Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2019

2. Vorlesung

Lineares Programmieren

Prof. Dr. Alexander Wolff
heute vertreten von: Johannes Zink

Lehrstuhl für Informatik I

Gewinnmaximierung

Sie sind Chef einer kleinen Firma, die zwei Produkte P_1 und P_2 herstellt. Produzieren Sie x_1 Einheiten P_1 und x_2 Einheiten P_2, so beträgt Ihr Gewinn in €

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2$$

Drei Mitarbeiter M_A, M_B und M_C produzieren die dafür jeweils notwendigen Einzelteile. Dabei brauchen sie eine bestimmte Zeit pro Teil und haben jeweils eine maximale Arbeitszeit, die die Produktion der Einzelteile einschränkt:

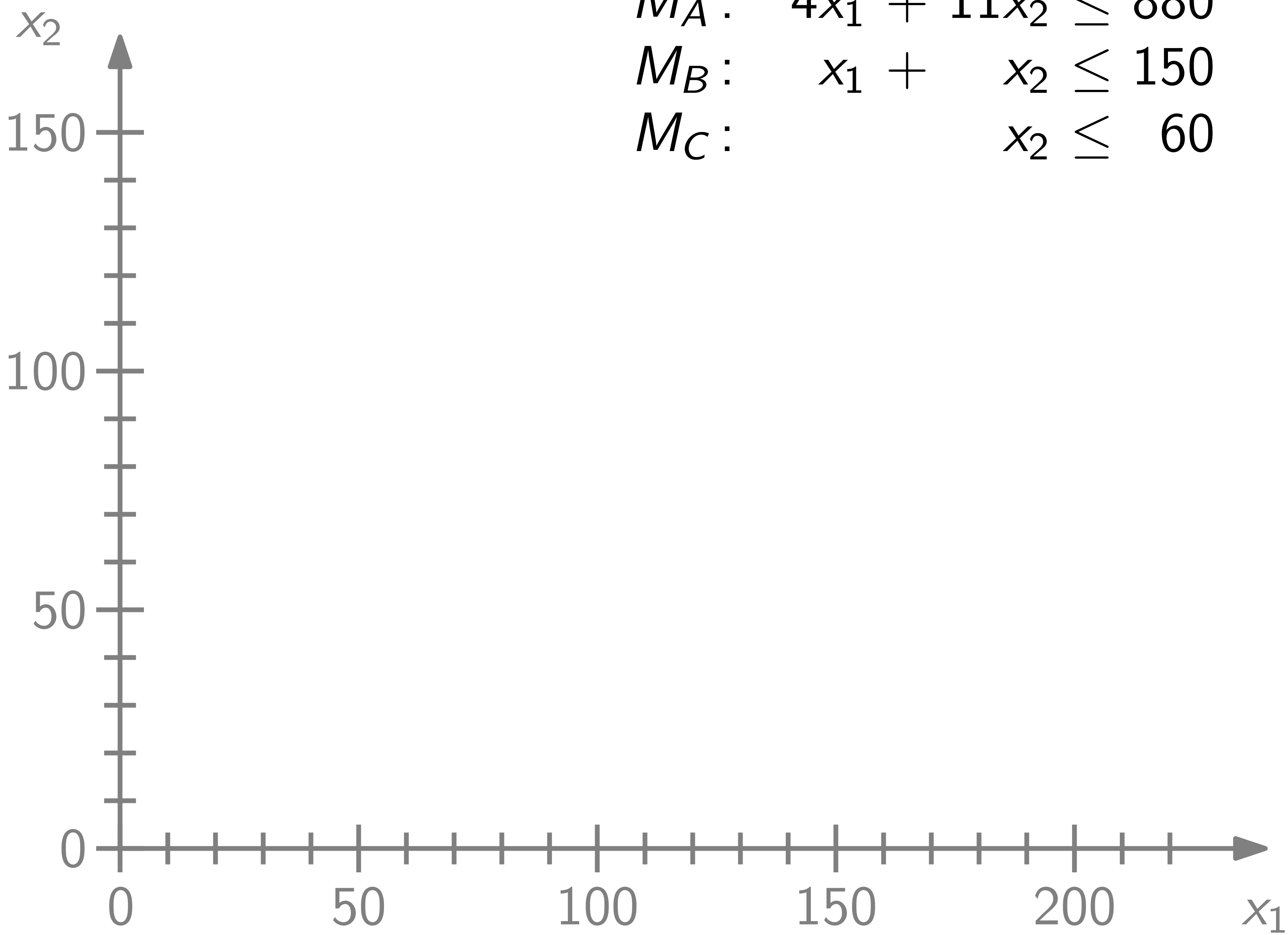
$$\begin{aligned}
M_A:&\quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880\\
M_B:&\quad x_1 + x_2 \leq 150\\
M_C:&\quad x_2 \leq 60
\end{aligned}$$

Welche Wahl von (x_1, x_2) maximiert den Gewinn?

Lösung

Lineare Beschränkungen:

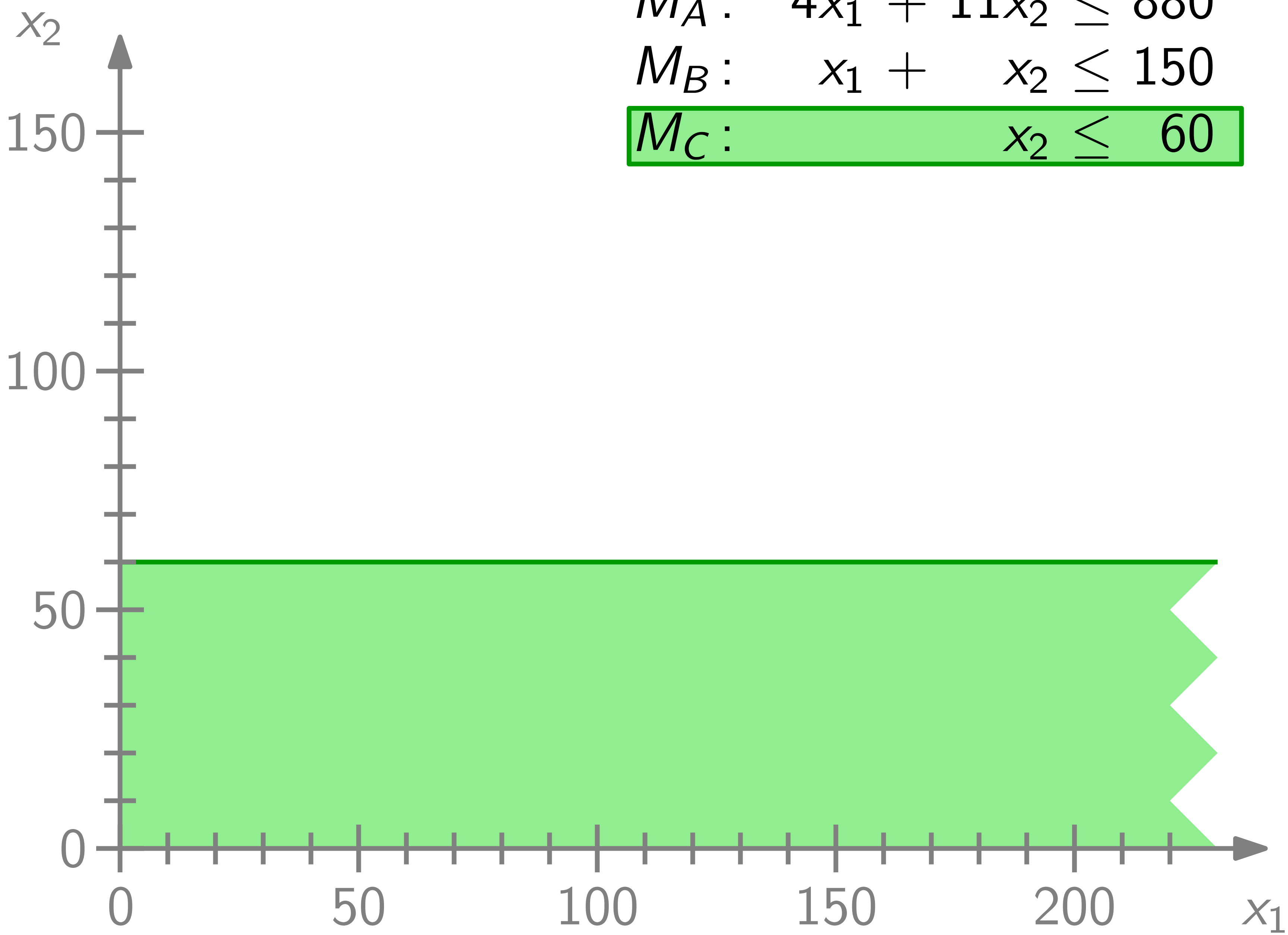
$$\begin{aligned} M_A: &\quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880 \\ M_B: &\quad x_1 + x_2 \leq 150 \\ M_C: &\quad x_2 \leq 60 \end{aligned}$$



Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880$$
$$M_B: \quad x_1 + x_2 \leq 150$$
$$\boxed{M_C: \quad x_2 \leq 60}$$



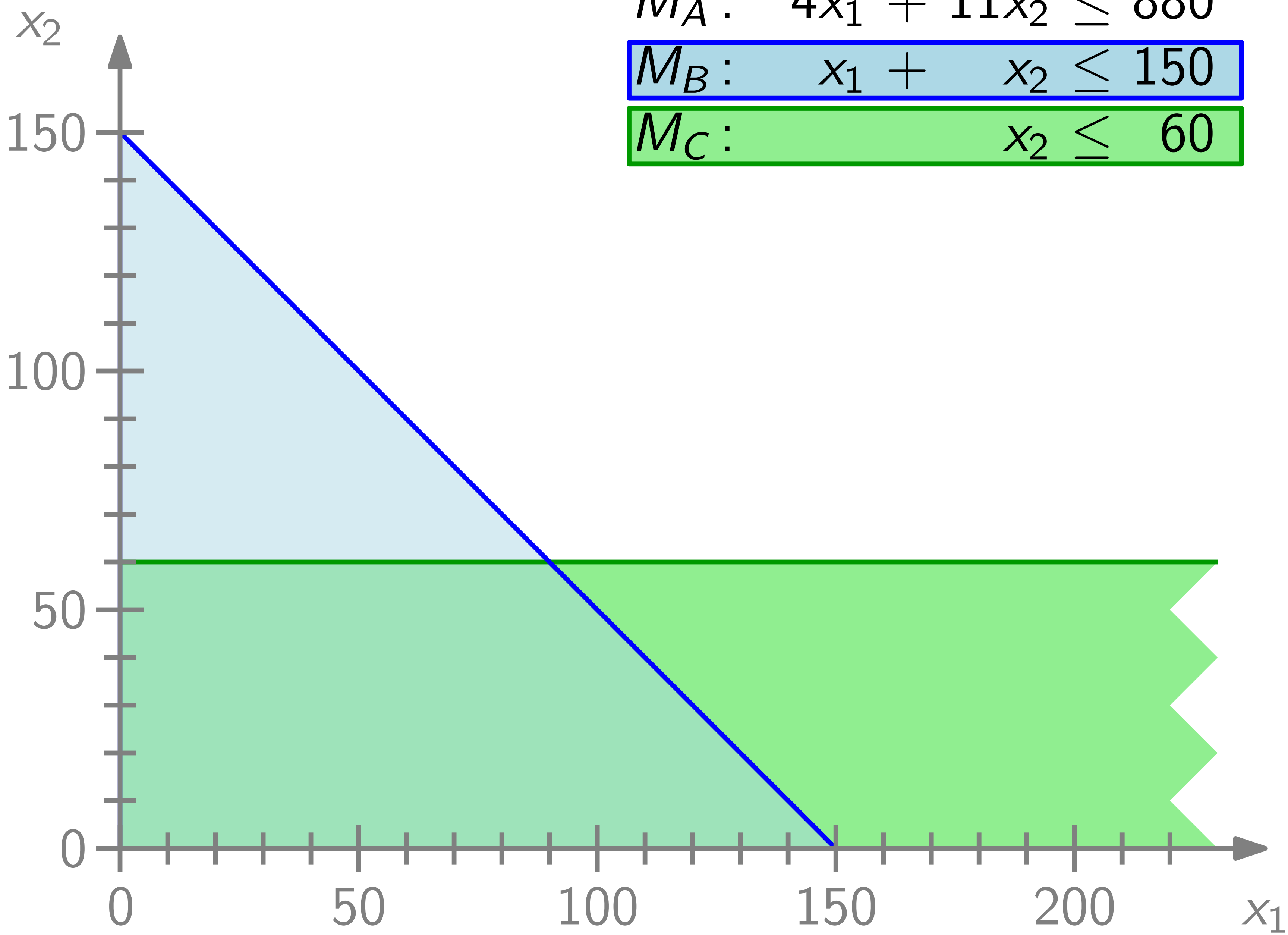
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880$$

