Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2019/20

8. Vorlesung

Sortieren – mit dem Würfel!

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

UNI WÜ Service Centre International Affairs SIA

Info-Veranstaltung mit Professoren der Informatik zu Partnerschaften und Förderprogrammen im Ausland

14.11.2019, 16-17h
Turing HS

Zielgruppe:
Informatik BSc, MSc, Lehramt
Mensch-Computer-Systeme BSc
Human-Computer Interaction MSc
Luft- und Raumfahrtinformatik BSc
Games Engineering BSc

Und noch einmal: Sortieren!

Zur Erinnerung: MergeSort...

+ gute Worst-Case-Laufzeit (durch Teile-und-Herrsche)
− kein in-situ-Verfahren (benötigt extra Felder beim Mergen)

Ziel: Teile-&-Herrsche-Verfahren, das trotzdem in situ sortiert!

Sortiere ein Teilfeld $A[\ell..r]$ wie folgt: QuickSort(int[] A, int ℓ, r)

Teile: Bestimme einen Index $m \in \{\ell, \ldots, r\}$ und teile $A[\ell..r]$ so in $A[\ell..m-1]$ und $A[m+1..r]$ auf, dass alle Element im ersten Teilfeld kleiner gleich $A[m]$ sind und alle im zweiten größer als $A[m]$.

Partition(A, ℓ, r) [liefert m zurück]

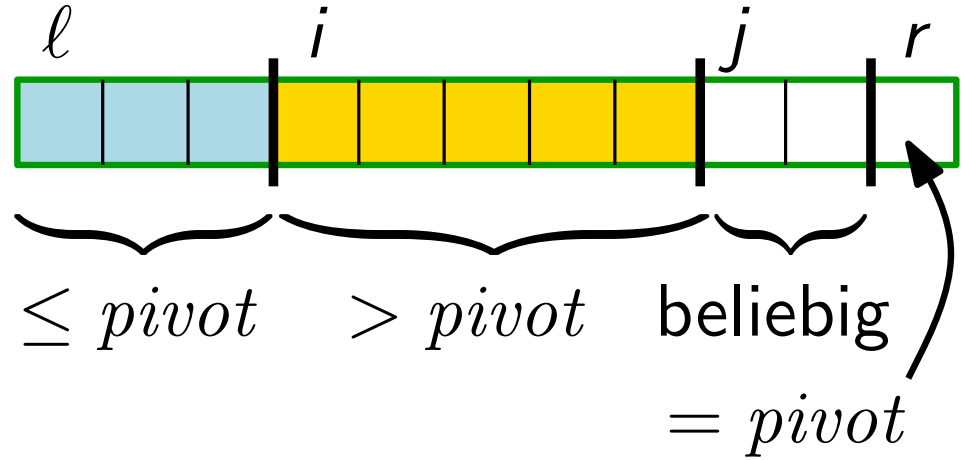
Herrsche: durch rekursives Sortieren der beiden Teilfelder.

Kombiniere: —

Schreiben Sie QuickSort in Pseudocode unter Verwendung von Partition(A, ℓ, r)!

QuickSort

```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = Partition(A, ℓ, r)
      QuickSort(A, ℓ, m − 1)
      QuickSort(A, m + 1, r)
```



Schleifeninvariante:

(i) Für $k = \ell, \ldots, i-1$ gilt $A[k] \leq pivot$.

