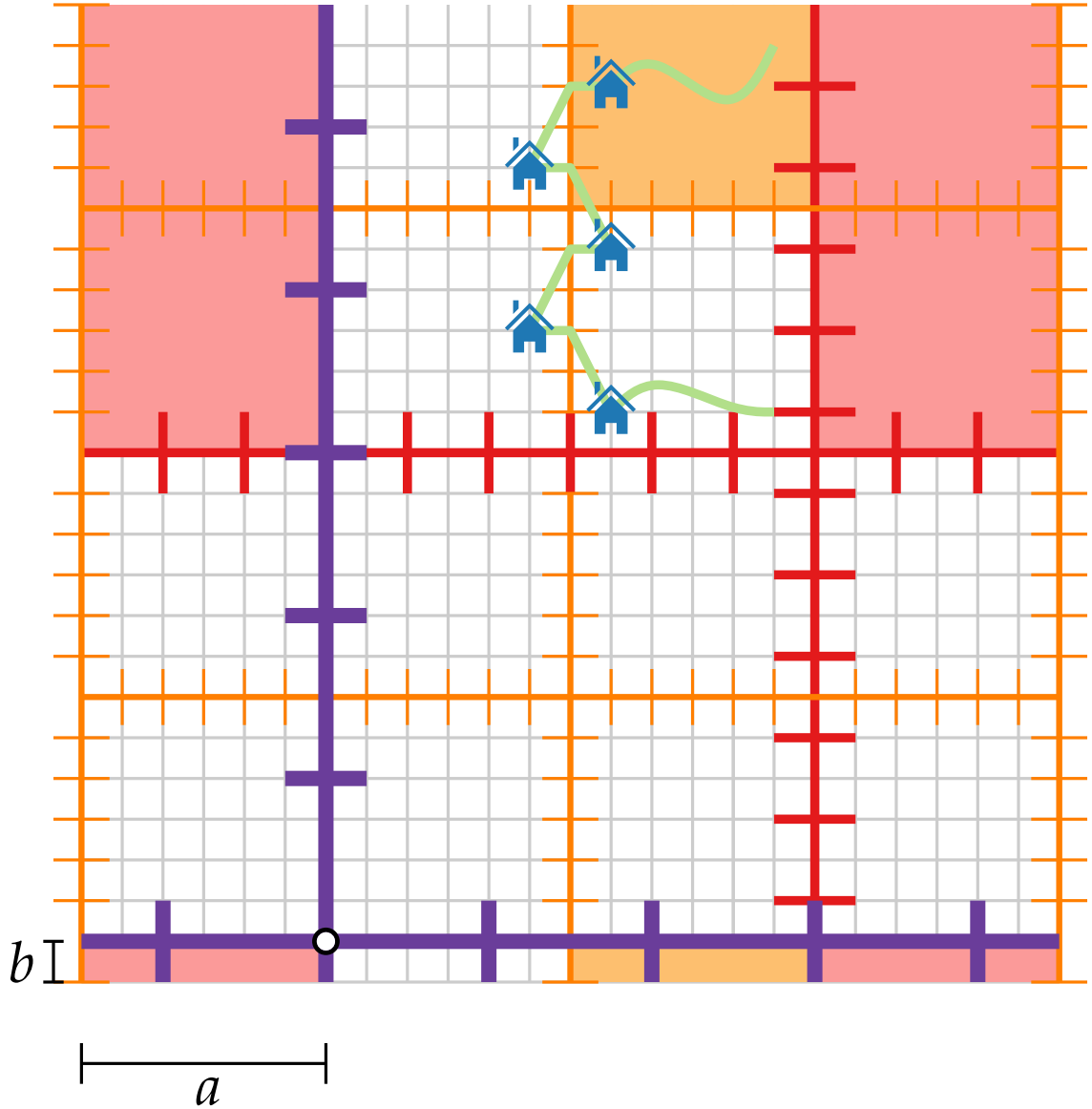
Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

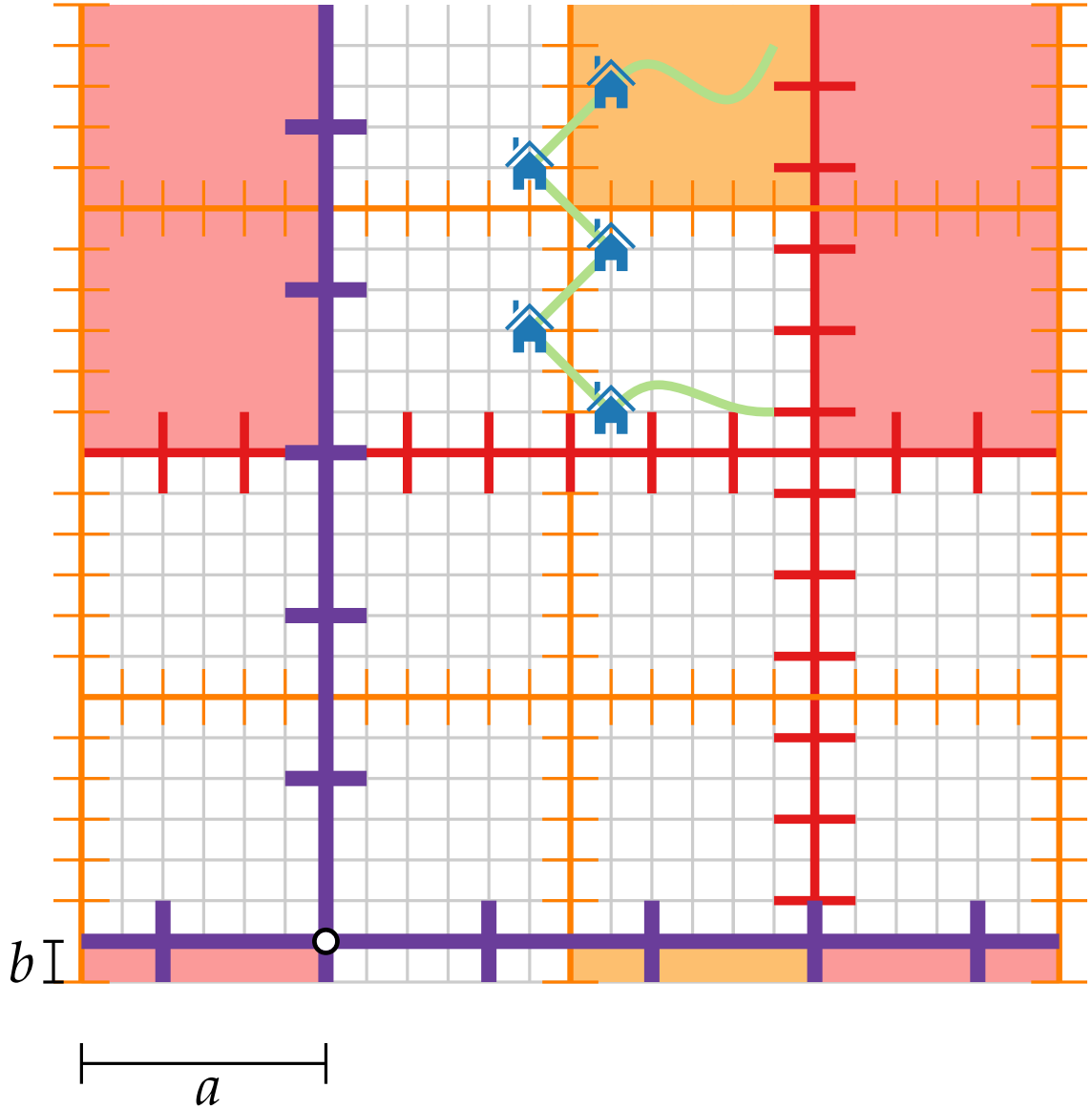
Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