$$\boxed{M_B: \quad x_1 + x_2 \leq 150}$$

$$\boxed{M_C: \quad x_2 \leq 60}$$



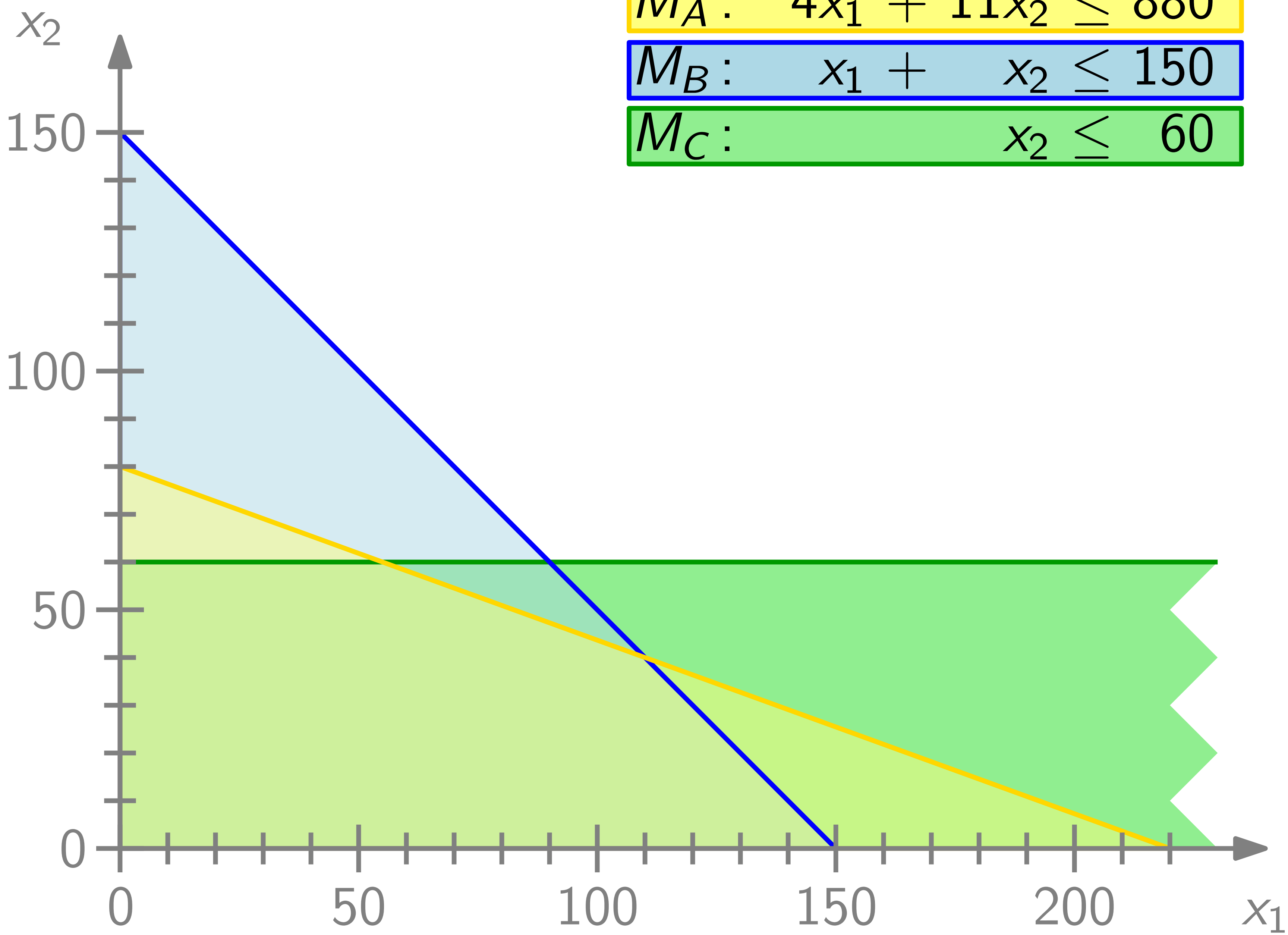
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880$$

$$M_B: \quad x_1 + x_2 \leq 150$$

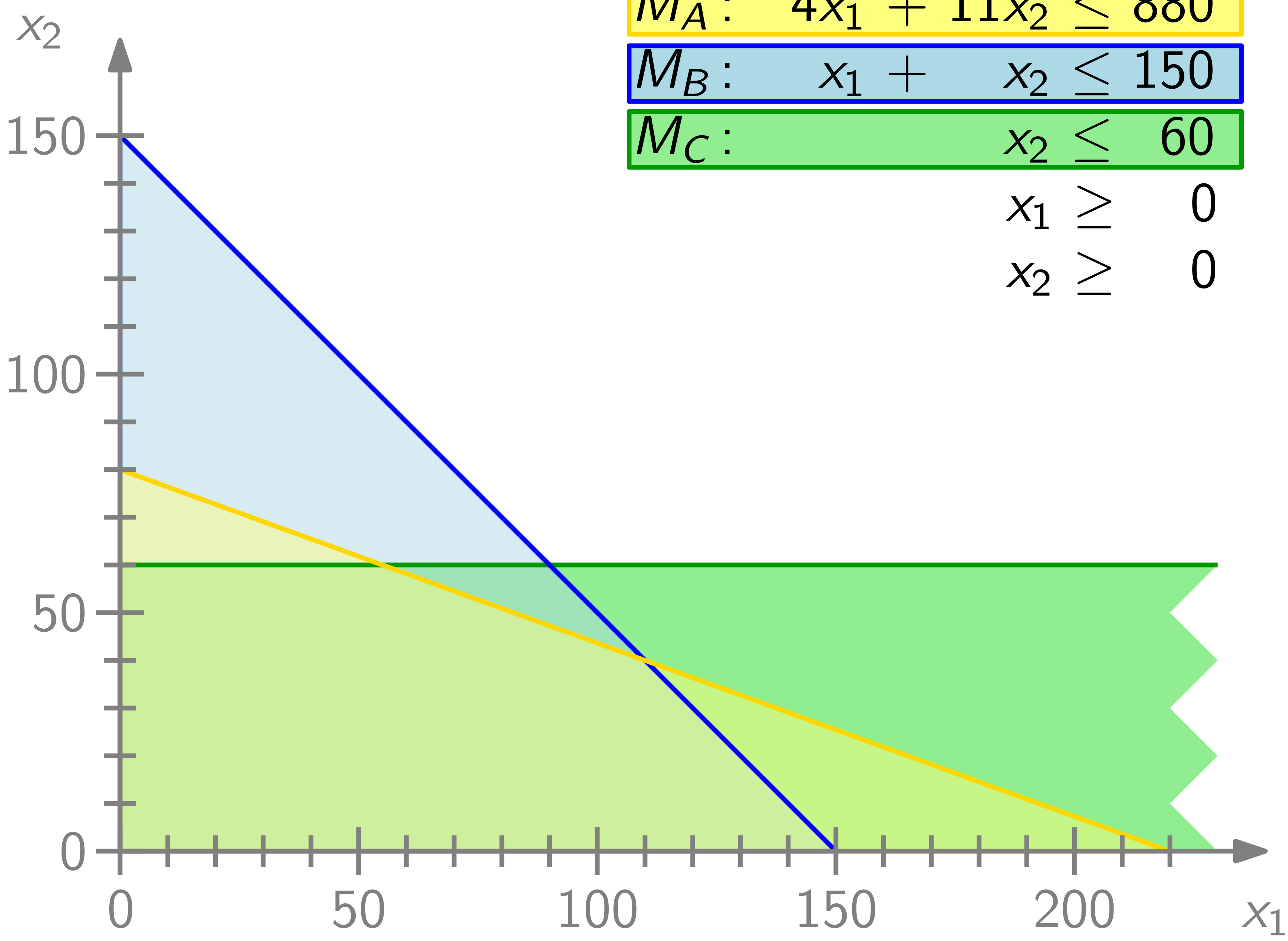
$$M_C: \quad x_2 \leq 60$$



Lösung

Lineare Beschränkungen:

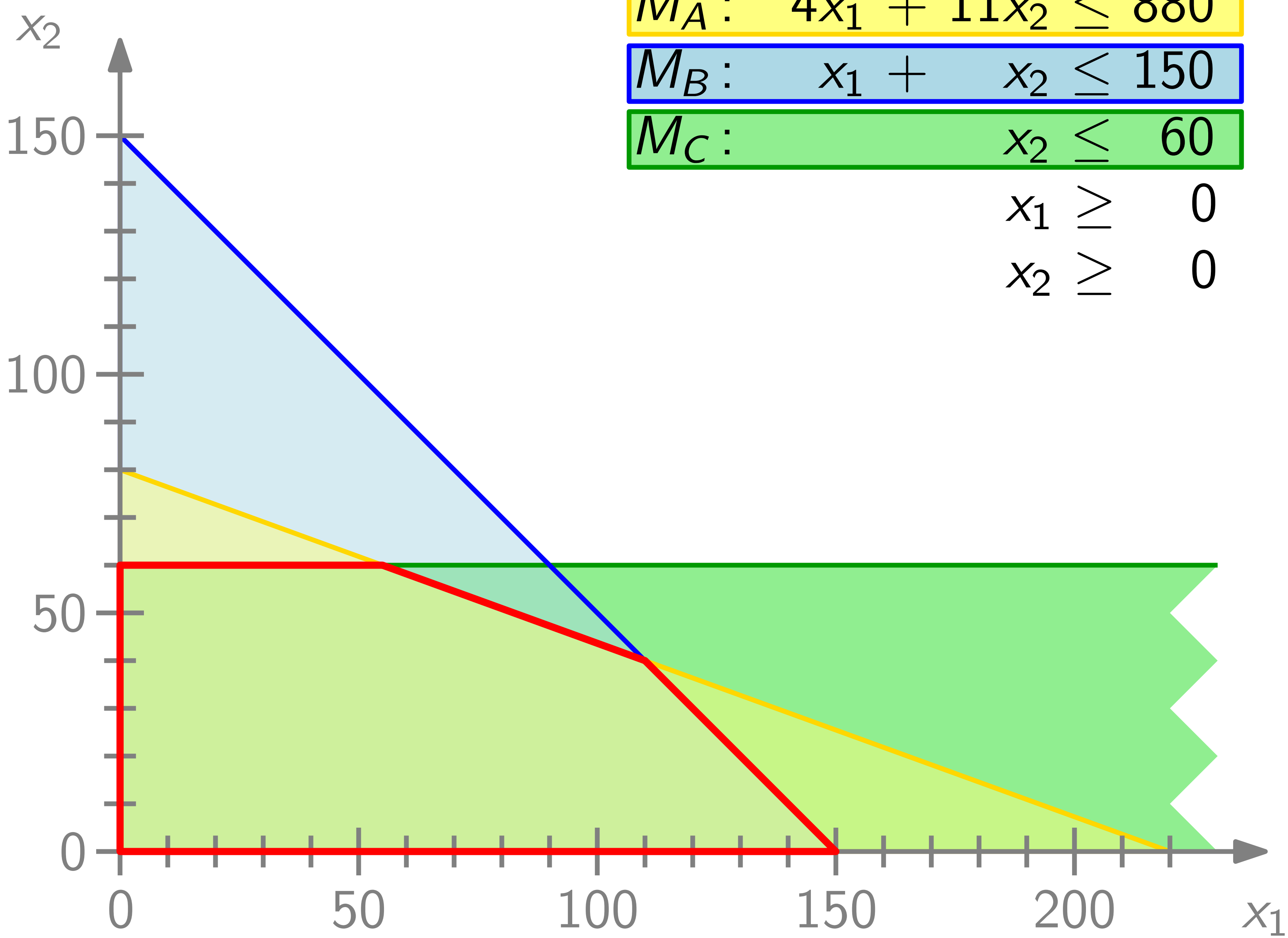
$$\begin{aligned} M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 &\leq 880 \\ M_B: \quad x_1 + x_2 &\leq 150 \\ M_C: \quad x_2 &\leq 60 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Lösung

