

11. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2019)

Aufgabe 1 – Linienüberdeckung

Das Problem LINIENÜBERDECKUNG ist wie folgt definiert. Gegeben eine endliche Menge von Punkten in der Ebene, finde eine Menge von Geraden, die die Punkte *überdeckt*, d. h. jeder Punkt muss in mindestens einer Geraden enthalten sein.

Zeigen Sie, dass LINIENÜBERDECKUNG festparameterberechenbar ist bezüglich der Kardinalität k der Überdeckung.

Hinweis: Betrachten Sie das Problem als einen Spezialfall eines Problems, das aus der Vorlesung bekannt ist. Wie müssen Sie mit Geraden umgehen, die mehr als k Punkte enthalten? Was ist, wenn es keine solchen Geraden gibt? **7 Punkte**

Aufgabe 2 – Matchings in allgemeinen Graphen

Das Problem MAXIMUM MATCHING (d. h. größte Paarung) in ungerichteten Graphen ist zwar nicht NP-schwer, dennoch ist der Algorithmus mit der besten Worst-Case-Laufzeit für dieses Problem, nämlich $O(E\sqrt{V})$ [Micali und Vazirani, FOCS'80], so kompliziert, dass es kaum Implementierungen gibt. Stattdessen benutzt man einfachere, aber langsamere Algorithmen – oder schnelle Approximationsalgorithmen. Für das Problem MAXIMUM MATCHING könnte man einen Greedy-Algorithmus nutzen, der beginnend mit einem leeren Matching M in jedem Schritt eine Kante $e \notin M$ zu M hinzufügt, so dass $M \cup \{e\}$ wieder ein Matching ist. Der Algorithmus bricht ab, wenn es keine solche Kante mehr gibt.

- Geben Sie den Greedy-Algorithmus in Pseudocode an. Zeigen Sie, dass er für jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ in $O(V+E)$ Zeit ein nicht-erweiterbares Matching liefert. **3 Punkte**
- Zeigen Sie, dass der Greedy-Algorithmus aus Teilaufgabe a) eine $1/2$ -Approximation für ein größtes Matching liefert. **3 Punkte**
- Zeigen Sie, dass die Abschätzung aus Teilaufgabe b) scharf ist, indem Sie eine unendliche Familie von Graphen angeben, in denen ein größtes Matching existiert, das genau doppelt so viele Kanten besitzt wie ein nicht-erweiterbares Matching. **2 Punkte**

Betrachten Sie nun das Problem **MINIMUM MAXIMAL MATCHING**, das in einem ungerichteten Graphen ein nicht-erweiterbares Matching kleinster Kardinalität sucht.

d) Formulieren Sie für dieses Problem ein ganzzahliges lineares Programm.

3 Punkte

e) Zeigen Sie, dass der Greedy-Algorithmus aus Teilaufgabe a) auch eine 2-Approximation für ein kleinstes nicht-erweiterbares Matching liefert.

2 Punkte

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 23. Juli 2019, 8:30 Uhr** in den Vorlesungs-Briefkasten im Informatik-Gebäude. Geben Sie stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen sowie die Übungsgruppe, in der das Blatt zurückgegeben werden soll, an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch und vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn hochgeladen hat.