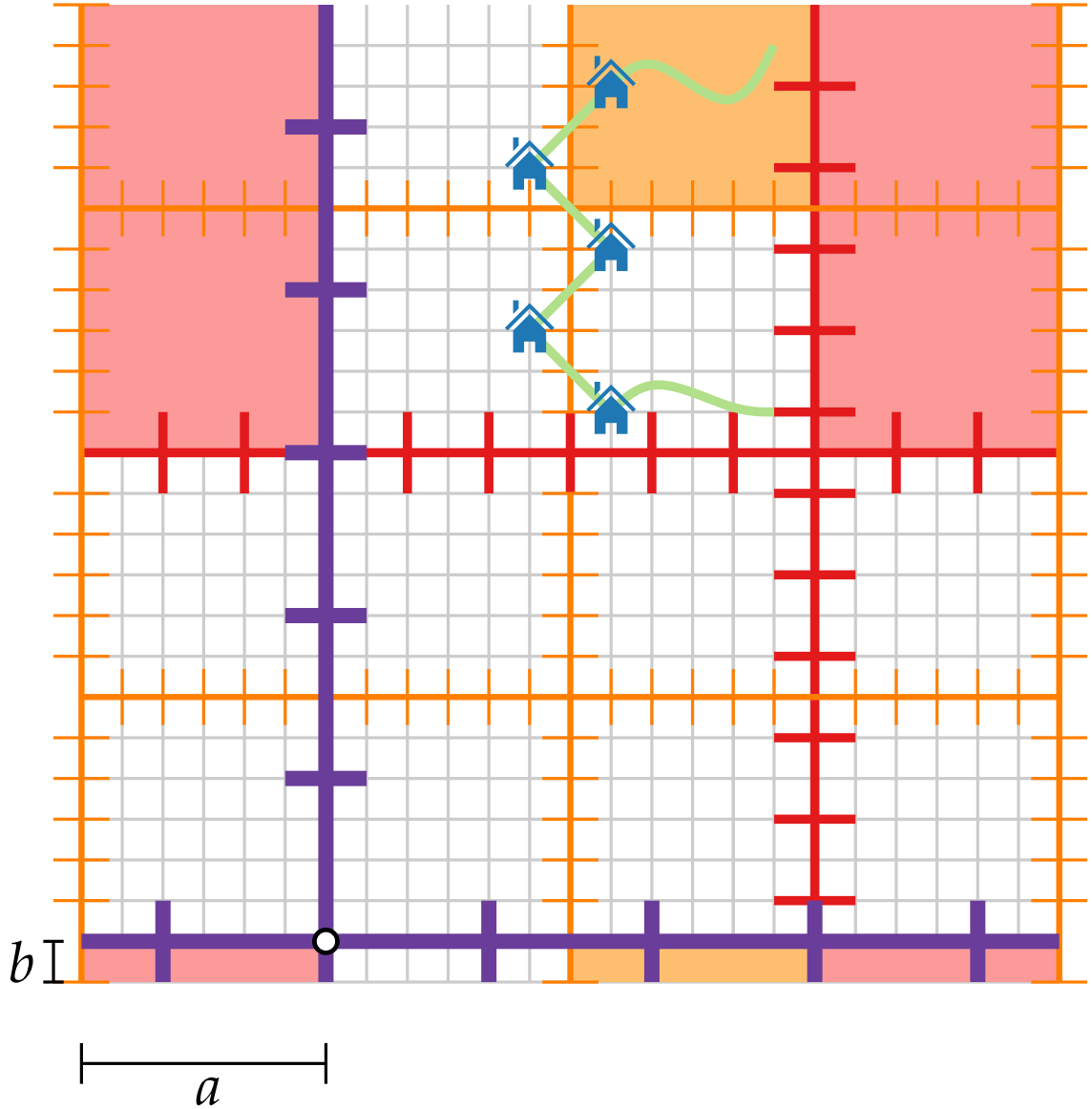
Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

Verschobene Zerlegung

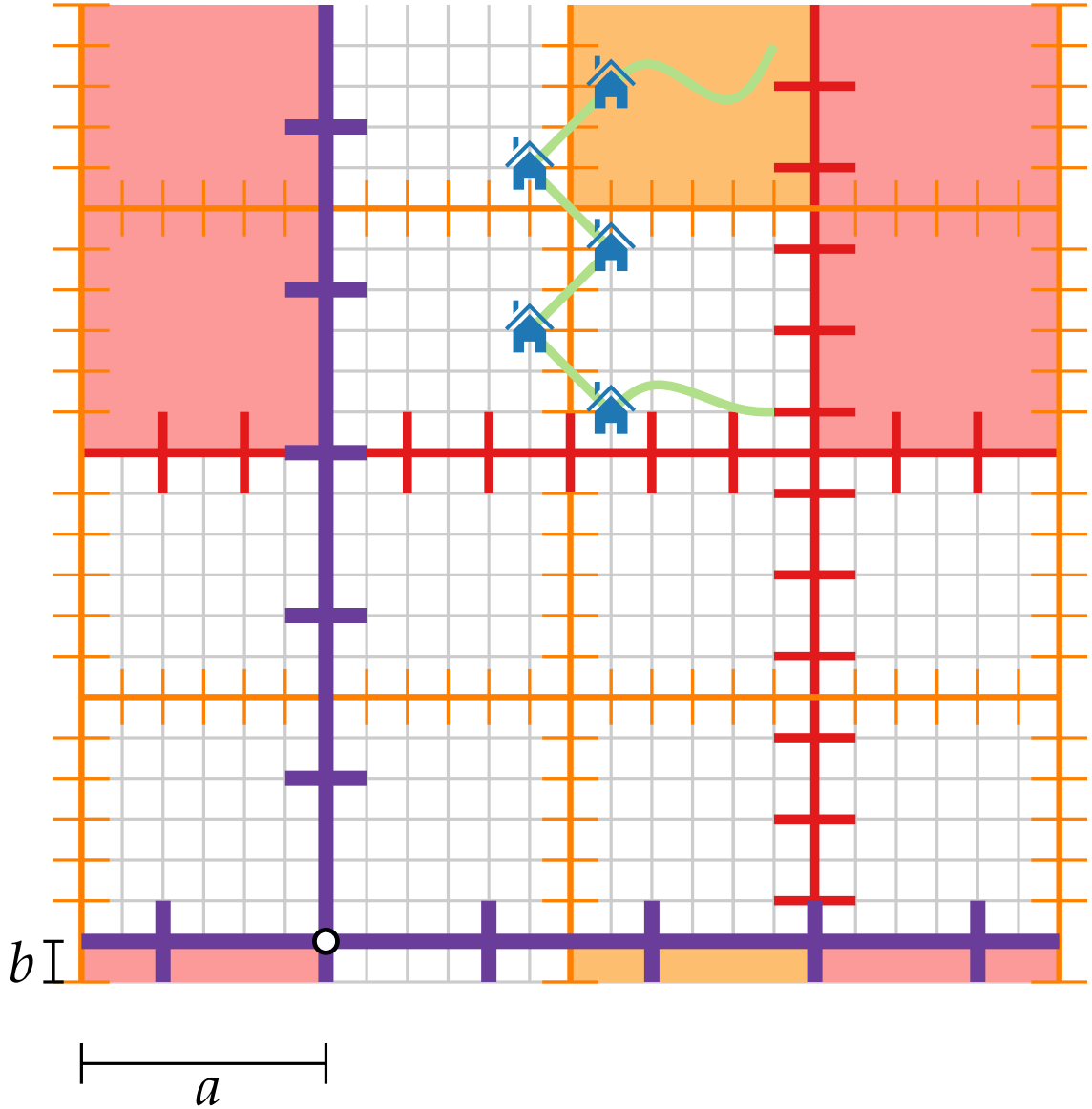


- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

- Quadrate im Zerlegungsbaum werden „umgeschlagen“.