Lineare Beschränkungen:

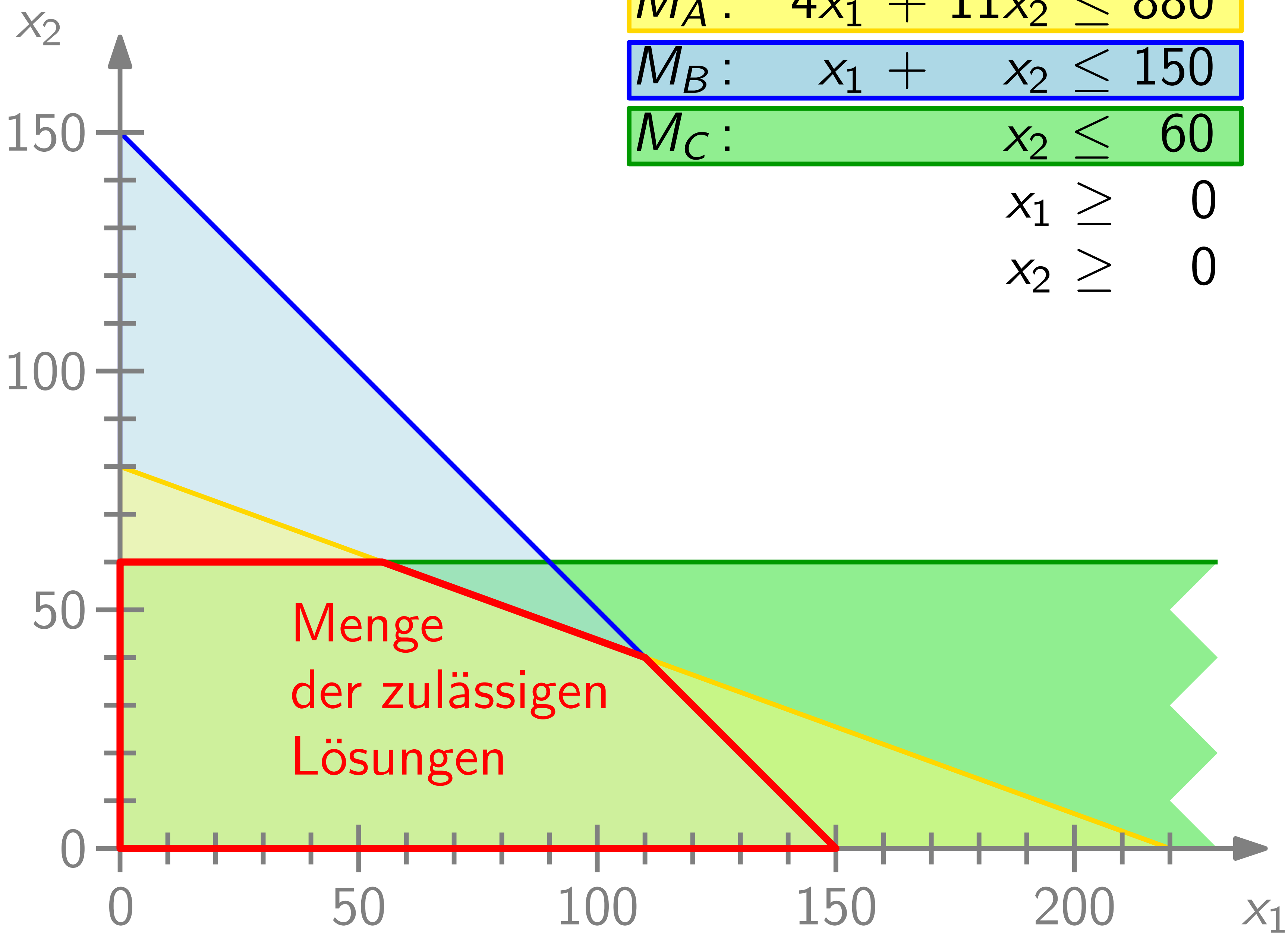
$$
\begin{array}{lrcrcl}
M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\
M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\
M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{array}{lrcl} M_A: & 4x_1 + 11x_2 & \leq & 880 \\ M_B: & x_1 + x_2 & \leq & 150 \\ M_C: & x_2 & \leq & 60 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



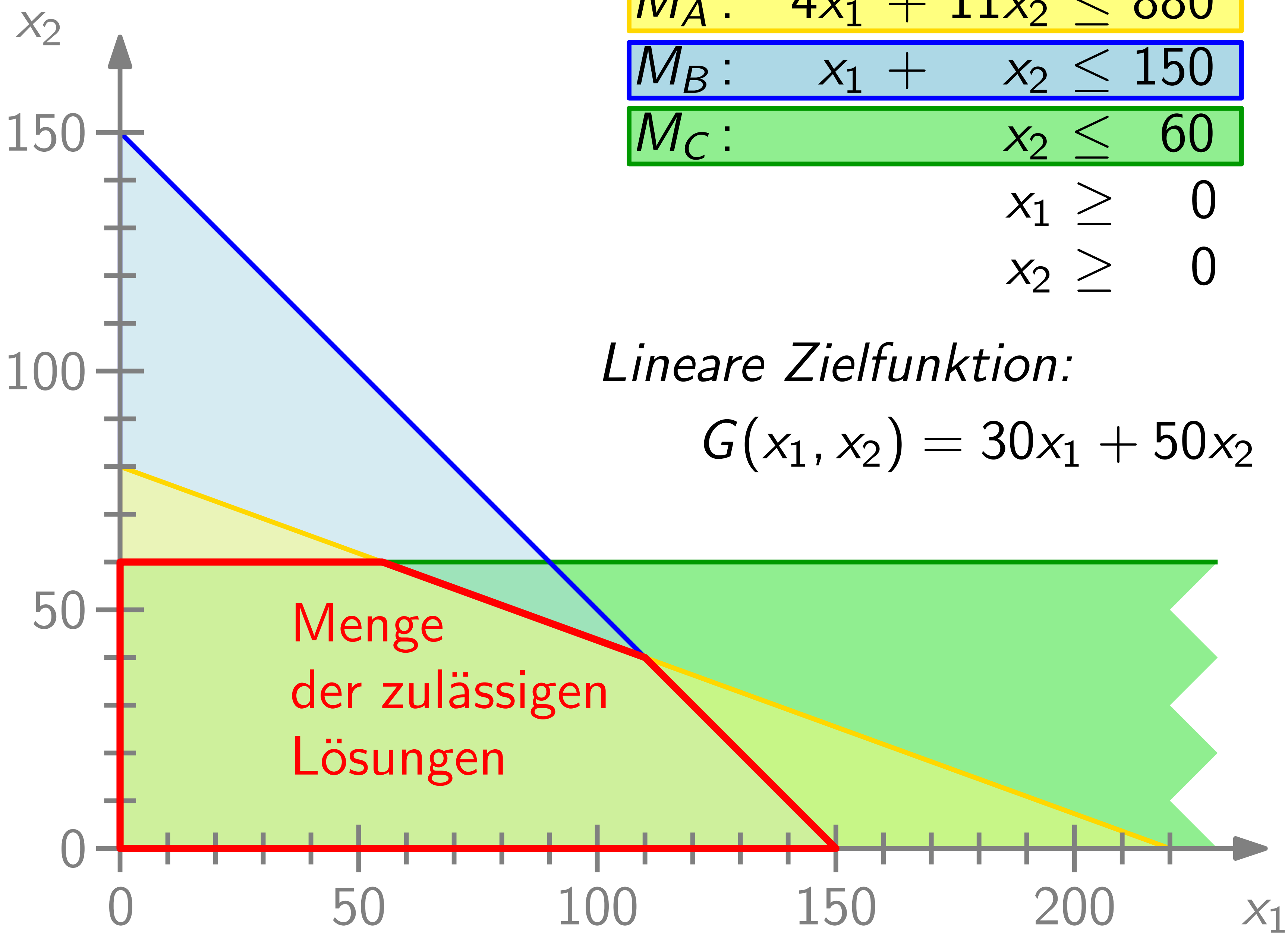
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{array}{lrcrcl} M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\ M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\ M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lineare Zielfunktion:

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2$$



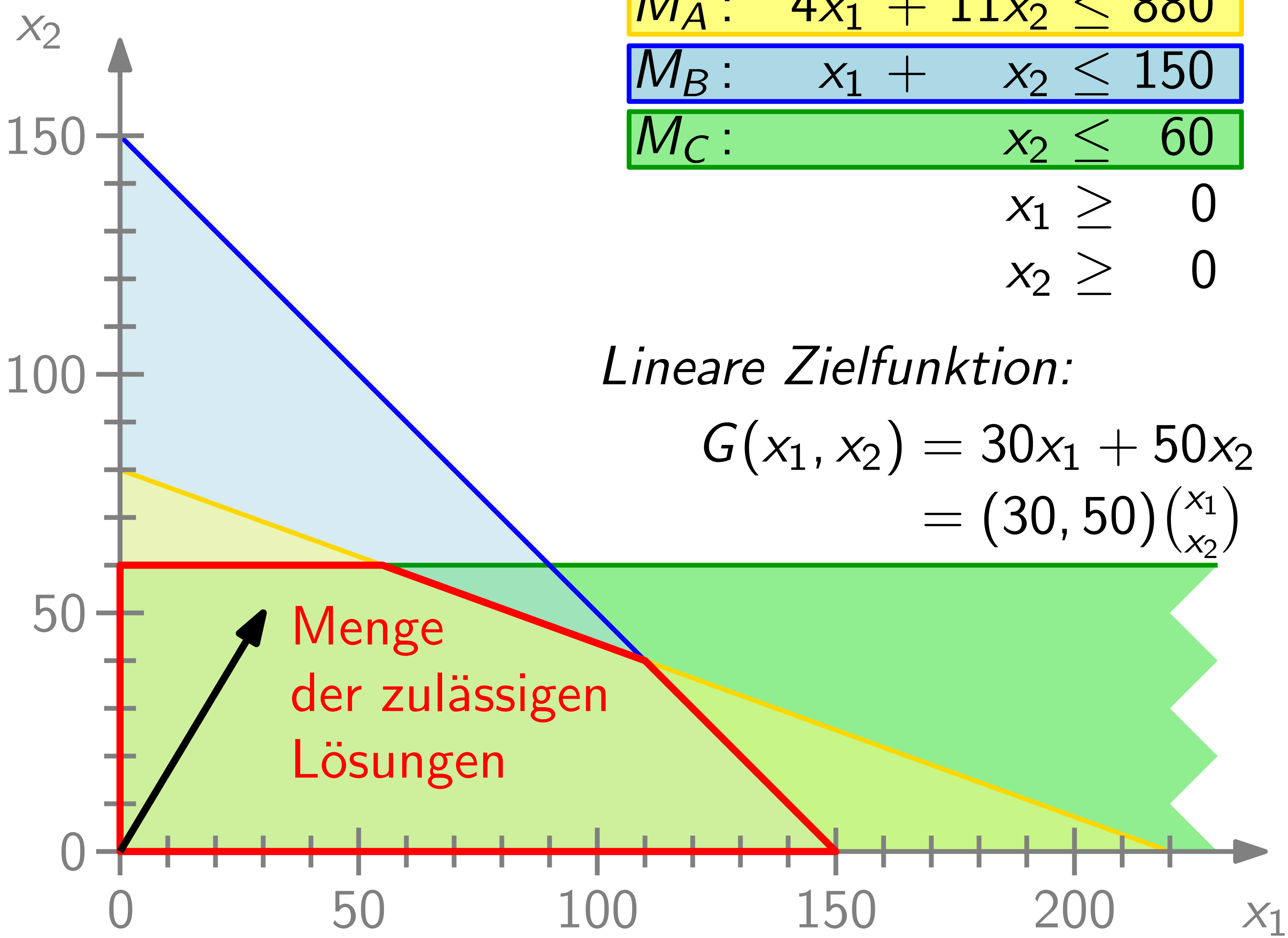
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{aligned}
\boxed{M_A:\quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880}\\
\boxed{M_B:\quad x_1 + x_2 \leq 150}\\
\boxed{M_C:\quad x_2 \leq 60}\\
x_1 \geq 0\\
x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Lineare Zielfunktion:

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2\\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}$$



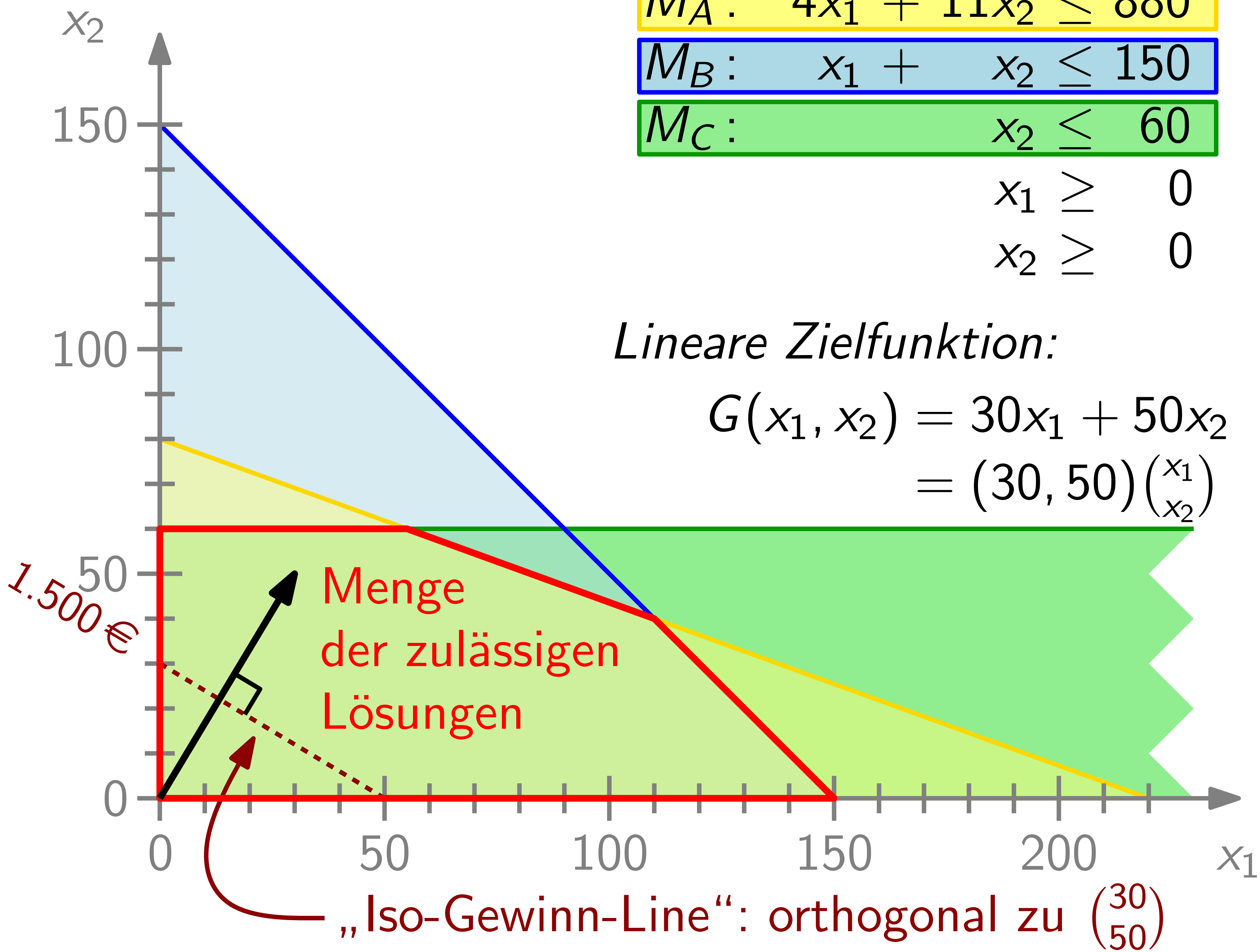
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{aligned} M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 &\le 880 \\ M_B: \quad x_1 + x_2 &\le 150 \\ M_C: \quad x_2 &\le 60 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Lineare Zielfunktion:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\ &= (30, 50)\binom{x_1}{x_2} \end{aligned}$$



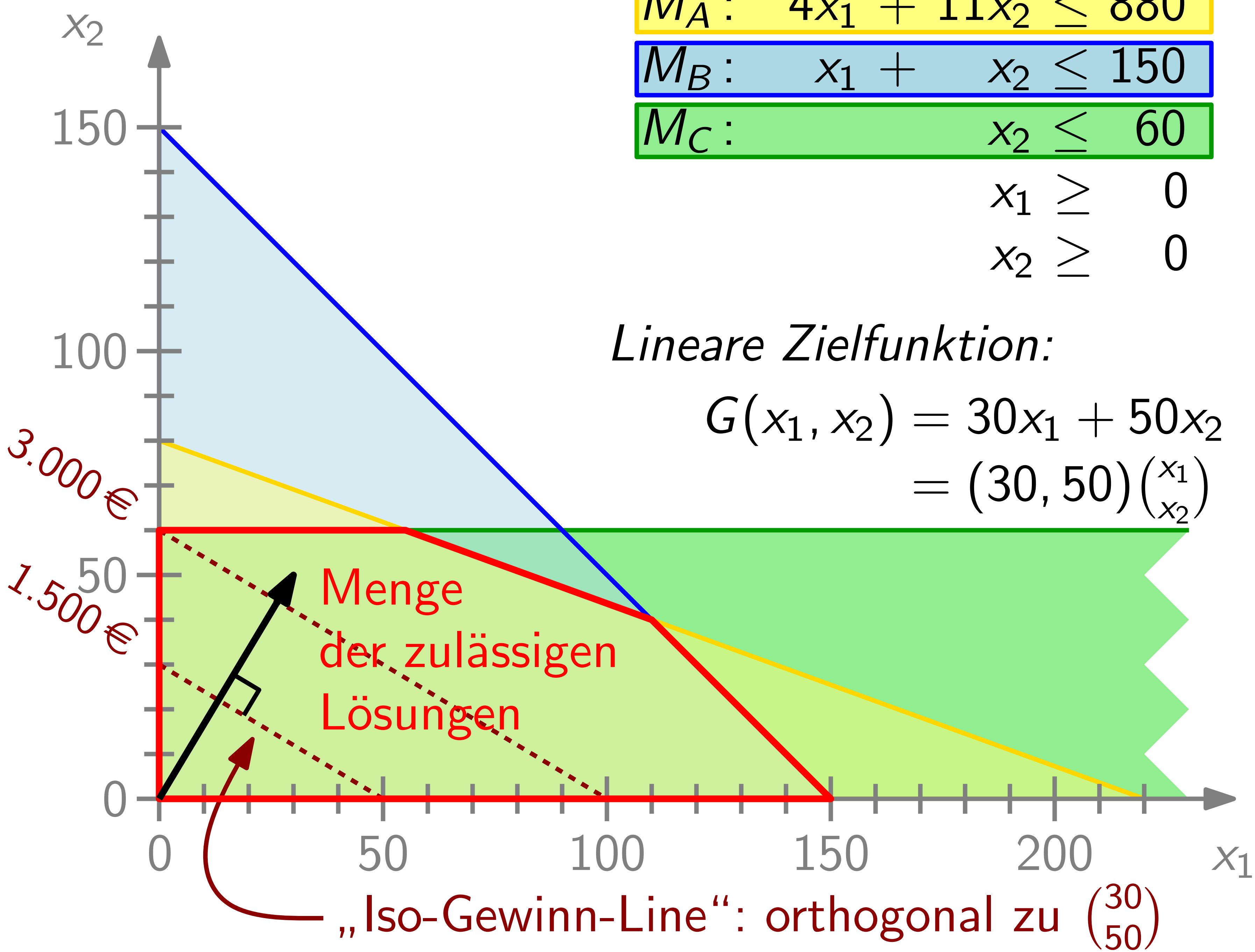
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{aligned} M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 &\le 880 \\ M_B: \quad x_1 + x_2 &\le 150 \\ M_C: \quad x_2 &\le 60 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Lineare Zielfunktion:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\ &= (30, 50)\binom{x_1}{x_2} \end{aligned}$$