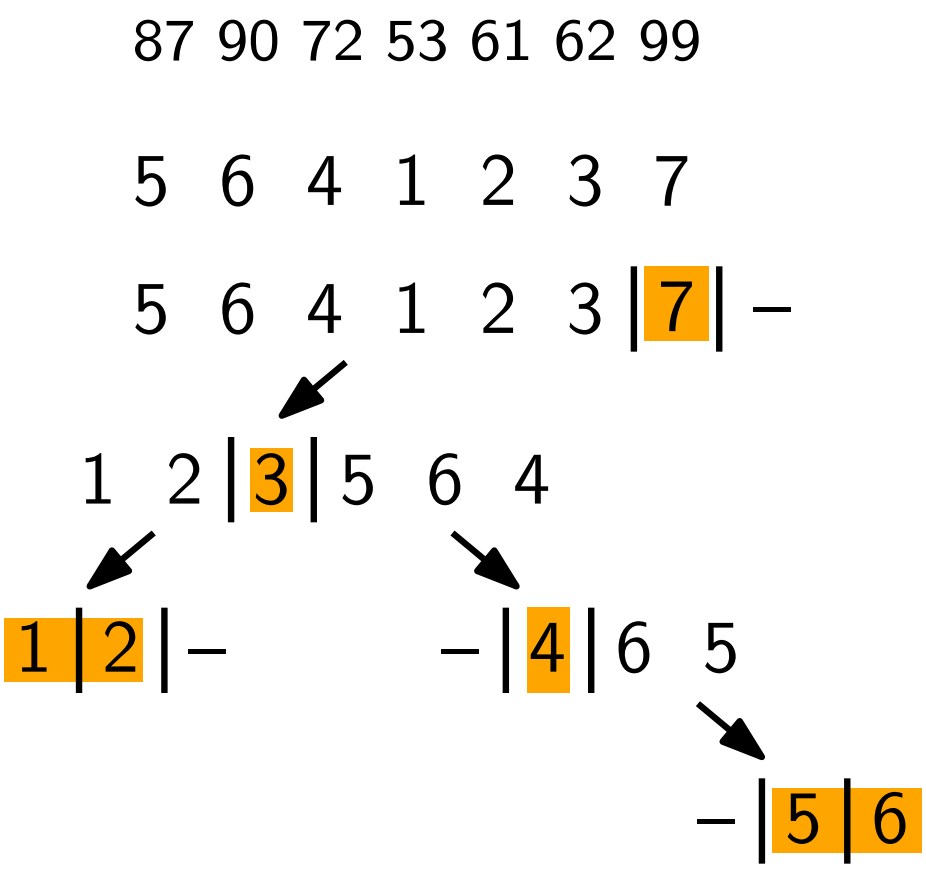
(ii) Für $k = i, \ldots, j-1$ gilt $A[k] > pivot$.

(iii) $A[r] = pivot$.

(iv) $A[\ell..j-1]$ enthält die gleichen Elemente wie zu Beginn.

```
int Partition(int[] A, int ℓ, int r)
    pivot = A[r]
    i = ℓ
    for j = ℓ to r − 1 do
        if A[j] ≤ pivot then
            Swap(A, i, j)
            i = i + 1
    Swap(A, i, r)
    return i
```

Ein Beispiel




```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = ...)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m−1)
    QuickSort(A, m+1, r)
```

```
int Partition(A, ℓ, r)
  pivot = A[r]
  i = ℓ
  for j = ℓ to r − 1 do
    if A[j] ≤ pivot then
      Swap(A, i, j)
      i = i + 1
  Swap(A, i, r)
  return i
```

Laufzeit

Zähle Anzahl der Vergleiche!

Beob. Partition benötigt *immer* $r - \ell$ Vergleiche.

Wovon hängt dann die Laufzeit ab?

$$T_{QS}(n) = T_{QS}(m-1) + T_{QS}(n-m) + n - 1$$

1. Extremfall: m immer erstes Element

$$\begin{aligned} T_{QS}(n) &= T_{QS}(0) + T_{QS}(n-1) + n - 1 \\ &= (T_{QS}(n-2) + n - 2) + n - 1 \\ &\vdots \\ &= T_{QS}(1) + 1 + 2 + \cdots + n - 2 + n - 1 \\ &\in \Theta(n^2) \end{aligned}$$

2. Extremfall: m immer mittleres Element

$$T_{QS}(n) \approx 2T_{QS}(n/2) + n - 1 \in \Theta(n \log n)$$

siehe MergeSort

```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = ...)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```