Verschobene Zerlegung



- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

- Quadrate im Zerlegungsbaum werden „umgeschlagen“.
- Dynamisches Programm muss entsprechend modifiziert werden.

Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters.

Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

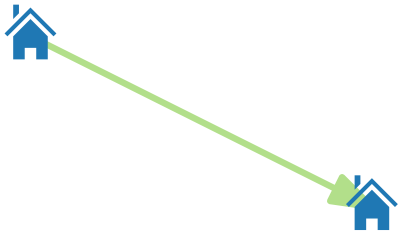
- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.

Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.



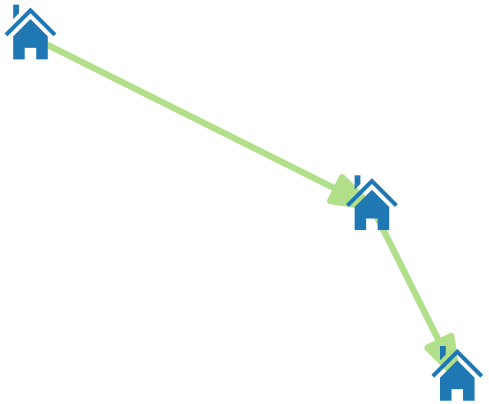
π

Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.



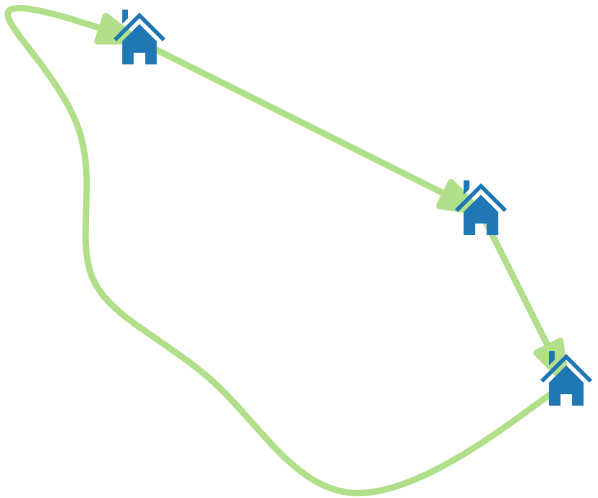
π

Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.



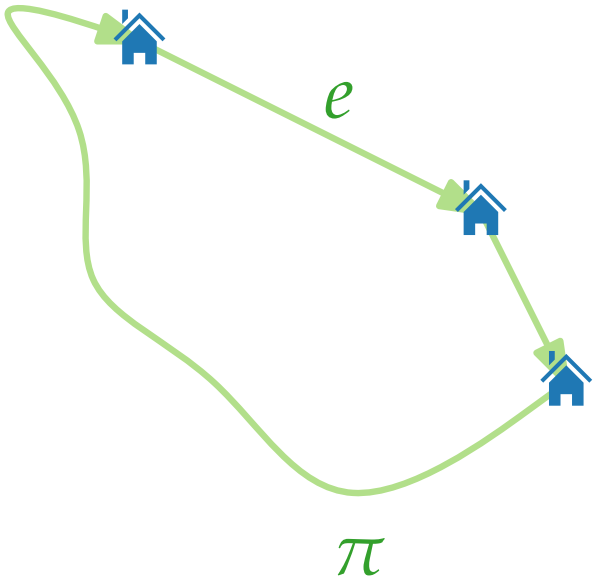
π

Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.

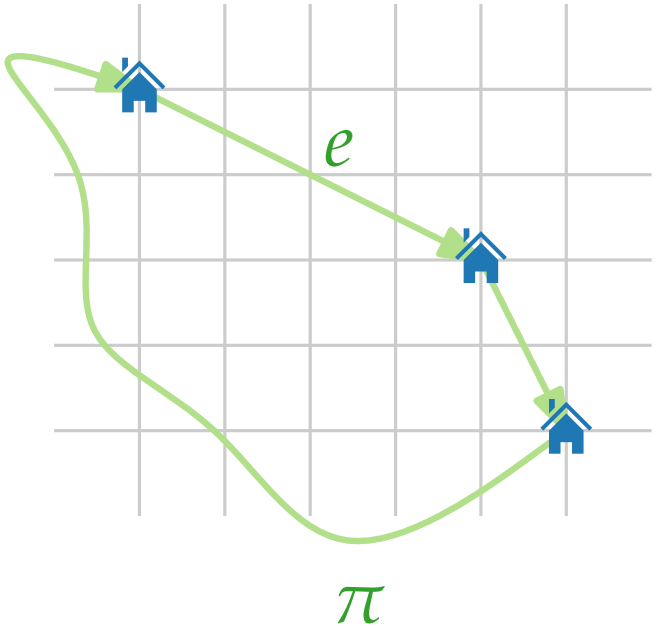


Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.

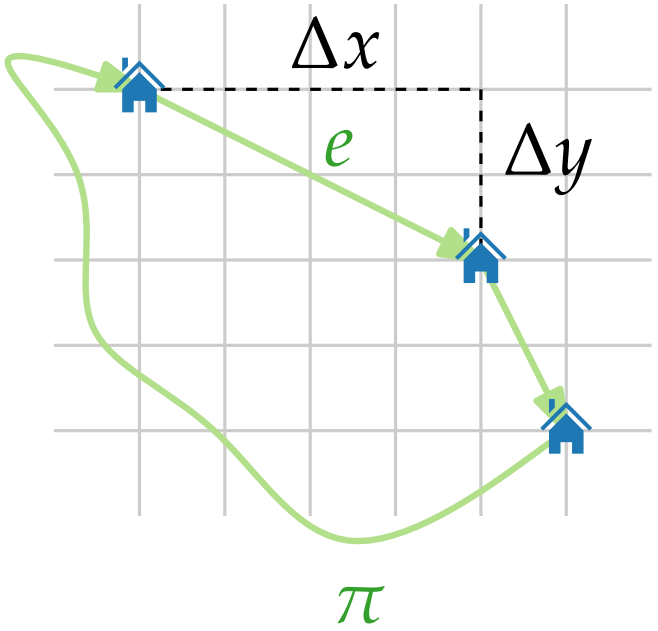


Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.