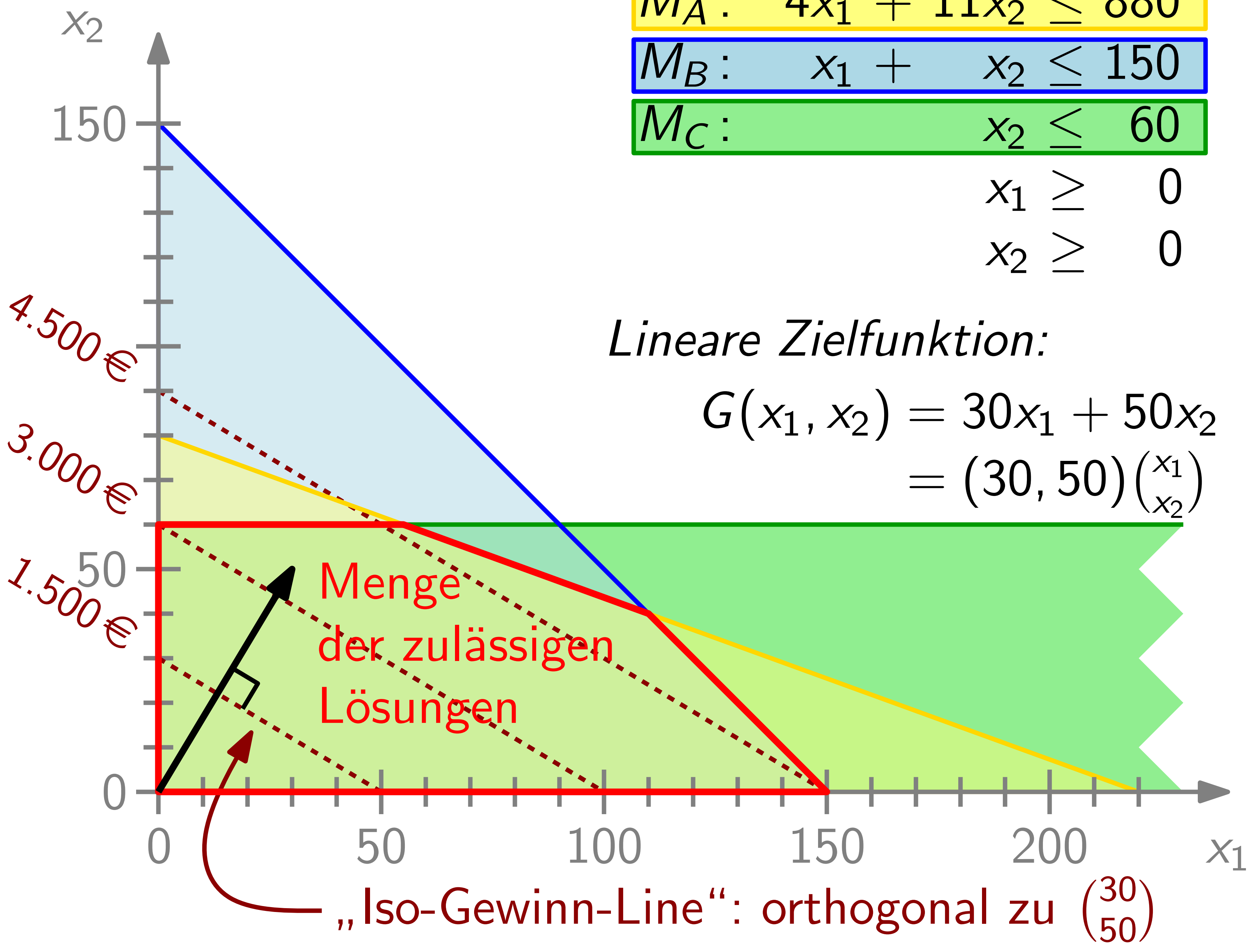
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{array}{lrcrcl} M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\ M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\ M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lineare Zielfunktion:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\ &= (30, 50)\binom{x_1}{x_2} \end{aligned}$$



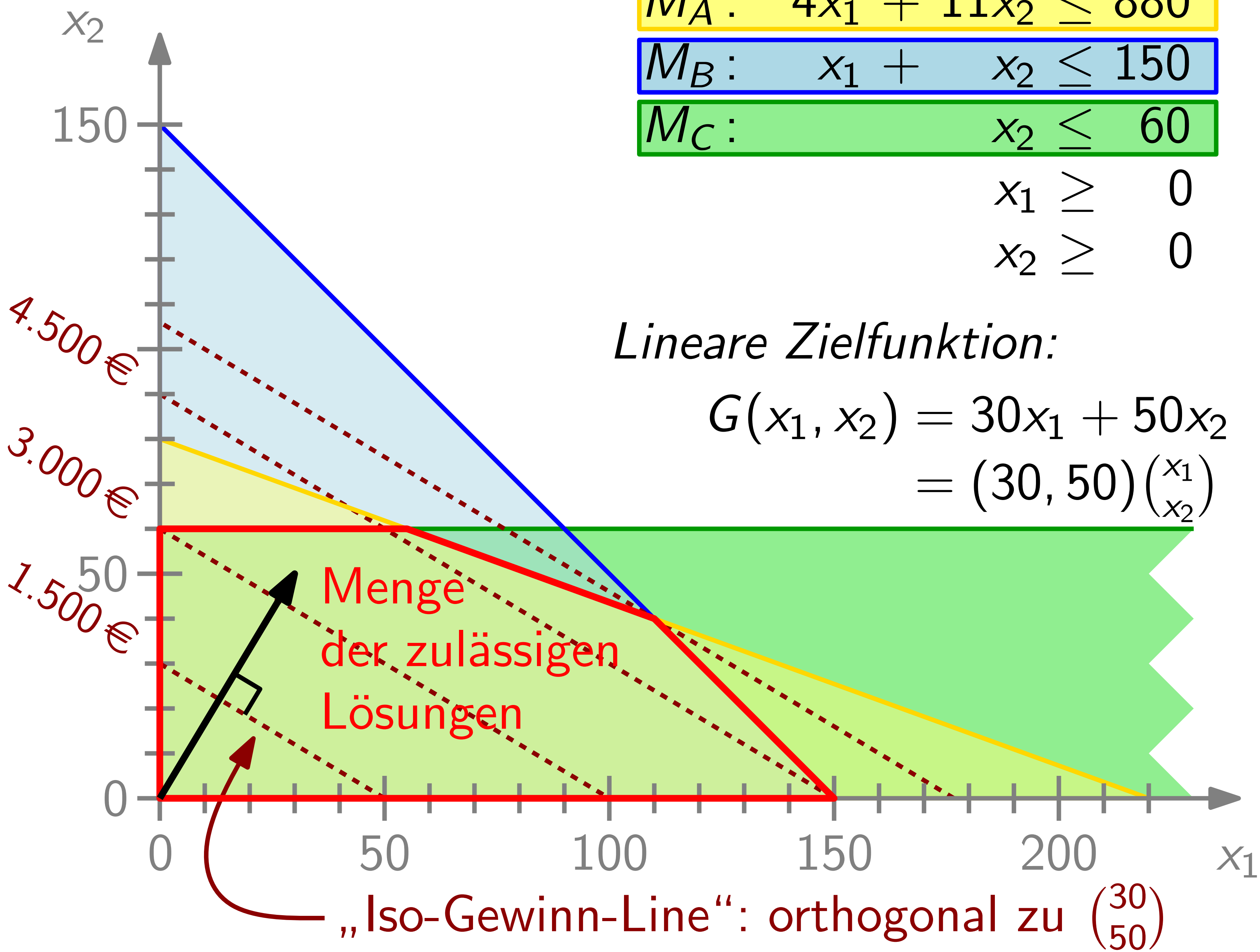
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{aligned}
M_A:&\quad 4x_1 + 11x_2 \le 880\\
M_B:&\quad x_1 + x_2 \le 150\\
M_C:&\quad x_2 \le 60\\
&\quad x_1 \ge 0\\
&\quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2\\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



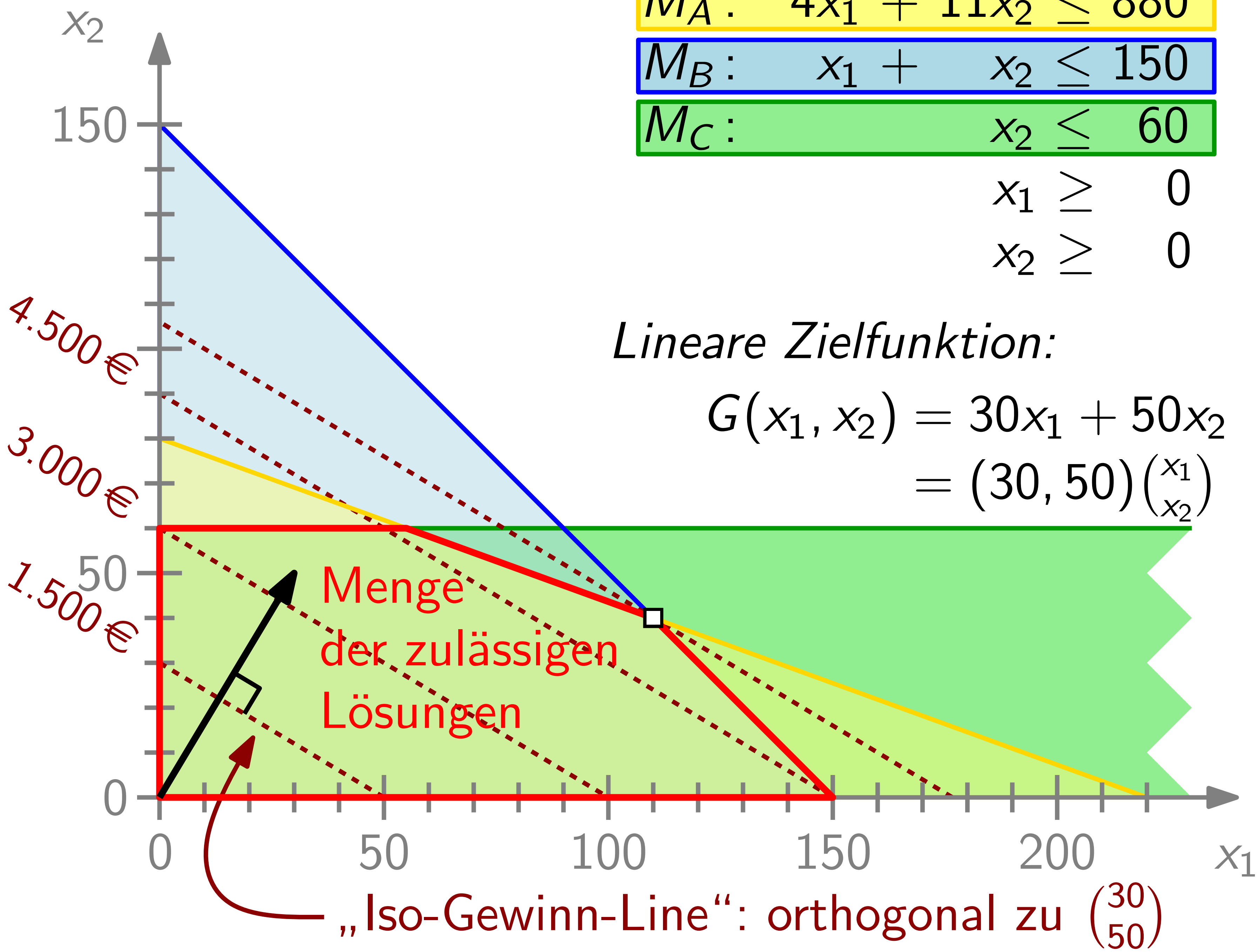
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{aligned}
M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 &\leq 880 \\
M_B: \quad x_1 + x_2 &\leq 150 \\
M_C: \quad x_2 &\leq 60 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



