Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2019

2. Vorlesung

Lineares Programmieren

Prof. Dr. Alexander Wolff
heute vertreten von: Johannes Zink

Lehrstuhl für Informatik I

Gewinnmaximierung

Sie sind Chef einer kleinen Firma, die zwei Produkte P_1 und P_2 herstellt. Produzieren Sie x_1 Einheiten P_1 und x_2 Einheiten P_2, so beträgt Ihr Gewinn in €

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2$$

Drei Mitarbeiter M_A, M_B und M_C produzieren die dafür jeweils notwendigen Einzelteile. Dabei brauchen sie eine bestimmte Zeit pro Teil und haben jeweils eine maximale Arbeitszeit, die die Produktion der Einzelteile einschränkt:

$$\begin{aligned} M_A: \quad & 4x_1 + 11x_2 \leq 880 \\ M_B: \quad & x_1 + x_2 \leq 150 \\ M_C: \quad & x_2 \leq 60 \end{aligned}$$

Welche Wahl von (x_1, x_2) maximiert den Gewinn?

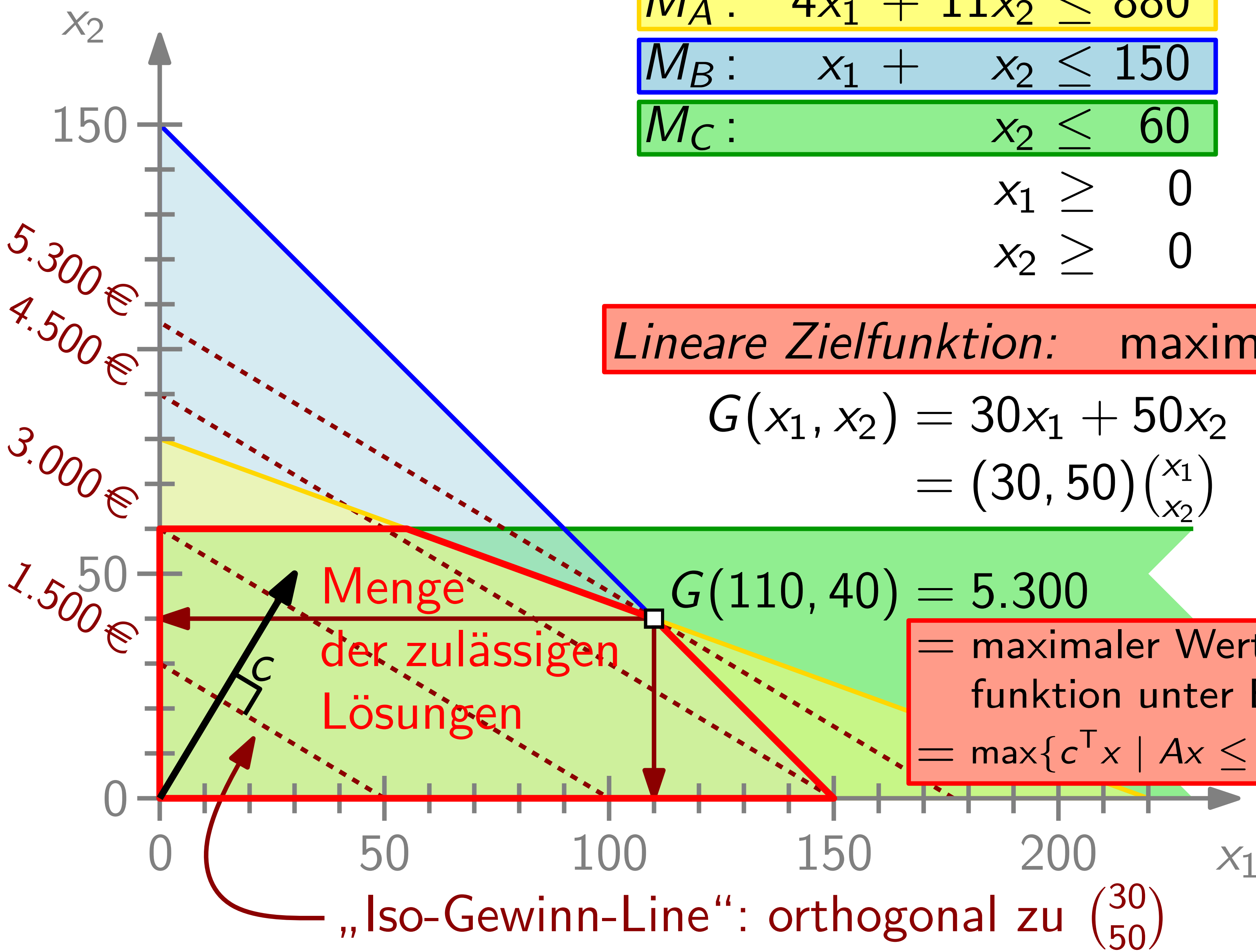
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{array}{lrcl}
M_A: & 4x_1 + 11x_2 & \le & 880 \\
M_B: & x_1 + x_2 & \le & 150 \\
M_C: & x_2 & \le & 60 \\
 & x_1 & \ge & 0 \\
 & x_2 & \ge & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
Ax \le b \\
\\
x \ge 0
\end{array}
$$

Lineare Zielfunktion: maximiere $c^{\mathsf{T}}x$

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



$G(110, 40) = 5.300$

= maximaler Wert der Zielfunktion unter Beschränk.

