Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen, Komplexität und wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 18. Juni 2019

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

7. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2019)

Zu Beginn dieses Übungsblatts leiten wir gerne folgendes Rundschreiben der Fachschaftsvertretung Mathematik/Informatik weiter:

Am 9. Juli lohnt es sich gleich doppelt an die Uni zu kommen! Von 9:00-17:30 Uhr findet die Hochschulwahl statt, bei der Ihr aktiv mitentscheiden könnt, wer Euch in den hochschulpolitischen Gremien vertreten soll. Ihr profitiert von einer hohen Wahlbeteilung, da die gewählten VertreterInnen dadurch legitimiert sind, sich für Euch und Eure Interessen einzusetzen! Ab 18:00 Uhr findet dann das alljährliche Sommerfest statt, wo Ihr Euch nach dem Wählen bei Essen und Trinken in lockerer Atmosphäre stärken könnt! Der Gewinn davon kommt Euch wie immer an der Weihnachtsfeier zu Gute. Wir von Eurer Fachschaftsvertretung freuen uns, Euch bei beiden Veranstaltungen zu sehen! :)

Aufgabe 1 – Kleinste Schnitte

Gegeben sei ein ungerichteter zusammenhängender (einfacher) Graph $G = (V, E)$.

a) Einer Ihrer Kommilitonen ist der Meinung, dass die Algorithmen zur Bestimmung eines minimalen Schnitts aus der Vorlesung viel zu kompliziert seien. Er behauptet, dass schon $(\{v\},\ V \setminus \{v\})$ ein minimaler Schnitt ist, falls $v \in V$ ein Knoten kleinsten Grades ist.

   Widerlegen Sie die Behauptung Ihres Kommilitonen. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie, dass es höchstens $O(V^2)$ viele verschiedene kleinste Schnitte geben kann. **3 Punkte**

   Hinweis: Berücksichtigen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit des Algorithmus $\texttt{Contract}$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 – Implementierung von $\texttt{Contract}$

In der Vorlesung wurde der randomisierte Algorithmus $\texttt{Contract}$ zur Bestimmung eines minimalen Schnitts in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ vorgestellt. Bei diesem Algorihmus wurden schrittweise in je $O(E)$ Zeit zwei Knoten einer Kante verschmolzen. Die Kanten wurden gleichverteilt gewählt.

Beschreiben Sie eine Implementierung von $\texttt{Contract}$, die nur $O(V)$ Zeit pro Iteration und insgesamt $O(V^2)$ Zeit benötigt. Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus die zu kontrahierenden Kanten auch weiterhin gleichverteilt auswählt.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass das Bestimmen der Anzahl der Kanten zwischen zwei Knoten, das Ziehen einer Zufallszahl beliebiger Größe sowie eine arithmetische Operation über zwei Zahlen stets in konstanter Zeit möglich ist. Beachten Sie weiter, dass das Ziehen einer Zufallszahl nicht mit der zufälligen Wahl einer Kante gleichzusetzen ist. **6 Punkte**

Aufgabe 3 – Randomisierte größte Schnitte

Das Problem `MaxCut` ist das Problem in einem gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ die Menge V so in zwei Mengen S und T zu partitionieren, dass die Anzahl der Kanten st, mit $s \in S$ und $t \in T$, maximal ist. Im Gegensatz zu `MinCut` ist `MaxCut` $\mathcal{NP}$-vollständig.

Betrachten Sie daher Algorithmus 1.

`randMaxCut`(Ungerichteter Graph $G = (V, E)$)
  $v_1, v_2 \leftarrow$ zufällige Knoten aus V
  $S \leftarrow \{v_1\}; T \leftarrow \{v_2\}$ `// Mengen des Schnitts`
  foreach $v \in V \setminus \{v_1, v_2\}$ **do**
    Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ setze $S \leftarrow S \cup v$
    Sonst setze $T \leftarrow T \cup v$
  return (S, T)

Algorithmus 1 liefert offensichtlich einen zulässigen Schnitt und besitzt eine Laufzeit von $O(V)$.

a) Ihr Kommilitone aus Aufgabe 1 überlegt, ob seine Idee zumindest einen größten Schnitt in einem Graphen $G = (V, E)$ findet.

   Zeigen oder widerlegen Sie, dass schon $(\{v\},\ V \setminus \{v\})$, ein größter Schnitt ist, falls $v \in V$ ein Knoten höchsten Grades ist. **2 Punkte**

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine fest gewählte Kante $e \in E$ auf einem mit Algorithmus 1 berechneten Schnitt liegt? **1 Punkt**

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fester maximaler Schnitt (S, T) von Algorithmus 1 geliefert wird? **2 Punkte**

   Hinweis: Beachten Sie, dass das Vertauschen von S und T den gleichen Schnitt liefert.

d) Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 eine erwartete Güte von $1/2$ besitzt. Zeigen Sie dazu zunächst, dass die erwartete Anzahl an Kanten, die auf dem Schnitt liegen, $|E|/2$ ist. **4 Punkte**

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 25. Juni 2019, 08:30 Uhr** in den Vorlesungs-Briefkasten im Informatik-Gebäude. Geben Sie stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen sowie die Übungsgruppe, in der das Blatt zurückgegeben werden soll, an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch und vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn hochgeladen hat.