Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen, Komplexität und
wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 25. Juni 2019

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

8. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2019)

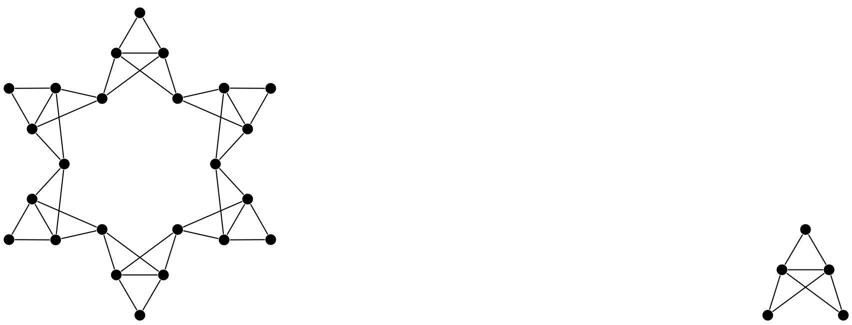
Nehmen Sie noch bis zum 08.07.2019 an der Vorlesungsumfrage zu „Algorithmische Graphentheorie“ teil, um uns hilfreiches Feedback zur Vorlesung und zu den Übungen zu geben.

Aufgabe 1 – Dreifärbbarkeit

Als *Dreifärbung* eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir eine Funktion $f\colon V \to \{r, g, b\}$, bei der für jede Kante $uv \in E$ die Bedingung $f(u) \neq f(v)$ erfüllt ist, d. h. zwei benachbarte Knoten erhalten niemals die selbe Farbe. Das Dreifärbbarkeitsproblem 3COL besteht darin zu entscheiden, ob ein gegebener Graph *dreifärbbar* ist, d. h. ob es eine Dreifärbung des Graphen gibt. Dieses Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

a) Finden Sie eine Dreifärbung des Sterngraphen aus Abbildung 1a und zeigen Sie, dass in jeder solchen Dreifärbung alle Knoten mit Grad 2 (die Zacken des Sterns) die selbe Farbe haben. **2 Punkte**

b) Der Sterngraph aus Teilaufgabe a) fügt sich aus sechs Exemplaren des Turmgraphen aus Abbildung 1b zusammen. Zeigen Sie, dass auch Sterne, die aus mehr oder weniger als sechs Türmen bestehen, dreifärbbar sind, wobei wiederum alle Knoten mit Grad 2 dieselbe Farbe haben müssen. **2 Punkte**



(A) Sterngraph (B) Turmgraph

ABBILDUNG 1: Graphen für Aufgabe 1.

c) Das Problem 3COL4 besteht darin zu entscheiden, ob ein gegebener Graph mit Maximalgrad 4 dreifärbbar ist. Zeigen Sie, dass schon 3COL4 $\mathcal{NP}$-schwer ist, indem Sie eine Polynomialzeit-Reduktion von 3COL auf 3COL4 angeben.

Geben Sie also ein Verfahren an, mit der man für einen beliebigen Graphen entscheiden kann, ob er dreifärbbar ist, indem Sie einen (hypothetischen) Test `Test3COL4` auf Dreifärbbarkeit von Graphen mit Maximalgrad 4 nutzen. Zeigen Sie, dass Ihr Verfahren korrekt ist. **6 Punkte**

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b)!

Aufgabe 2 – Chromatische Zahl

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Die kleinste Zahl k, die eine k-Färbung von G erlaubt, heißt *chromatische Zahl* $\chi(G)$.

a) Sei $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg v$ der maximale Knotengrad in G. Zeigen Sie, dass für die chromatische Zahl von G gilt, dass $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung aus Teilaufgabe a) scharf ist. Geben Sie dazu für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\Delta < n$ einen Graphen $G_{n,\Delta}$ an, der n Knoten besitzt, Maximalgrad Δ aufweist und $\chi(G_{n,\Delta}) = \Delta + 1$ erfüllt. **2 Punkte**

CPLEX c) Implementieren Sie in CPLEX ein ganzzahliges lineares Programm, das $\chi(G)$ für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ermittelt. Ihr Modell muss in der Lage sein, ungerichtete Graphen beliebiger Größe einzulesen. Wählen Sie dazu eine geeignete Darstellung des Graphen in ihrer Daten-Datei. Laden Sie Ihre Lösung (*Modell*- und passende *Daten*-Datei) auf WueCampus hoch. **3 Zusatzpunkte**

Hinweis: Verwenden Sie Ganzzahlen für die Farben.

Aufgabe 3 – Perfektes Eliminationsschema

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass die Graphen mit perfektem Eliminationsschema gerade die chordalen Graphen sind. Zeigen Sie, wie man ein perfektes Eliminationsschema eines chordalen Graphen mit n Knoten in

a) $O(n^4)$ **2 Punkte**

b) $o(n^4)$ **4 Punkte**

Zeit bestimmen kann.

Tipp für b): Setzen Sie den Beweis von Dirac durch einen rekursiven Algorithmus um. Der Beweis geht von einer Menge $U \subset V$ *maximaler Kardinalität* aus, für die gelten muss, dass $G[U]$ zusammenhängend ist und $U \cup N(U) \neq V$ gilt. Argumentieren Sie, dass man die Maximalität von U durch ein schwächeres Kriterium ersetzen kann, das sich leichter überprüfen lässt.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 2. Juli 2019, 8:30 Uhr** in den Vorlesungs-Briefkasten im Informatik-Gebäude. Geben Sie stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen sowie die Übungsgruppe, in der das Blatt zurückgegeben werden soll, an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch und vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn hochgeladen hat.