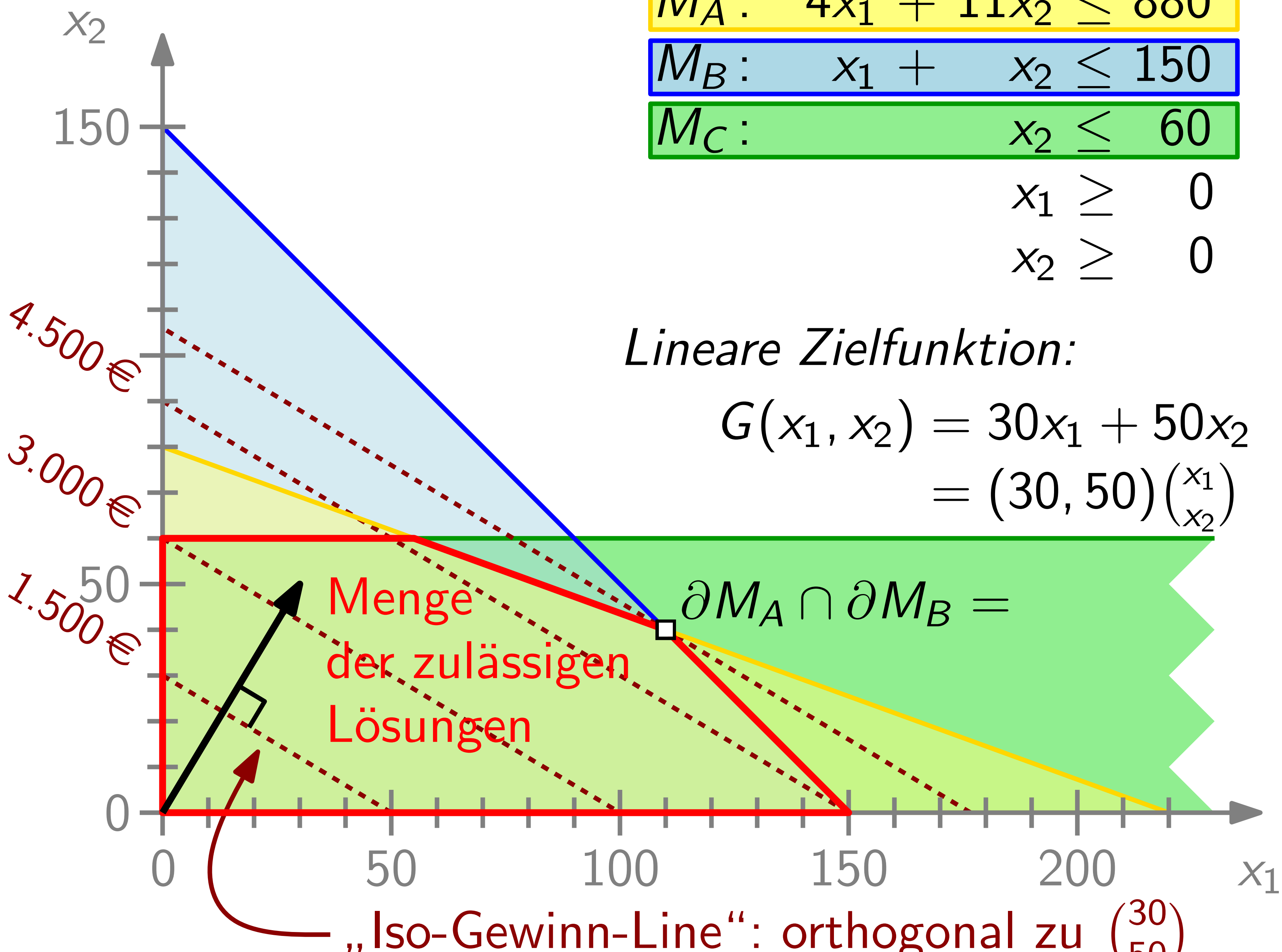
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{array}{lrcrcl} M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\ M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\ M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lineare Zielfunktion:

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2 = (30, 50)\binom{x_1}{x_2}$$



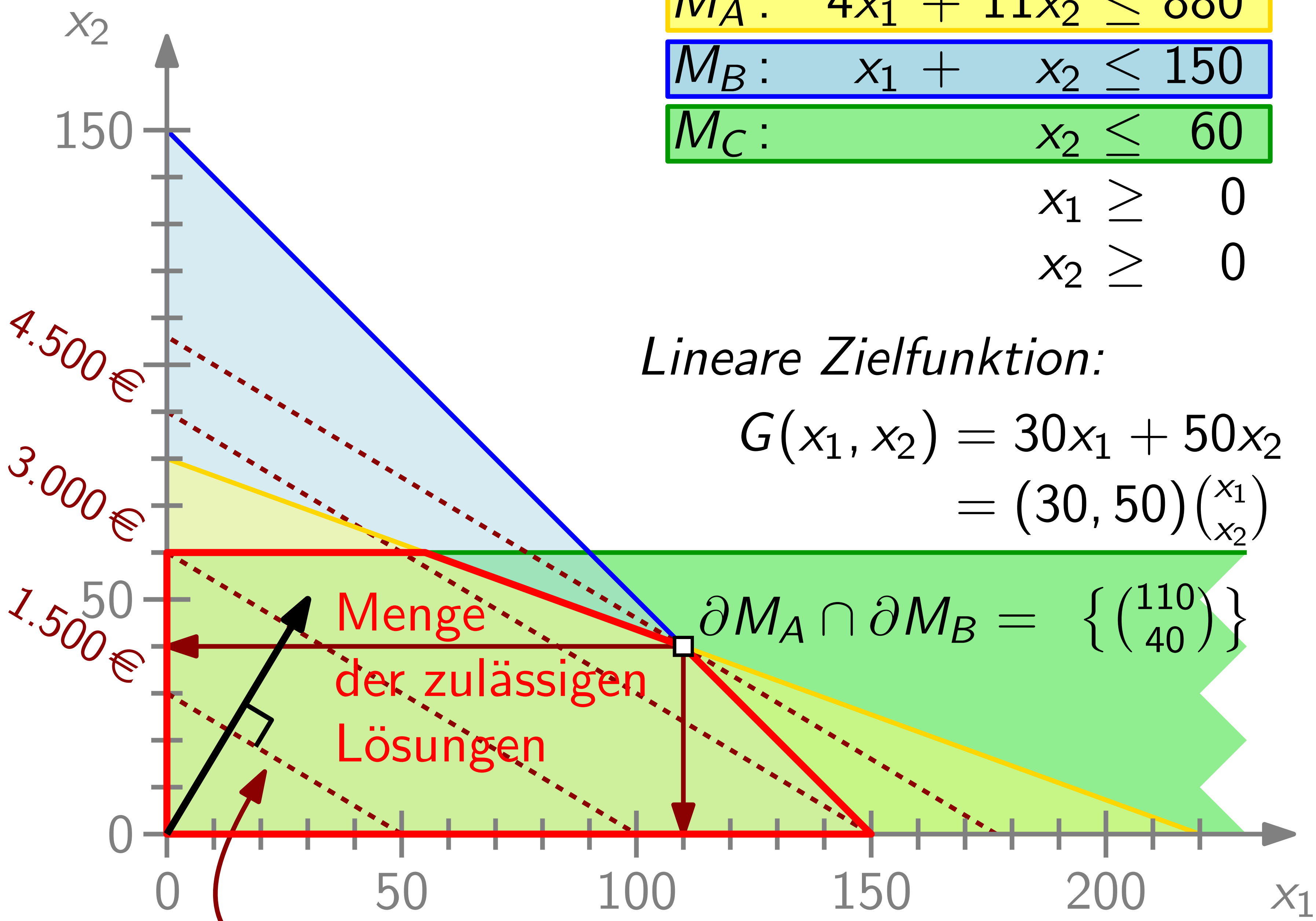
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{aligned}
M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 &\leq 880\\
M_B: \quad x_1 + x_2 &\leq 150\\
M_C: \quad x_2 &\leq 60\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2\\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



„Iso-Gewinn-Line“: orthogonal zu $\binom{30}{50}$

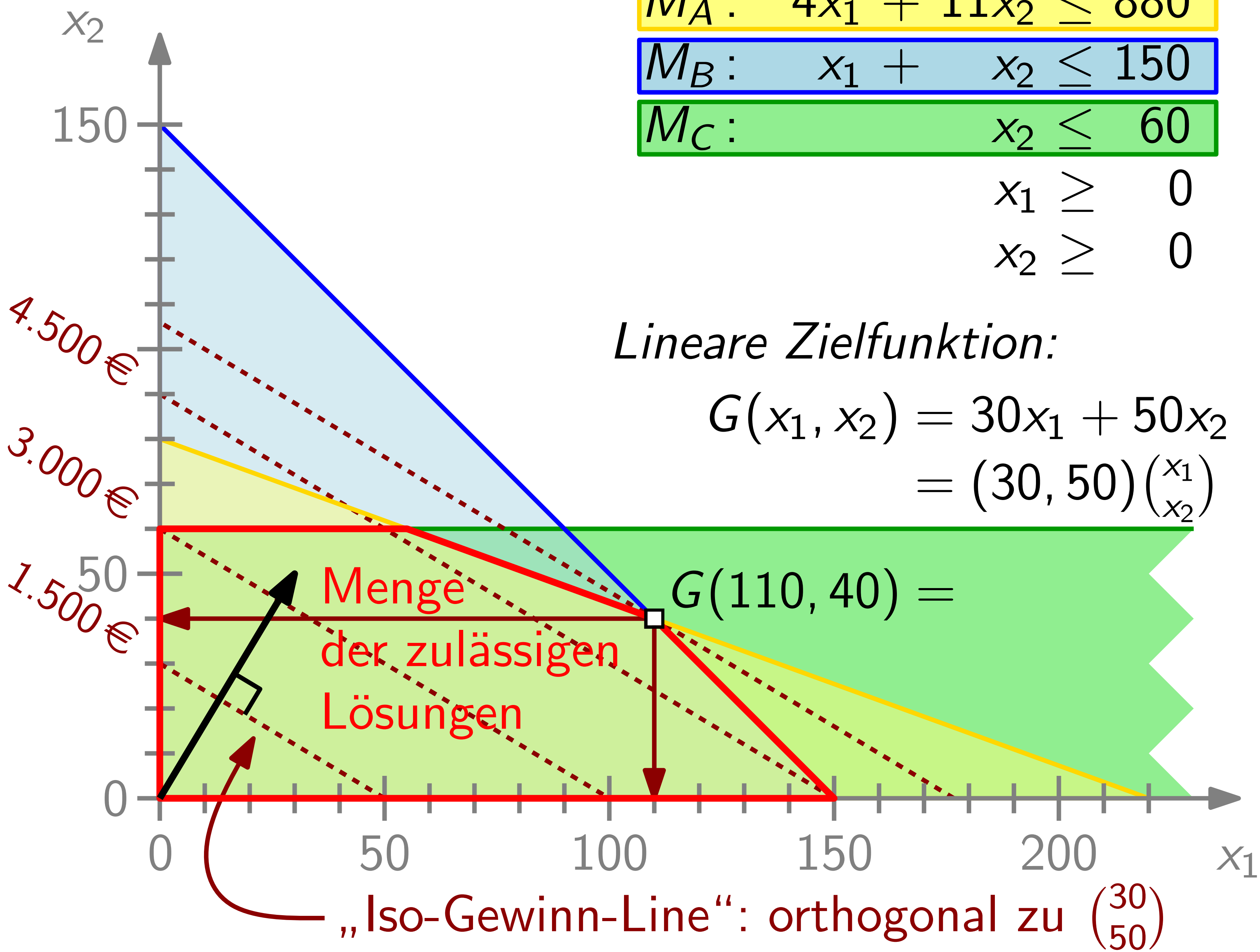
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\
M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\
M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\
& & & x_1 & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