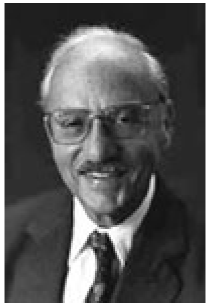
$= \max\{c^{\mathsf{T}}x \mid Ax \le b, x \ge 0\}$

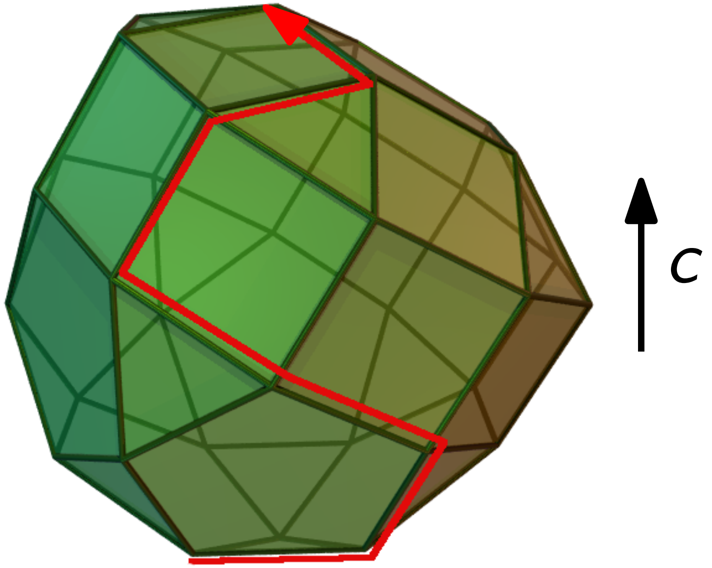
Lineares Programmieren I

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Satz. [Dantzig, 1947]
Der Simplex-Algorithmus löst lineare Programme.



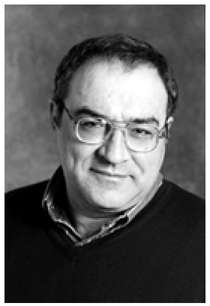


Satz. [Klee & Minty, 1972]
Es gibt Beispiele, auf denen der Simplex-Algorithmus exponentielle Zeit benötigt.