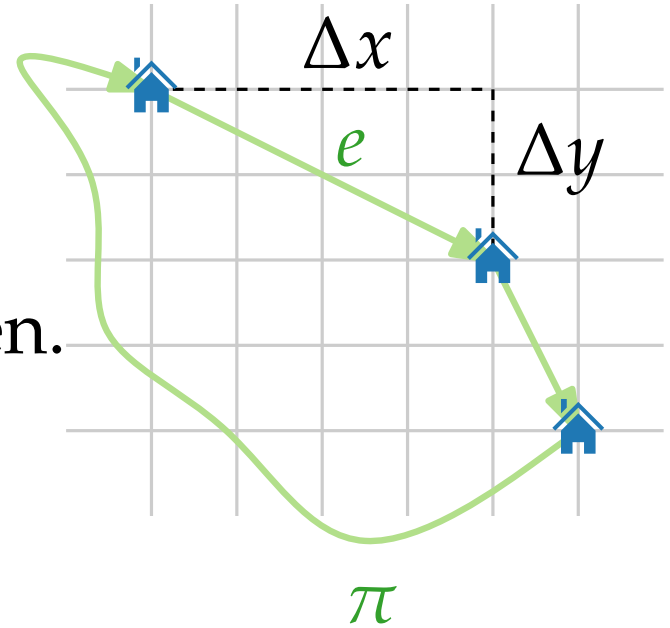


Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.

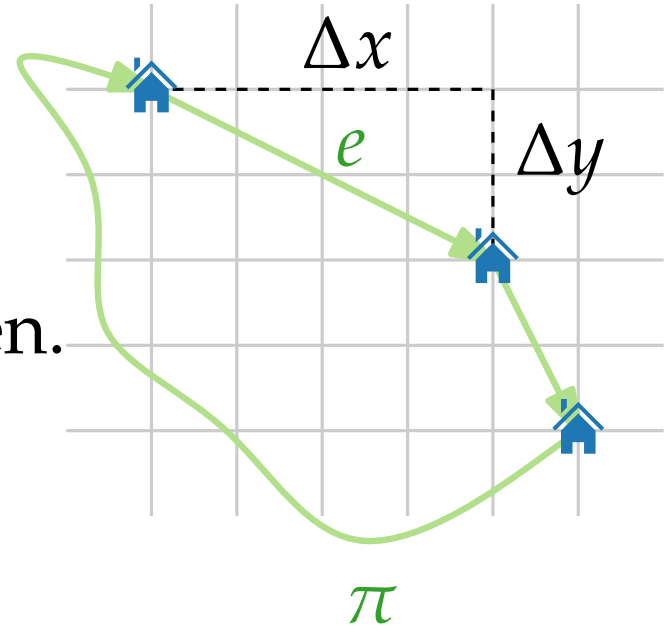


Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.

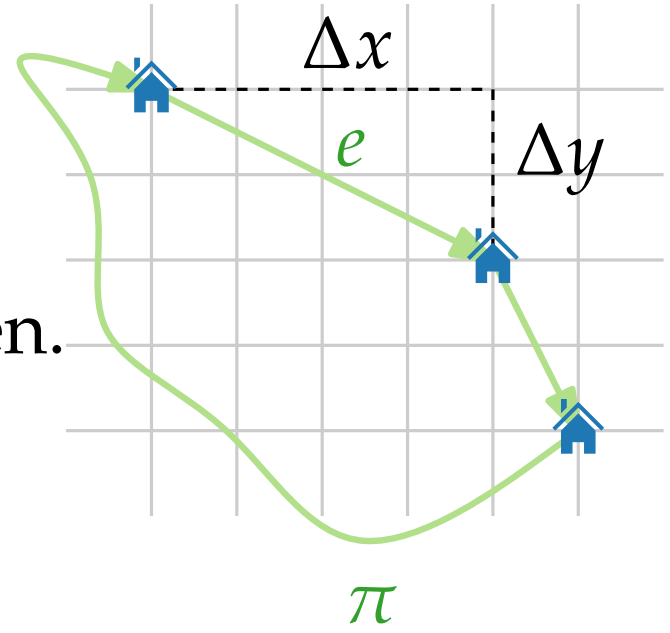


Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- ${N_e}^2 \leq$

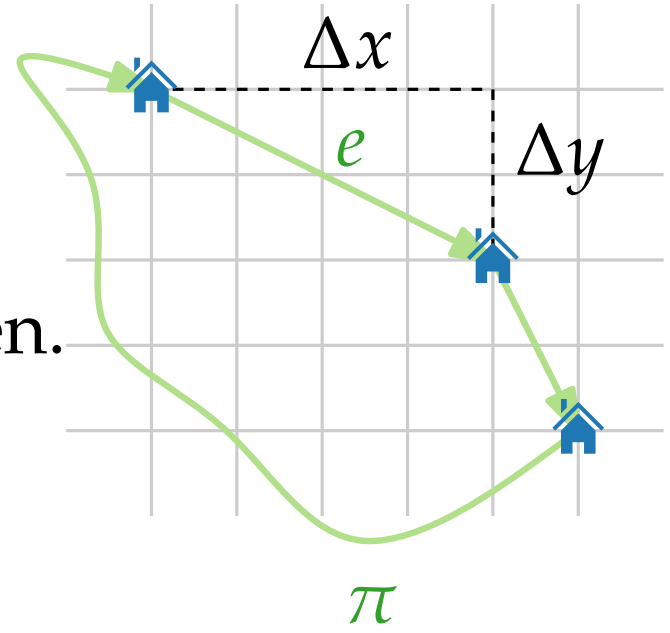


Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- ${N_e}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \leq$

