Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen, Komplexität und wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 28. Mai 2019

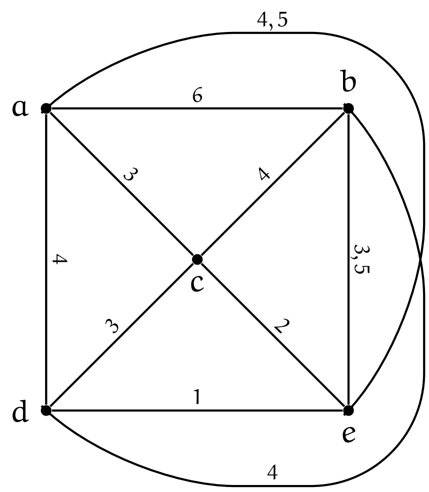
Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

5. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2019)

Aufgabe 1 – Christofides' Algorithmus

Gegeben sei folgender vollständiger und ungerichteter Graph G mit Kantengewichten, sodass G metrisch ist.

G:



a) Wenden Sie den Algorithmus von Christofides auf G an, um eine Lösung für das Problem des Handlungsreisenden (TSP) zu finden. Geben Sie bei allen Schritten des Algorithmus genau und nachvollziehbar an, was getan wird. Wie lange ist Ihre gefundene TSP-Tour? **6 Punkte**

b) Christofides' Algorithmus liefert nicht immer eine optimale Lösung, allerdings eine gültige Lösung, die höchstens 3/2 mal die Länge einer optimalen TSP-Tour hat. Geben Sie für G eine TSP-Tour an, die kürzer ist als die von Ihnen gefundene und nicht mit dem Algorithmus von Christofides gefunden werden kann. **1 Punkt**

Aufgabe 2 – Kreise

Ein *Hyperwürfel der Dimension* $d \geq 2$ ist ein Graph $H_d = (V_d, E_d)$ mit der Knotenmenge $V_d = \{0,1\}^d = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_i \in \{0,1\} \text{ für } i = 1, \ldots, d\}$. Zwei Knoten aus H_d sind benachbart in H_d, wenn sie sich in genau einer Koordinate x_i unterscheiden.

a) Für welche Werte von d besitzt H_d einen *Eulerkreis*? Zeigen Sie, dass Ihre Behauptung korrekt ist. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie per Induktion über die Dimension d, dass jeder Hyperwürfel einen *Hamiltonkreis* besitzt. **3 Punkte**

Aufgabe 3 – Hamiltonkreise

Ein sogenannter *Turniergraph* $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $|V| \geq 3$, der für jedes Paar $v_i \neq v_j$ von Knoten entweder die gerichtete Kante (v_i, v_j) oder die umgekehrt gerichtete Kante (v_j, v_i) besitzt. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *stark zusammenhängend*, wenn es für jedes Paar $(v, w) \in V \times V$ einen gerichteten Weg von v nach w in G gibt.

Gegeben sei nun ein stark zusammenhängender Turniergraph $G = (V, E)$. Zeigen Sie, dass G einen Hamiltonkreis besitzt. Gehen Sie dazu nach den folgenden Schritten vor:

a) Zeigen Sie: jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Kreis der Länge ≥ 3. **1 Punkt**

Hinweis: Wählen Sie eine Kante und nutzen Sie den starken Zusammenhang von G.

b) Zeigen Sie: jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Kreis der Länge $= 3$. **2 Punkte**

Hinweis: Wählen Sie einen nach a) existierenden Kreis und machen Sie diesen schrittweise kürzer.

c) Betrachten Sie einen Kreis C in G. Sei $V(C)$ die Menge der Knoten in C. Nehmen Sie an, dass C maximal ist, aber kein Hamiltonkreis, d.h. $V(C) \neq V$. Betrachten Sie einen Knoten $v \notin V(C)$.

Zeigen Sie: Ist $w \in C$ und $(w, v) \in E$, so ist auch $(w', v) \in E$ für den Nachfolger w' von w auf dem Kreis C. **1 Punkt**

d) Folgern Sie aus c): (i) Entweder gilt für alle Knoten $w \in V(C)$, dass $(v, w) \in E$, oder (ii) für alle Knoten $w \in V(C)$ gilt, dass $(w, v) \in E$. **1 Punkt**

e) Sei nun V_1 die Menge aller Knoten $v \in V \setminus V(C)$, für die Bedingung (i) gilt, und V_2 die Menge aller Knoten $v \in V \setminus V(C)$, für die Bedingung (ii) gilt.

Zeigen Sie: Ist $V(C) \neq V$, so sind weder V_1 noch V_2 leer. **1 Punkt**

Hinweis: Verwenden Sie, dass G stark zusammenhängend ist.

f) Führen Sie nun mit Hilfe der Mengen V_1 und V_2 die Maximalität von C im Fall $V(C) \neq V$ zum Widerspruch. Damit haben Sie gezeigt, dass G einen Hamiltonkreis besitzt. **2 Punkte**

Hinweis: Versuchen Sie den Kreis mit Hilfe einer geeignete Kanten zwischen Knoten aus V_1 und V_2 zu verlängern.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis **Mittwoch, 12. Juni 2019, 10:00 Uhr** in den Vorlesungs-Briefkasten im Informatik-Gebäude. Geben Sie stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen sowie die Übungsgruppe, in der das Blatt zurückgegeben werden soll, an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\texttt{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch und vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn hochgeladen hat.