Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen, Komplexität und wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 4. Juni 2019

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

6. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2019)

Aufgabe 1 – Eigenschaften von Wurzelspannbäumen

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s \in V$ ein ausgezeichneter Knoten.

Ein Knoten w ist von einem Knoten v *erreichbar*, wenn es einen v-w-Weg gibt. Die *Erreichbarkeitsmenge* $E(v)$ eines Knotens v ist die Menge aller Knoten, die von v erreichbar sind. Insbesondere ist $v \in E(v)$.

Wir wollen zeigen, dass G genau dann einen s-Wurzelspannbaum besitzt, wenn $E(s) = V$ ist. Beweisen Sie dazu die folgenden beiden Aussagen:

a) Falls G einen s-Wurzelspannbaum besitzt, dann ist $E(s) = V$. **2 Punkte**

b) Falls $E(s) = V$, so lässt sich mit Hilfe der Tiefensuche ein s-Wurzelspannbaum ermitteln (und insbesondere existiert ein s-Wurzelspannbaum). **4 Punkte**

Sei G nun kreisfrei (d. h. ohne gerichtete Kreise). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

c) Wenn G zwei Wurzelspannbäume besitzt, dann haben beide dieselbe Wurzel. **2 Punkte**

d) Wenn G einen Wurzelspannbaum besitzt, dann ist dieser eindeutig bestimmt. **2 Punkte**

Aufgabe 2 – Wurzelspannbäume und ungerichtete Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und s ein ausgezeichneter Knoten.

Zeigen Sie: G ist genau dann ein s-Wurzelspannbaum, wenn der G zugrunde liegende ungerichtete Graph ein Baum ist und $\text{indeg}(v) = 1$ für $v \neq s$ und $\text{indeg}(s) = 0$ gilt. **5 Zusatzpunkte**

Aufgabe 3 – Wurzelspannbäume in azyklischen Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter azyklischer Graph, d. h. ein Graph ohne gerichtete Kreise und $s \in V$ ein Knoten, von dem aus alle anderen Knoten erreichbar sind. Sei $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion, die jeder Kante ein nichtnegatives Gewicht zuordnet.

a) Zeigen Sie: Der Algorithmus von Kruskal berechnet im Allgemeinen keinen minimalen s-Wurzelspannbaum von G. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie: Der Algorithmus von Jarník-Prim mit Startknoten s berechnet im Allgemeinen keinen minimalen s-Wurzelspannbaum von G. **2 Punkte**

Betrachten Sie nun den folgenden Algorithmus:

DAGMST(Graph $G = (V, E)$, Knoten s, Kostenfunktion c)
  $E' = \emptyset$
  foreach $v \in V \setminus s$ **do**
    $e(v) = \arg\min_{(u,v) \in E} c(u, v)$
    $E' = E' \cup \{e(v)\}$
  return $T = (V, E')$

c) Zeigen Sie: DAGMST berechnet einen s-Wurzelspannbaum von G. **3 Punkte**

d) Zeigen Sie: Der vom DAGMST berechnete Wurzelspannbaum ist *minimal*. **3 Punkte**

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 18. Juni 2019, 8:30 Uhr** in den Vorlesungs-Briefkasten im Informatik-Gebäude. Geben Sie stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen sowie die Übungsgruppe, in der das Blatt zurückgegeben werden soll, an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch und vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn hochgeladen hat.