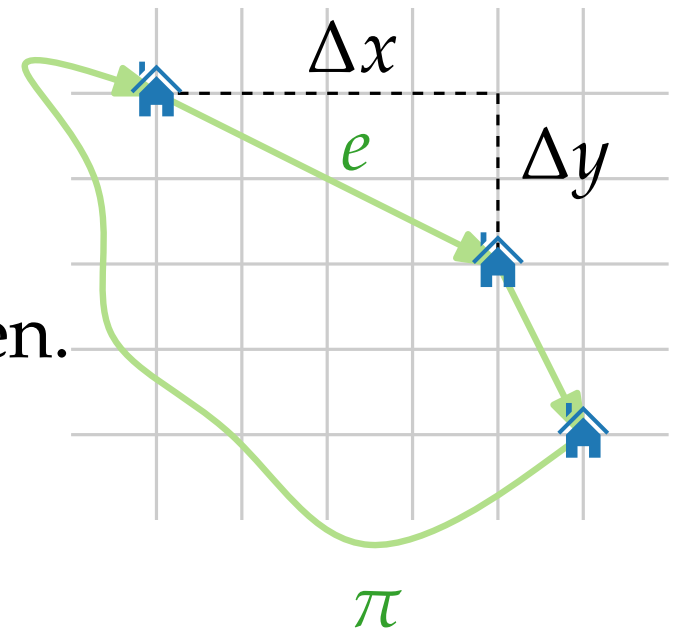


Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq}$

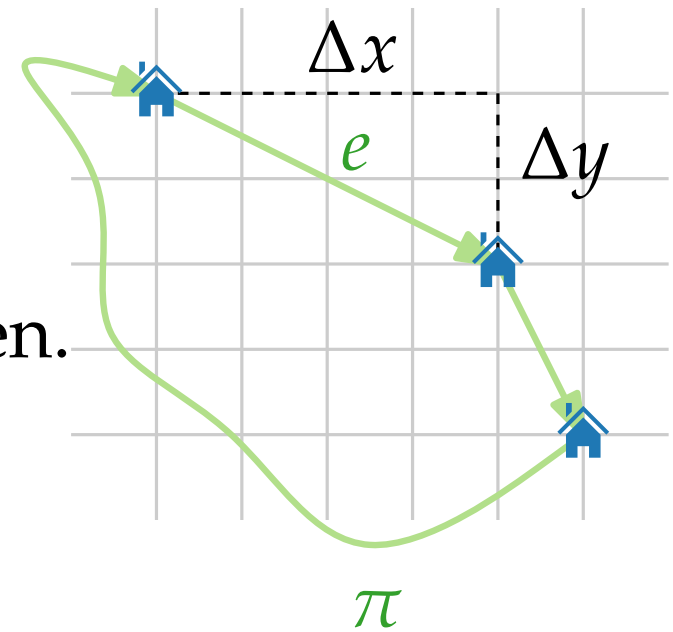


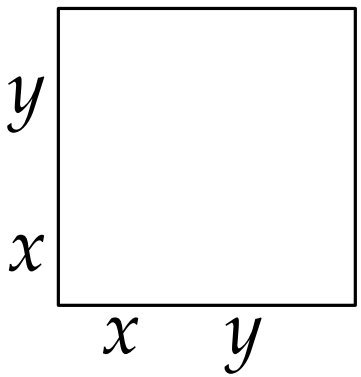
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq}$



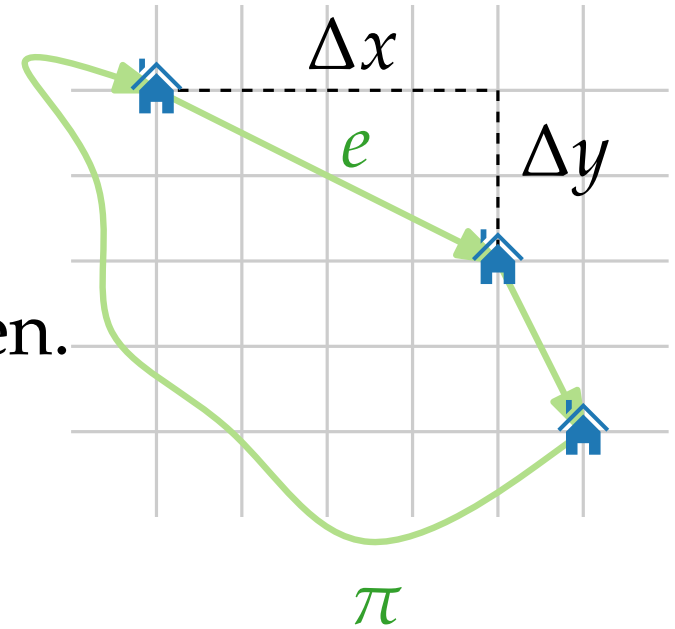


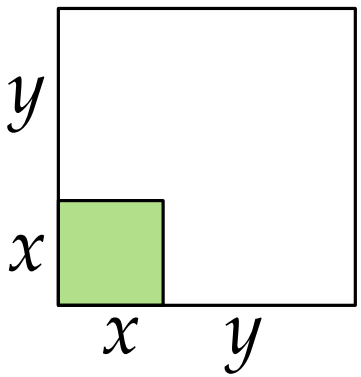
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq}$



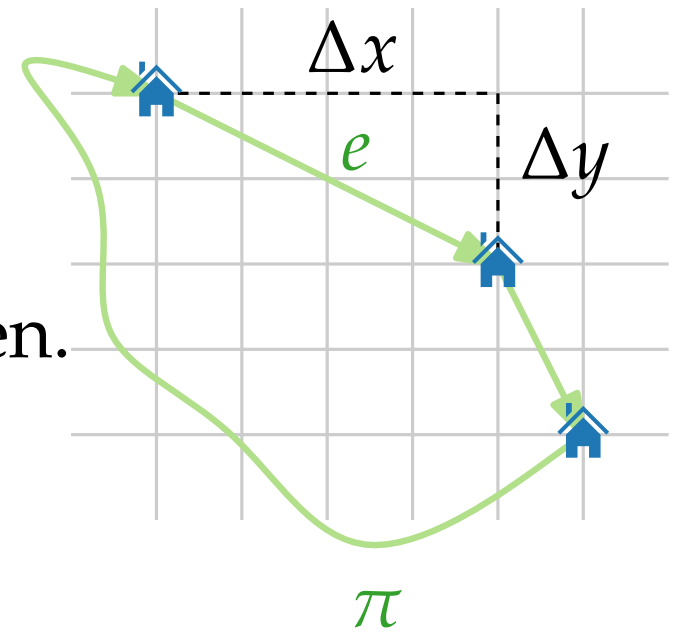


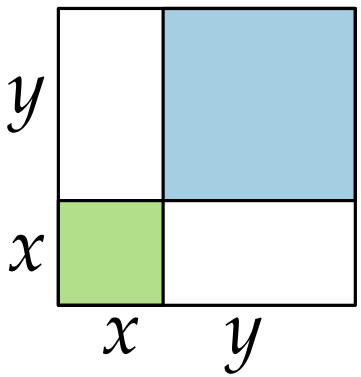
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq}$



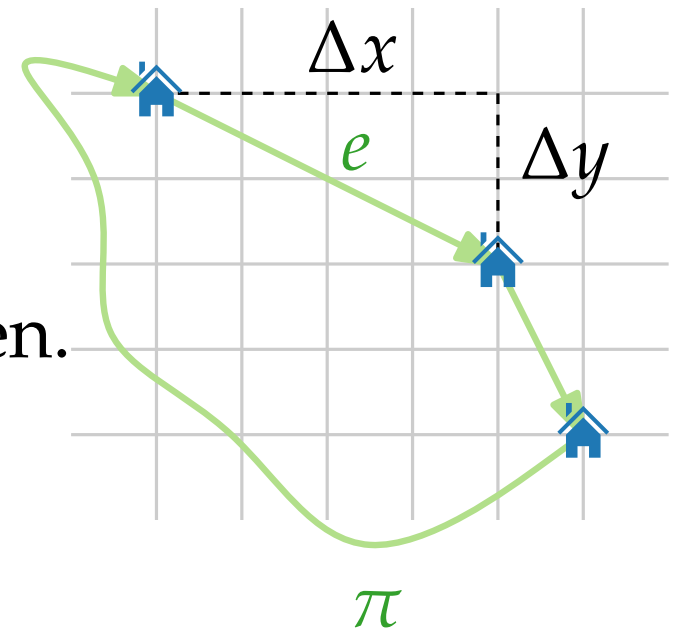


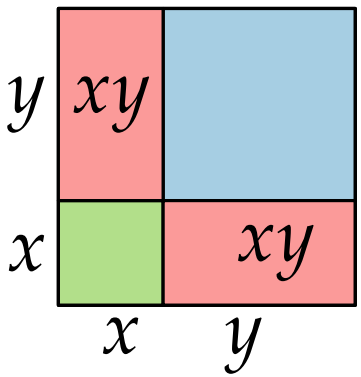
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq}$