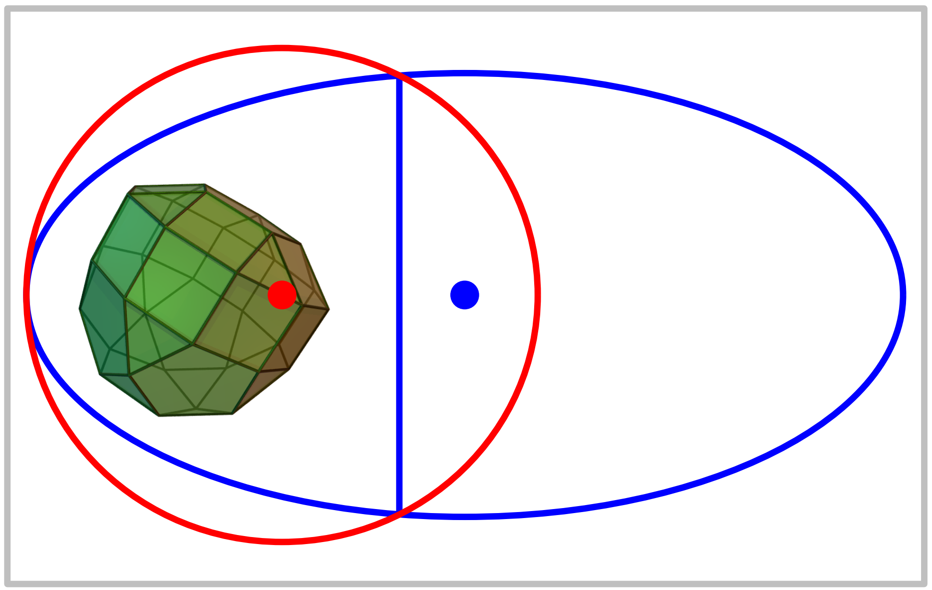
Lineares Programmieren II

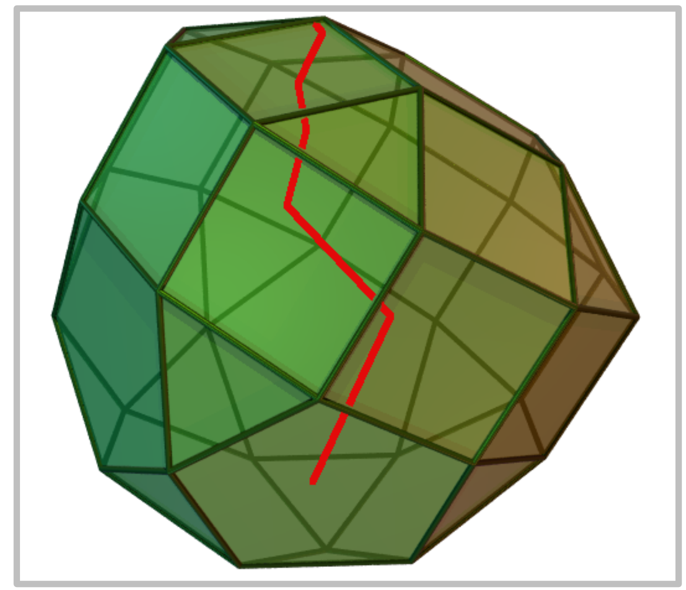
Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ





Narendra Karmarkar
*1957 Gwalior, Indien

Satz. [Karmakar, 1984] *Innere-Punkt-Methode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^{3.5})$ Zeit *numerisch stabil* lösen.

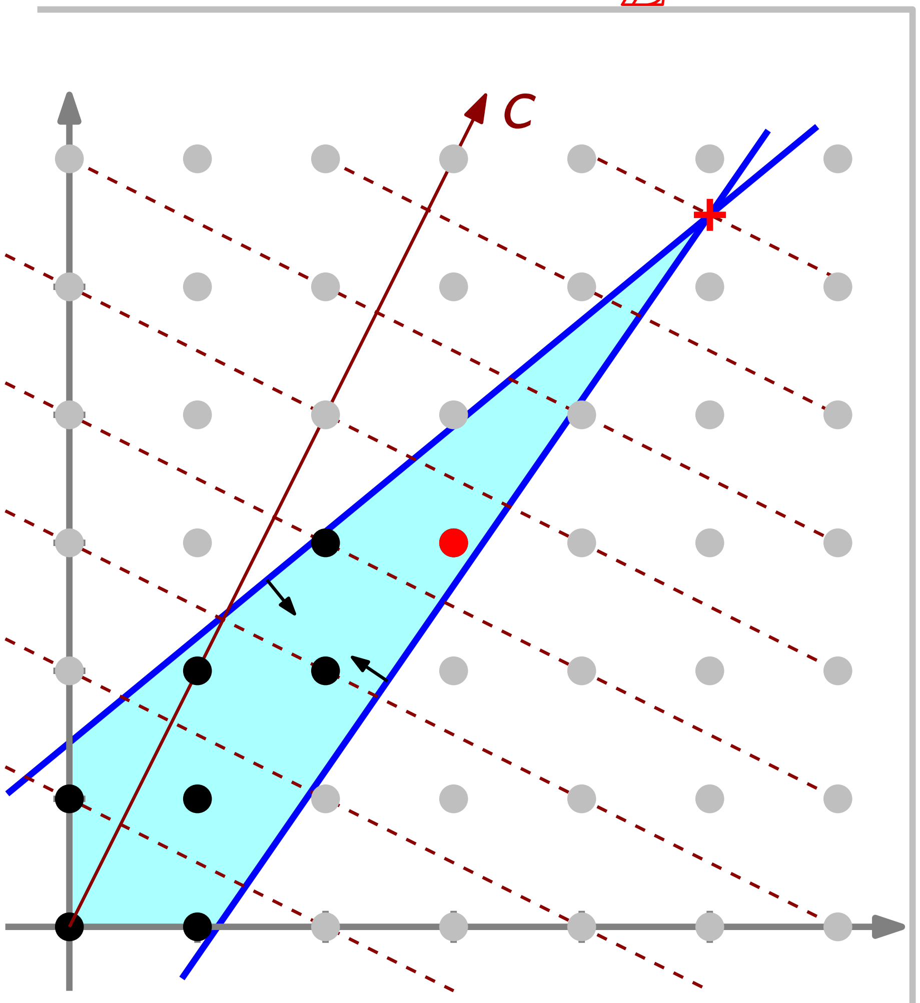
Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}^n$



Problem.

NP-schwer

Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell.

0-1-ILP

$\Downarrow$

NP-schwer

Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0,1\}$.

Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$

Beschränkungen:

für jede Kante $uv \in E$ fordern wir $x_u + x_v \geq 1$.