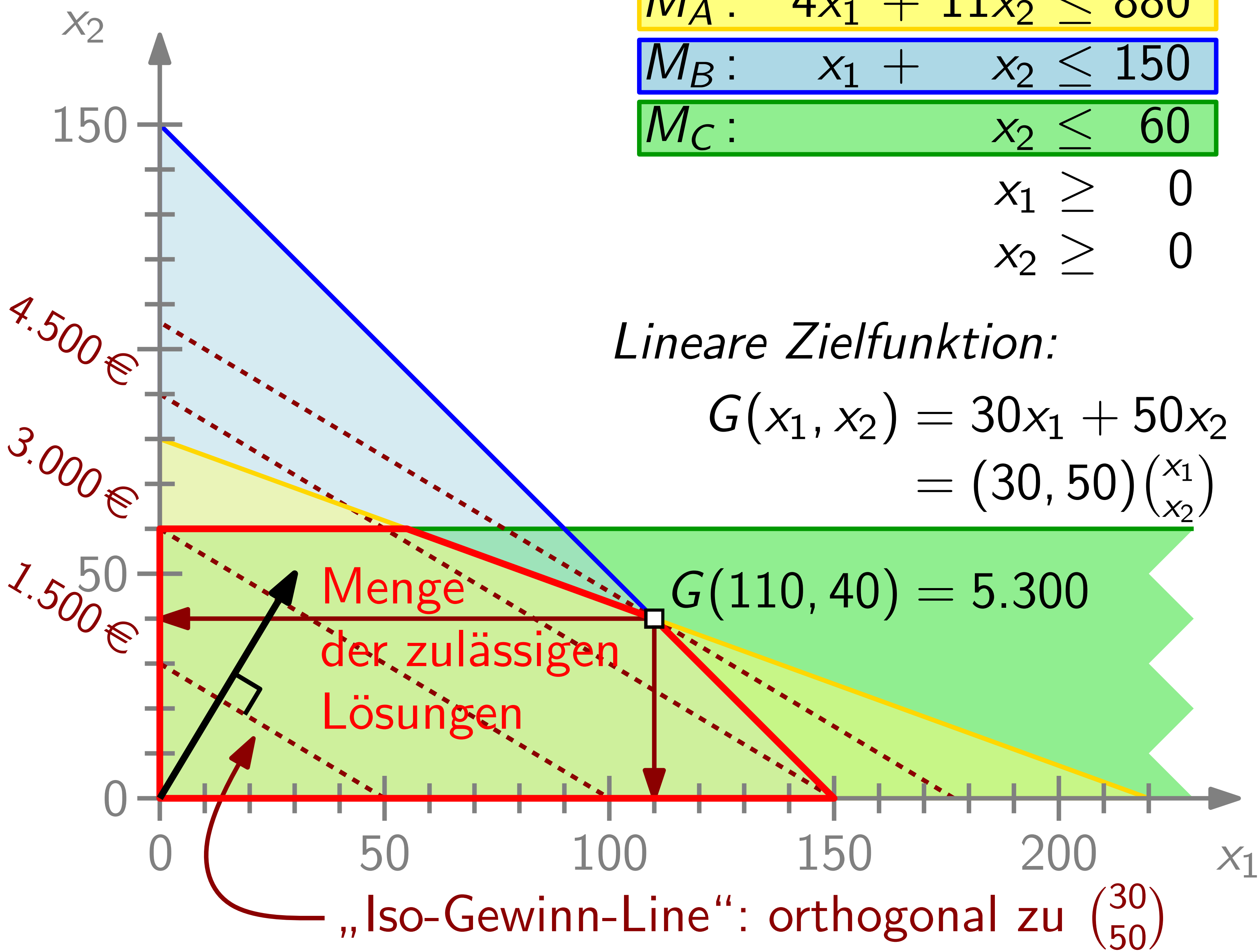
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{array}{lrcrcl}
M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\
M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\
M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Lineare Zielfunktion:

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2 = (30, 50)\binom{x_1}{x_2}$$



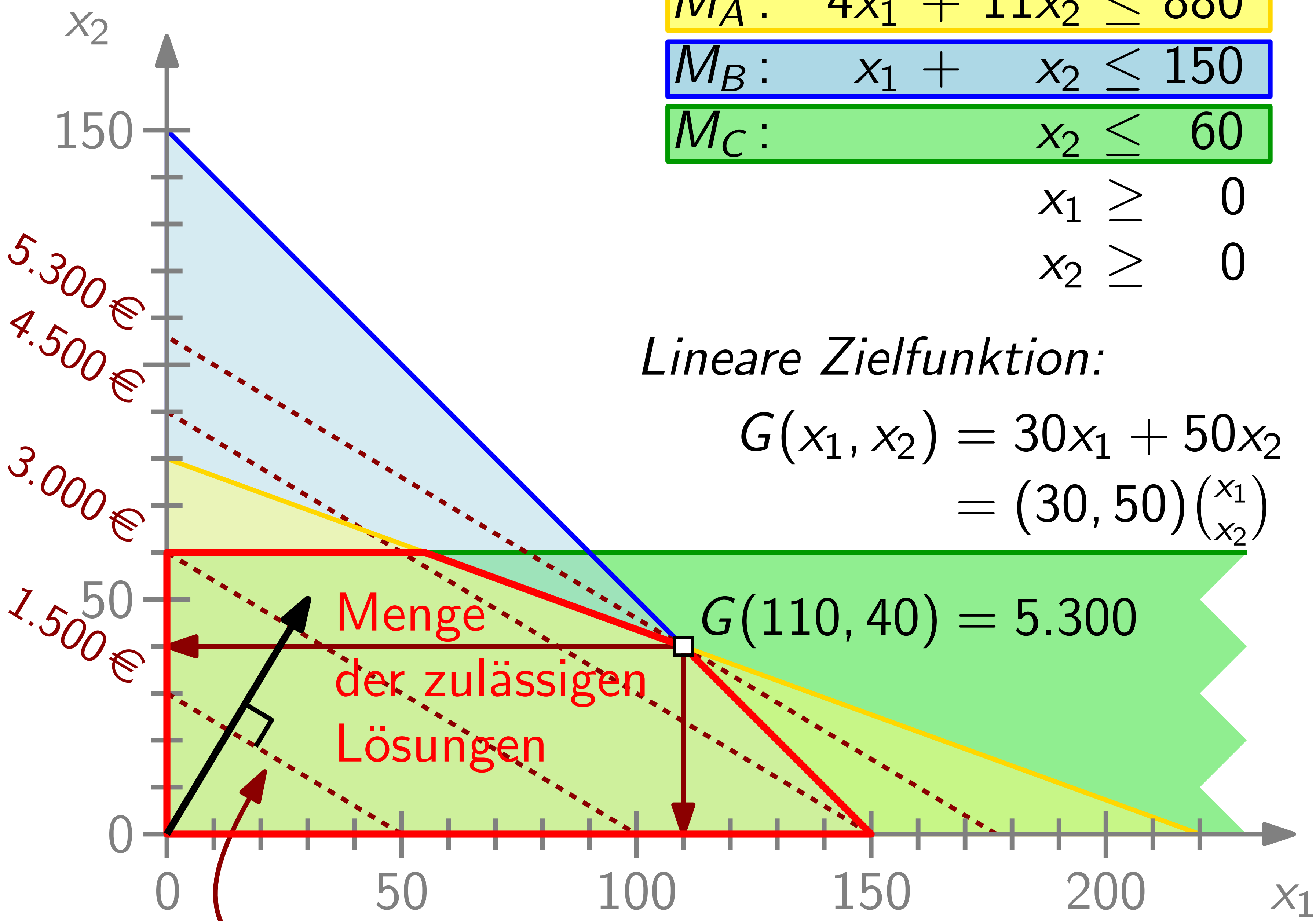
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\
M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\
M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



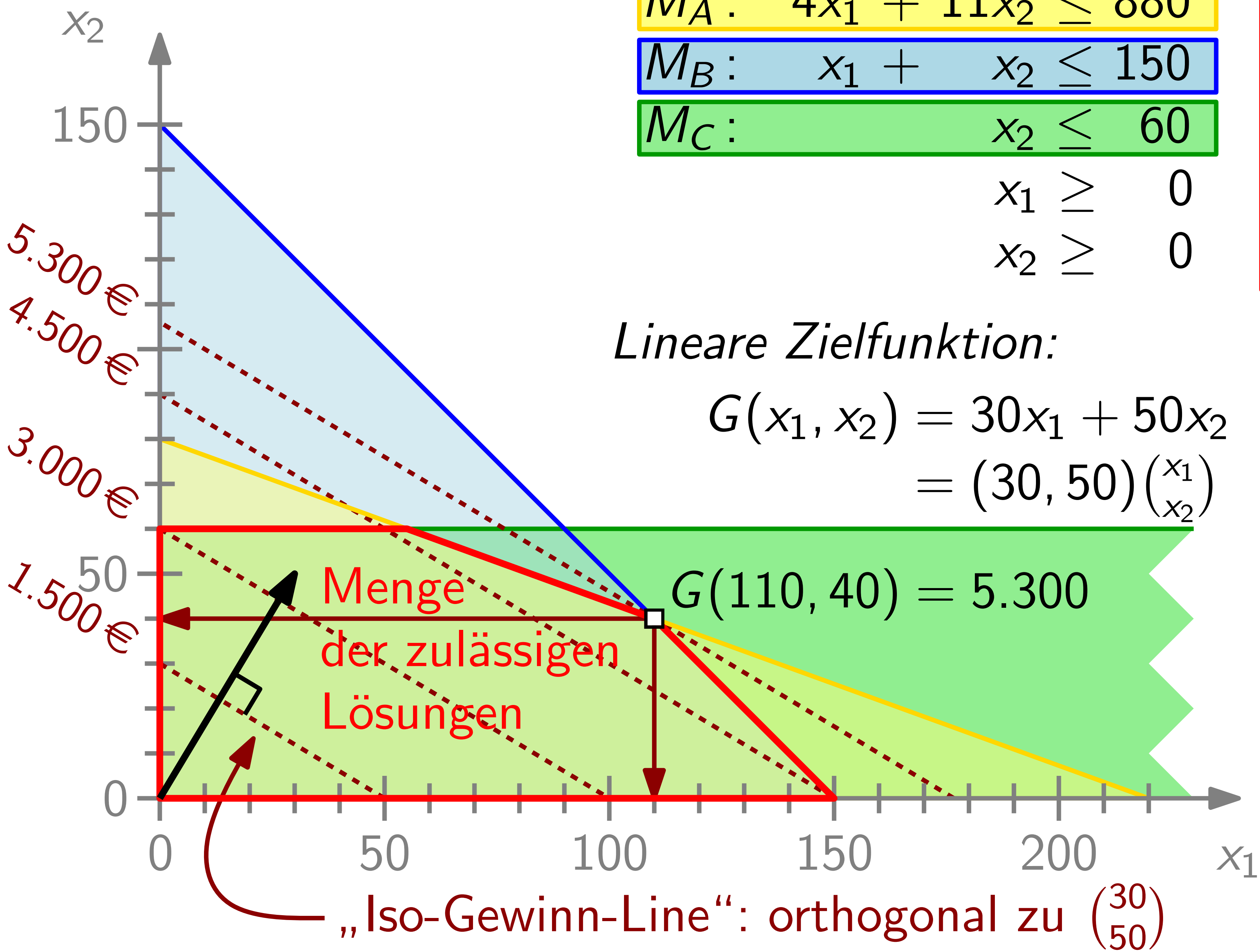
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$\begin{aligned} M_A:&\quad 4x_1 + 11x_2 \le 880\\ M_B:&\quad x_1 + x_2 \le 150\\ M_C:&\quad x_2 \le 60\\ &\quad x_1 \ge 0\\ &\quad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Lineare Zielfunktion:

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2 = (30, 50)\binom{x_1}{x_2}$$



