

# 1. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2019)

## Aufgabe 1 – Spannbäume & Breitensuche

Begründen Sie jeweils, warum die Behauptung korrekt ist, oder widerlegen Sie die Behauptung anhand eines Gegenbeispiels.

- a) Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph,  $s \in V$  und  $w(e) = 1$  für alle  $e \in E$ . Dann ist jeder Breitensuchbaum mit Quelle  $s$  ein minimaler Spannbaum von  $G$ .

**2 Punkte**

- b) Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph,  $s \in V$  und  $w(e) = 1$  für alle  $e \in E$ . Dann ist jeder minimale Spannbaum von  $G$  ein Breitensuchbaum mit Quelle  $s$ .

**2 Punkte**

## Aufgabe 2 – Zweifärbbarkeit

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt zweifärbbar, wenn eine Abbildung  $c: V \rightarrow \{\text{red}, \text{blue}\}$  existiert, so dass für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gilt, dass  $c(u) \neq c(v)$ . In anderen Worten, die Knoten eines zweifärbbaren Graphen können wir so färben, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe bekommen.

- a) Welches ist der kleinste Graph (gemessen an der Anzahl der Knoten), der nicht zweifärbbar ist?

**2 Punkte**

- b) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  und eine gegebene Färbung  $c$  testet, ob es zwei benachbarte Knoten mit derselben Farbe gibt. Was ist die asymptotische Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus?

**3 Punkte**

- c) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  ermittelt, ob er zweifärbbar ist. Die Laufzeit des Algorithmus soll  $O(|V| + |E|)$  sein. Beachten Sie, dass der Graph  $G$  nicht notwendigerweise zusammenhängend ist.

**5 Punkte**

### Aufgabe 3 – Schach

Gesucht ist ein Algorithmus, der ermittelt, wieviele Züge man benötigt, um auf einem Schachbrett mit  $n \times n$  Feldern einen Springer von Feld  $(x_1, y_1)$  zu Feld  $(x_2, y_2)$  zu bewegen.

- a) Beschreiben Sie, wie Sie das Problem als Kürzeste-Wege-Problem auf einem Graphen modellieren können. Was repräsentieren die Knoten und Kanten des Graphen? **1 Punkt**
- b) Ist der Graph zweifärbbar (entsprechend der Definition in Aufgabe 2)? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 Punkt**
- c) Geben Sie für das gewöhnliche Schachbrett mit  $8 \times 8$  Feldern die genaue Anzahl der Kanten des Graphen an. **1 Punkt**
- d) Geben Sie für ein Schachbrett mit  $n \times n$  Feldern eine scharfe obere Schranke für die Anzahl der Kanten an. Verwenden Sie dafür die Groß-O-Notation. **1 Punkt**
- e) Geben Sie einen Algorithmus an, der für ein als Graph  $G$  gegebenes Schachbrett die erforderliche Anzahl an Zügen in  $\Theta(n^2)$  Zeit berechnet. Begründen Sie, warum der Algorithmus diese Laufzeit hat. **2 Punkte**

---

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 7. Mai 2019, 8:30 Uhr** in den Vorlesungs-Briefkasten im Informatik-Gebäude. Geben Sie stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen sowie die Übungsgruppe, in der das Blatt zurückgegeben werden soll, an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!