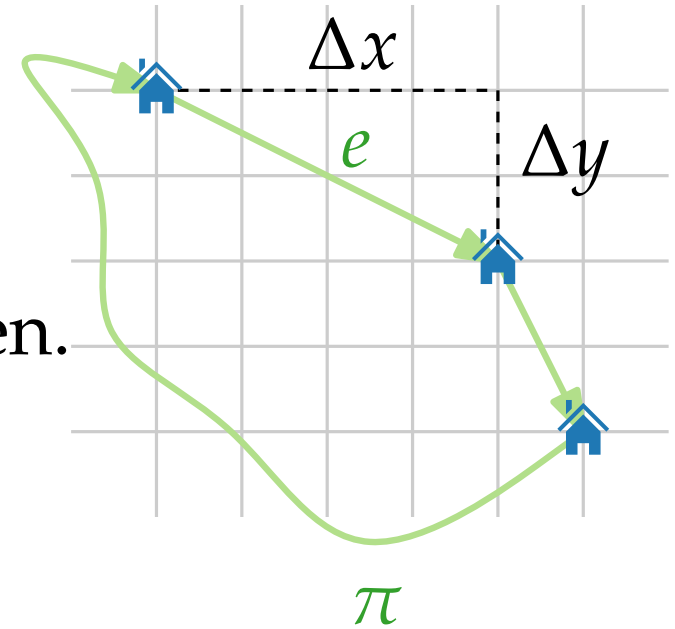


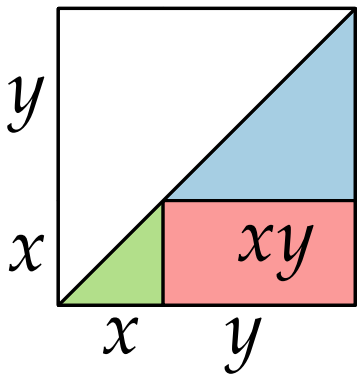
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq}$



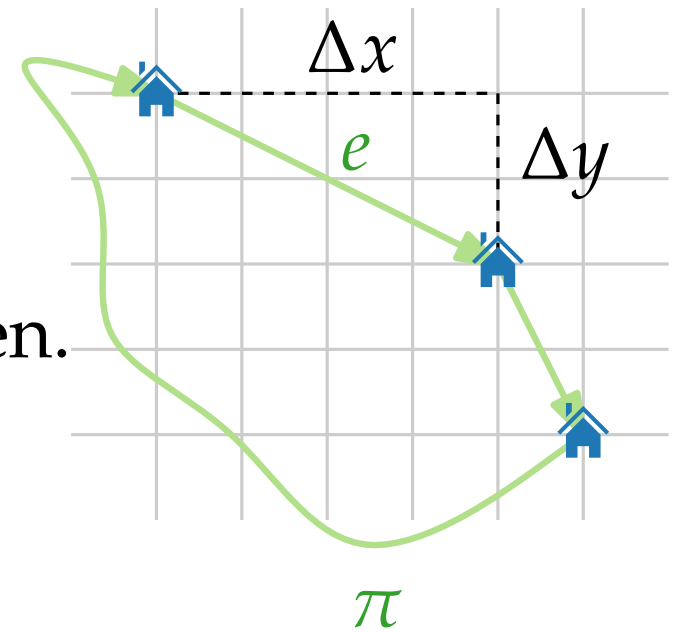


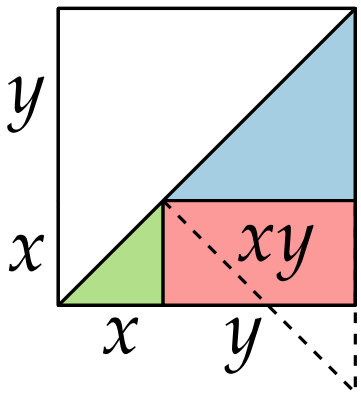
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq}$



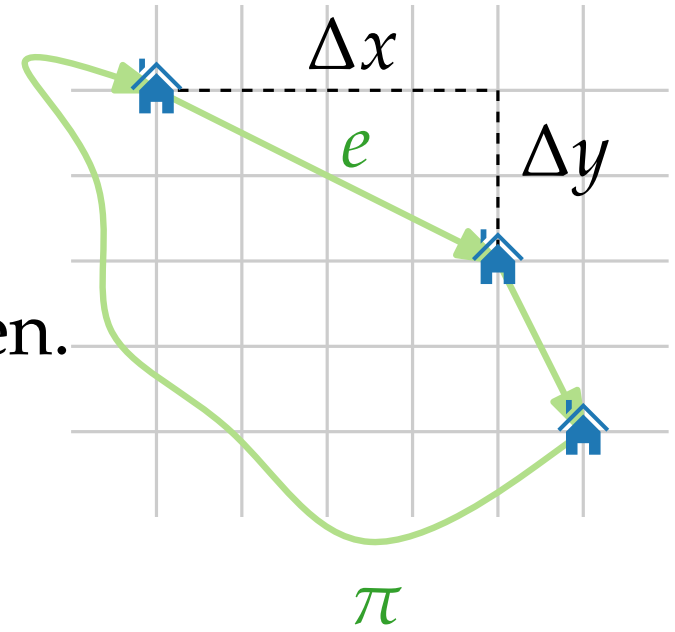


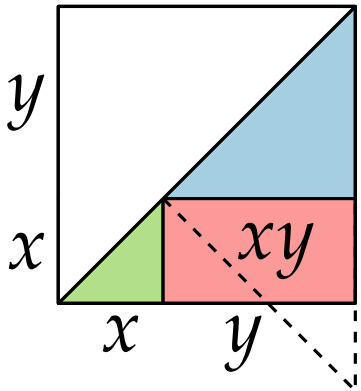
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq} 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) =$



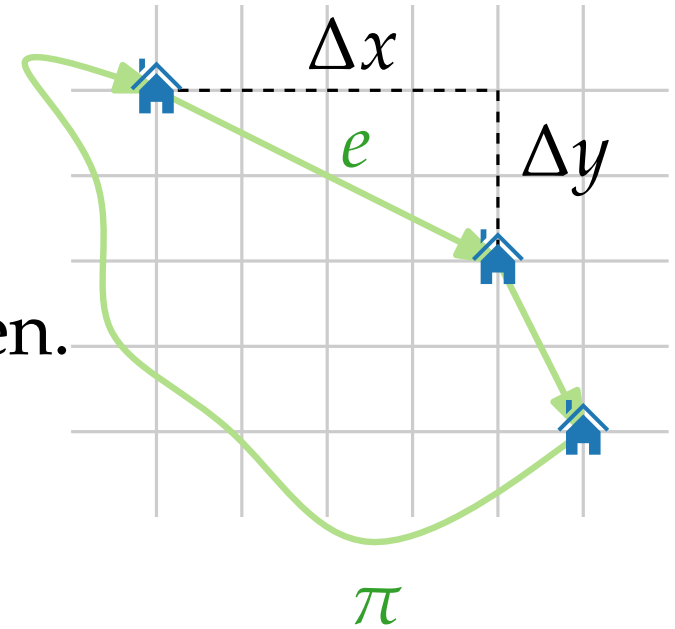


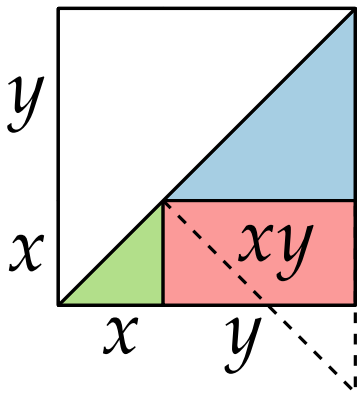
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq} 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 2|e|^2.$