```
int Partition(A, ℓ, r)
  pivot = A[r]
  i = ℓ
  for j = ℓ to r − 1 do
    if A[j] ≤ pivot then
      Swap(A, i, j)
      i = i + 1
  Swap(A, i, r)
  return i
```

Wo ist die Wahrheit?

M.a.W. was passiert im Durchschnittsfall (*average case*)?

Vgl. InsertionSort:

$$\text{Bester Fall} = n - 1 \in \Theta(n) \text{ Vergleiche}$$

$$\text{Schlechtester Fall} = \binom{n}{2} \in \Theta(n^2) \text{ Vergleiche}$$

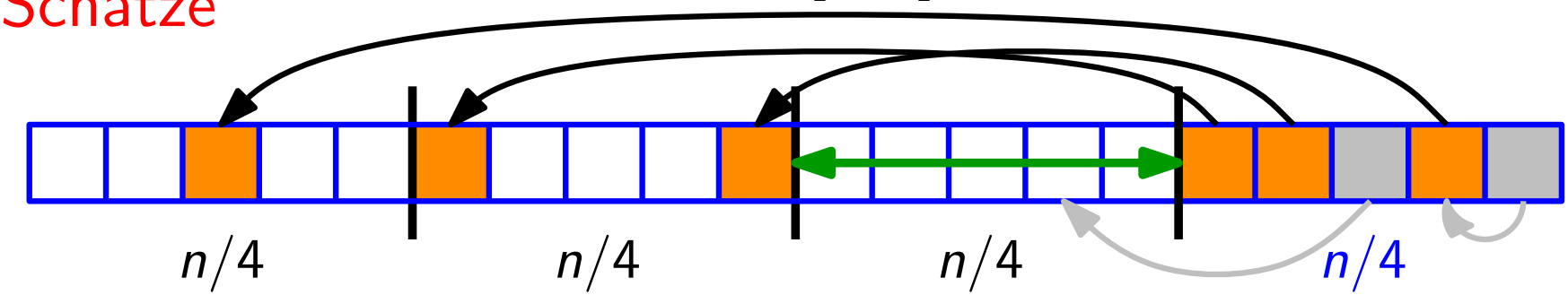
$$\text{Durchschnittsfall} = \Theta(n^2)$$

Mittle die Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe!

Schwierig...

Statt dessen:

~~Berechne~~ Schätze *erwartete* Laufzeit $E[T_{\mathsf{IS}}]$ einer *zufälligen* Permutation ab!



$$E[T_{\mathsf{IS}}] \geq E[\text{Aufwand für letzte } \tfrac{n}{4} \text{ Elem.}] \geq \boxed{\frac{n}{4}} \cdot \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{\frac{n}{4}} \in \Omega(n^2)$$

Zurück zu QuickSort

Idee: *Steck Zufall in den Algorithmus!*

Seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Elemente von A in sortierter Reihenfolge.

Wann vergleicht Alg. z_i und z_j?

* höchstens ein Mal:
wenn eins von beiden $pivot$ ist.

Definiere Indikator-Zufallsvariable:

$$V_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Alg. } z_i \text{ und } z_j \text{ vergleicht,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei V ZV für Gesamtanz. von Vgl.

Dann gilt $V = \sum_{1 \le i < j \le n} V_{ij}$.

$\Rightarrow E[V] = \sum_{1 \le i < j \le n} E[V_{ij}]$

Linearität des Erwartungswerts!

```
RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    k = Random(ℓ, r)   Liefert Zufallszahl ∈ {ℓ, ..., r}.
    Swap(A, r, k)
    return Partition(A, ℓ, r)
```

```
Partition(A, ℓ, r)
    pivot = A[r]
    i = ℓ
    for j = ℓ to r − 1 do
        if A[j] ≤ pivot then
            Swap(A, i, j)
            i = i + 1
    Swap(A, i, r)
    return i
```

First come, first serve

$E[V_{ij}] = \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] = \boxed{?}$

Betrachte die Menge $Z_{ij} := \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j\}$.

Sei $z^\star$ die erste Zahl in Z_{ij}, die Pivot wird.

Es gilt: Alg. vergleicht z_i und $z_j \Leftrightarrow z^\star = z_i$ oder $z^\star = z_j$.

$$\Rightarrow \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] = \Pr[z^\star = z_i \text{ oder } z^\star = z_j]$$

$$\overset{i \neq j}{=} \Pr[z^\star = z_i] + \Pr[z^\star = z_j]$$

$$= \frac{1}{|Z_{ij}|} + \frac{1}{|Z_{ij}|}$$

$$= \frac{2}{j - i + 1}$$

Auf zum letzten Gefecht...

$$E[V_{ij}] = \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] = \frac{2}{j-i+1}$$

Wir wissen:

$$E[V] = \sum_{1 \le i < j \le n} E[V_{ij}] = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{j-i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1}$$

$-i$

Trick: ersetze $j-i$ durch k!

Auf zum letzten Gefecht...

$$E[V_{ij}] = \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] = \frac{2}{j-i+1}$$

Wir wissen:

$$E[V] = \sum_{1 \le i < j \le n} E[V_{ij}] = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{j-i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

Trick: ersetze $j-i$ durch k!

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \in O(n \log n)$$

harmonische Reihe!

Satz: RandomizedQuickSort sortiert n Zahlen in $O(n \log n)$ *erwarteter* Zeit.

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	QuickSort
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
in situ[1] (*in place*)	✓	✗	✓	(✓)*
stabil[2]	✓	✓	✗	✗

[1]) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

[2]) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenf. belässt.

*) QuickSort muss für jeden rekursiven Aufruf die Variable m zwischenspeichern. Dafür wird im worst case $\Omega(n)$ zusätzlicher Speicherplatz benötigt. Mit Tricks kann man dieses Problem umgehen und so QuickSort in-situ machen.