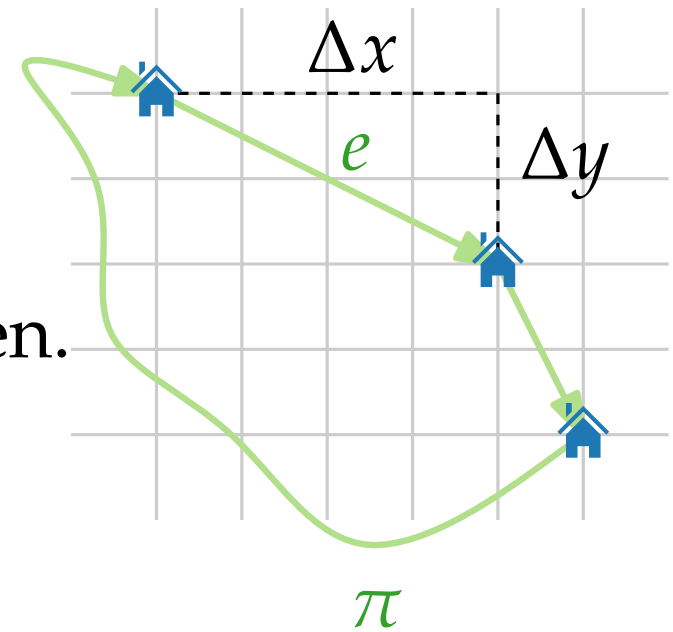


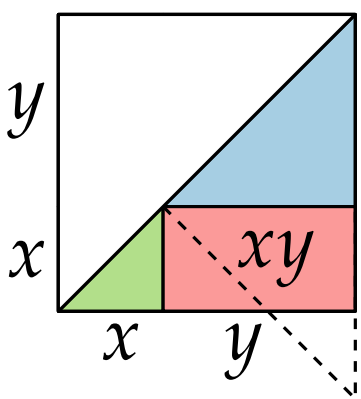
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.





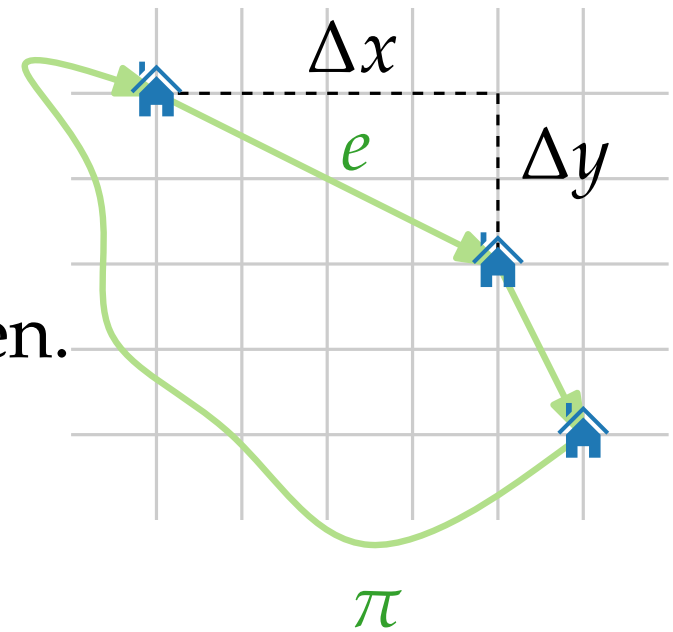
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq} 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 2|e|^2.$
- $N(\pi) =$

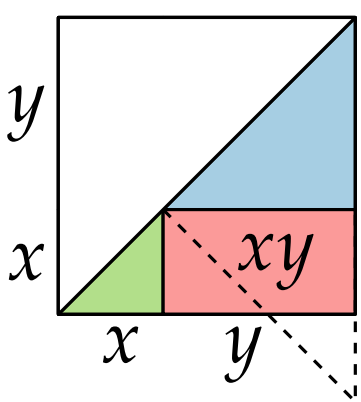
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.





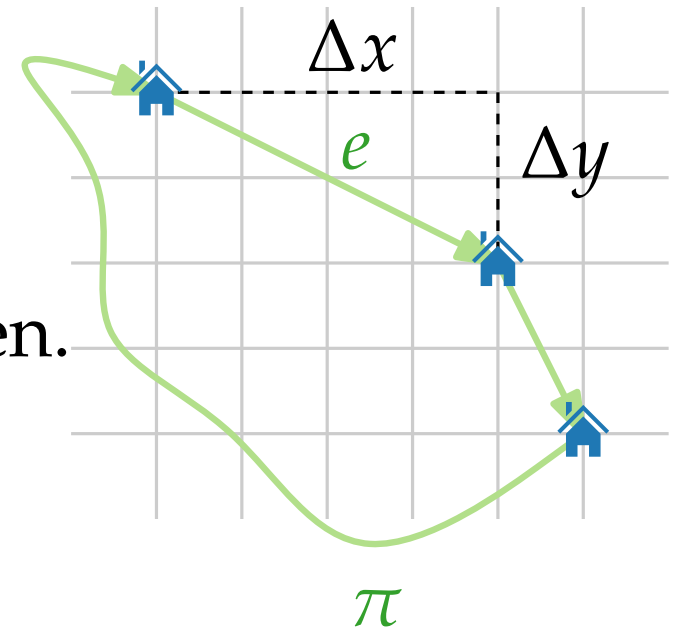
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq} 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 2|e|^2$.
- $N(\pi) = \sum_{e \in \pi} N_e \leq$

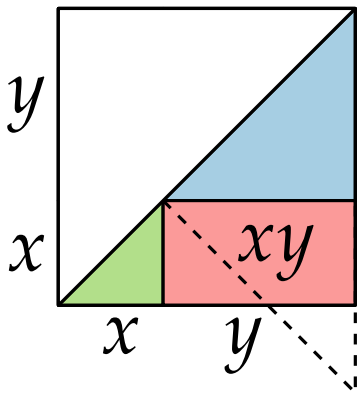
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.





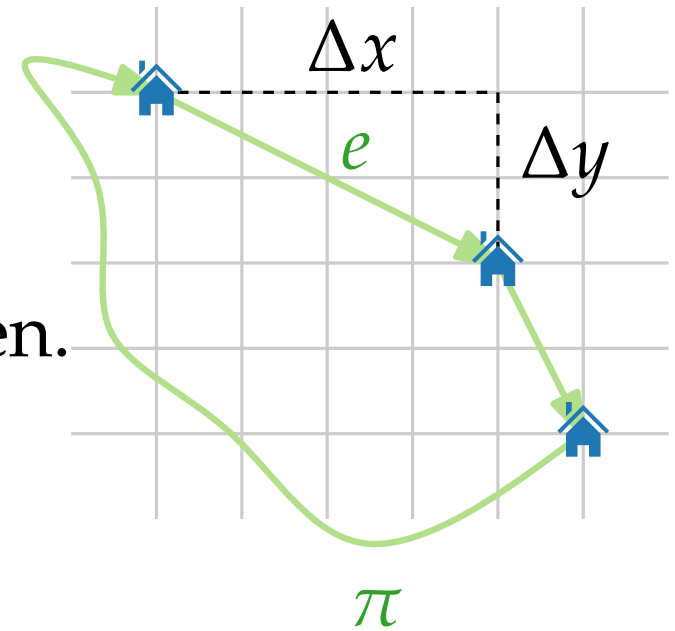
- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq} 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 2|e|^2.$
- $N(\pi) = \sum_{e \in \pi} N_e \leq \sum_{e \in \pi} \sqrt{2|e|^2}$

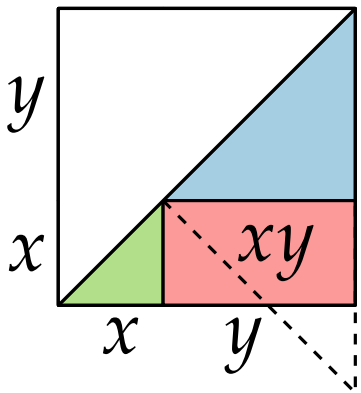
Verschobene Zerlegung (II)

Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.





- $N_e{}^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\leq} 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 2|e|^2$.
- $N(\pi) = \sum_{e \in \pi} N_e \leq \sum_{e \in \pi} \sqrt{2|e|^2} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$. $\square$

Verschobene Zerlegung (III)

Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt.

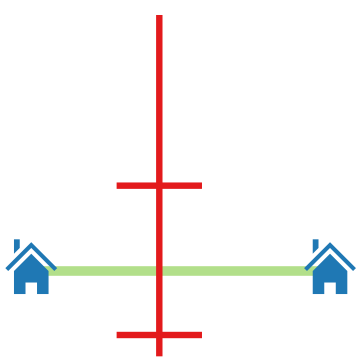
Verschobene Zerlegung (III)

Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt. Dann sind die erwarteten Kosten einer günstigsten weihnachtlichen Tour bezüglich der (a, b)-verschobenen Zerlegung höchstens $(1 + \sqrt{2}\varepsilon)\mathrm{OPT}$.

Verschobene Zerlegung (III)

Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt. Dann sind die erwarteten Kosten einer günstigsten weihnachtlichen Tour bezüglich der (a, b)-verschobenen Zerlegung höchstens $(1 + \sqrt{2}\varepsilon)\mathrm{OPT}$.

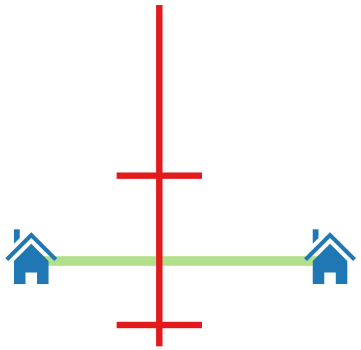
Beweis. Betrachte optimale Tour π.



Verschobene Zerlegung (III)

Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt. Dann sind die erwarteten Kosten einer günstigsten weihnachtlichen Tour bezüglich der (a, b)-verschobenen Zerlegung höchstens $(1 + \sqrt{2}\varepsilon)\mathrm{OPT}$.

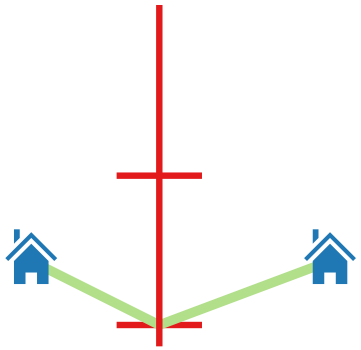
Beweis. Betrachte optimale Tour π. Machen π weihnachtlich, indem wir alle Schnittpunkte mit dem $(L \times L)$-Gitter zum nächstgelegenen Portal bewegen.



Verschobene Zerlegung (III)

Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt. Dann sind die erwarteten Kosten einer günstigsten weihnachtlichen Tour bezüglich der (a, b)-verschobenen Zerlegung höchstens $(1 + \sqrt{2}\varepsilon)\mathrm{OPT}$.

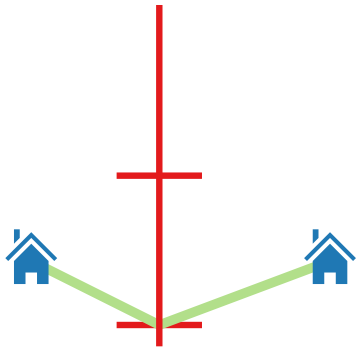
Beweis. Betrachte optimale Tour π. Machen π weihnachtlich, indem wir alle Schnittpunkte mit dem $(L \times L)$-Gitter zum nächstgelegenen Portal bewegen.



Verschobene Zerlegung (III)

Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt. Dann sind die erwarteten Kosten einer günstigsten weihnachtlichen Tour bezüglich der (a, b)-verschobenen Zerlegung höchstens $(1 + \sqrt{2}\varepsilon)\mathrm{OPT}$.

Beweis. Betrachte optimale Tour π. Machen π weihnachtlich, indem wir alle Schnittpunkte mit dem $(L \times L)$-Gitter zum nächstgelegenen Portal bewegen.



Verlängerung pro Schnittpunkt $\leq$ Interportaldistanz

Verschobene Zerlegung (I)

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.

Verschobene Zerlegung (I

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* ist l eine Level-i-Gerade

Verschobene Zerlegung (I]

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens führt (Interportal-Distanz).

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i/L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

$$\sum_{i=0}^{k}$$

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{L}{2^i m} .$$

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{L}{2^i m} \cdot \frac{2^i}{L} \leq$$

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{L}{2^i m} \cdot \frac{2^i}{L} \leq \frac{k+1}{m} \leq$$

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{L}{2^i m} \cdot \frac{2^i}{L} \leq \frac{k+1}{m} \leq \varepsilon.$$

Verschobene Zerlegung (II

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i / L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{L}{2^i m} \cdot \frac{2^i}{L} \leq \frac{k+1}{m} \leq \varepsilon.$$

- Summierung über alle $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$ vielen Schnittpunkte zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes liefert die Behauptung.

Approximationsschema

Satz 4. Es gibt einen *deterministischen* Algorithmus (PTAS) für WEIHNACHTSMANNPROBLEM, der für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(1+\varepsilon)$-Approximation in $n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit liefert.

Approximationsschema

Satz 4. Es gibt einen *deterministischen* Algorithmus (PTAS) für WEIHNACHTSMANNPROBLEM, der für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(1+\varepsilon)$-Approximation in $n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit liefert.

Beweis. Probiere alle L^2 vielen (a, b)-verschobenen Zerlegungen aus.

Approximationsschema

Satz 4. Es gibt einen *deterministischen* Algorithmus (PTAS) für WEIHNACHTSMANNPROBLEM, der für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(1+\varepsilon)$-Approximation in $n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit liefert.

Beweis. Probiere alle L^2 vielen (a, b)-verschobenen Zerlegungen aus. Eine davon muss nach **Satz 3** die gewünschte Güte haben. $\square$

Erinnerung: Lehrveranstaltungsevaluation

Erinnerung: Lehrveranstaltungsevaluation

Guten Tag,
wir möchten Sie daran erinnern, an der anonymen Online-Befragung zur Veranstaltung ‘‘Approximationsalgorithmen’’ teilzunehmen. Bitte füllen Sie den Fragebogen unter folgendem Link aus:
https://evasys.zv.uni-wuerzburg.de/evasys_10/on...
Mit der Teilnahme an dieser Befragung haben Sie die Möglichkeit, auf unkomplizierte Art und Weise Feedback zu geben und dadurch die Qualität zukünftiger Lehrveranstaltungen am Institut für Informatik entscheidend zu verbessern.
Die Evaluation endet am 2019-12-22 23:59:59.
Mit freundlichen Grüßen und vielen Dank für Ihre Teilnahme,
Institut für Informatik