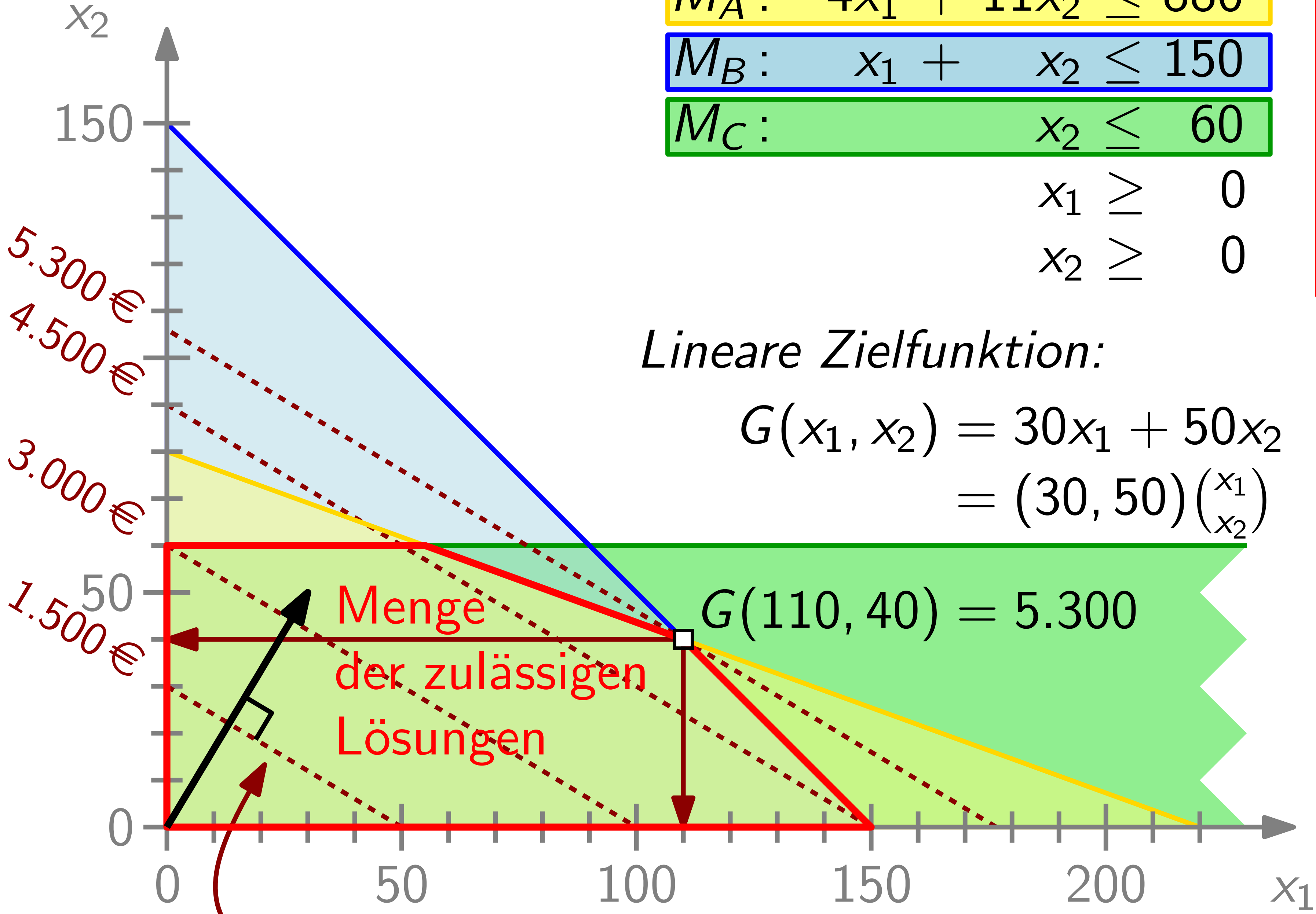
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{aligned}
M_A:&\quad 4x_1 + 11x_2 \le 880\\
M_B:&\quad x_1 + x_2 \le 150\\
M_C:&\quad x_2 \le 60\\
&\quad x_1 \ge 0\\
&\quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad Ax \le b
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2\\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



„Iso-Gewinn-Line“: orthogonal zu $\binom{30}{50}$

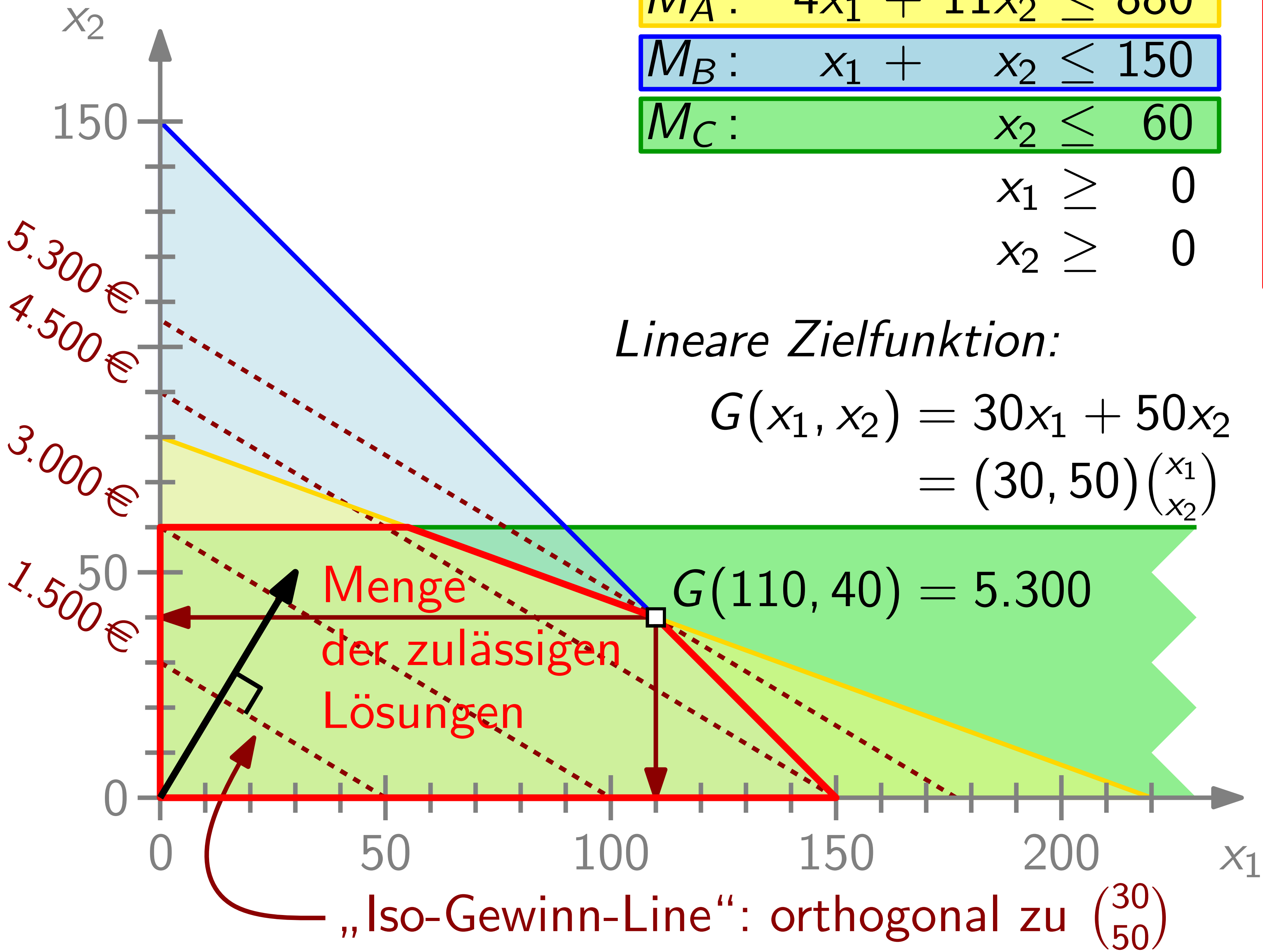
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{array}{lrcl}
M_A: & 4x_1 + 11x_2 & \leq & 880 \\
M_B: & x_1 + x_2 & \leq & 150 \\
M_C: & x_2 & \leq & 60 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
Ax \leq b \\
\\
x \geq 0
\end{array}
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



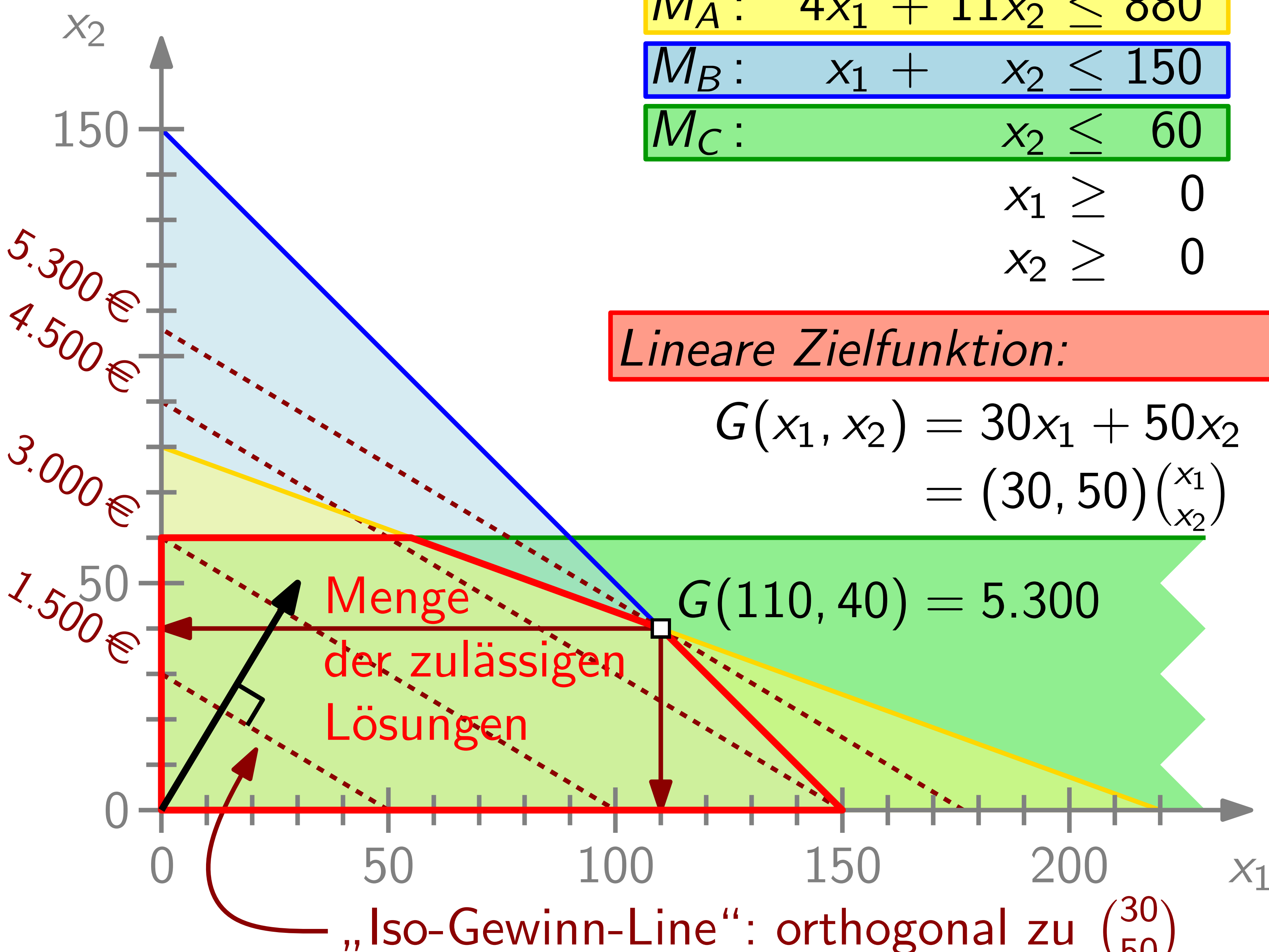
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\
M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\
M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
Ax \leq b \\
\\
x \geq 0
\end{array}
$$

Lineare Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



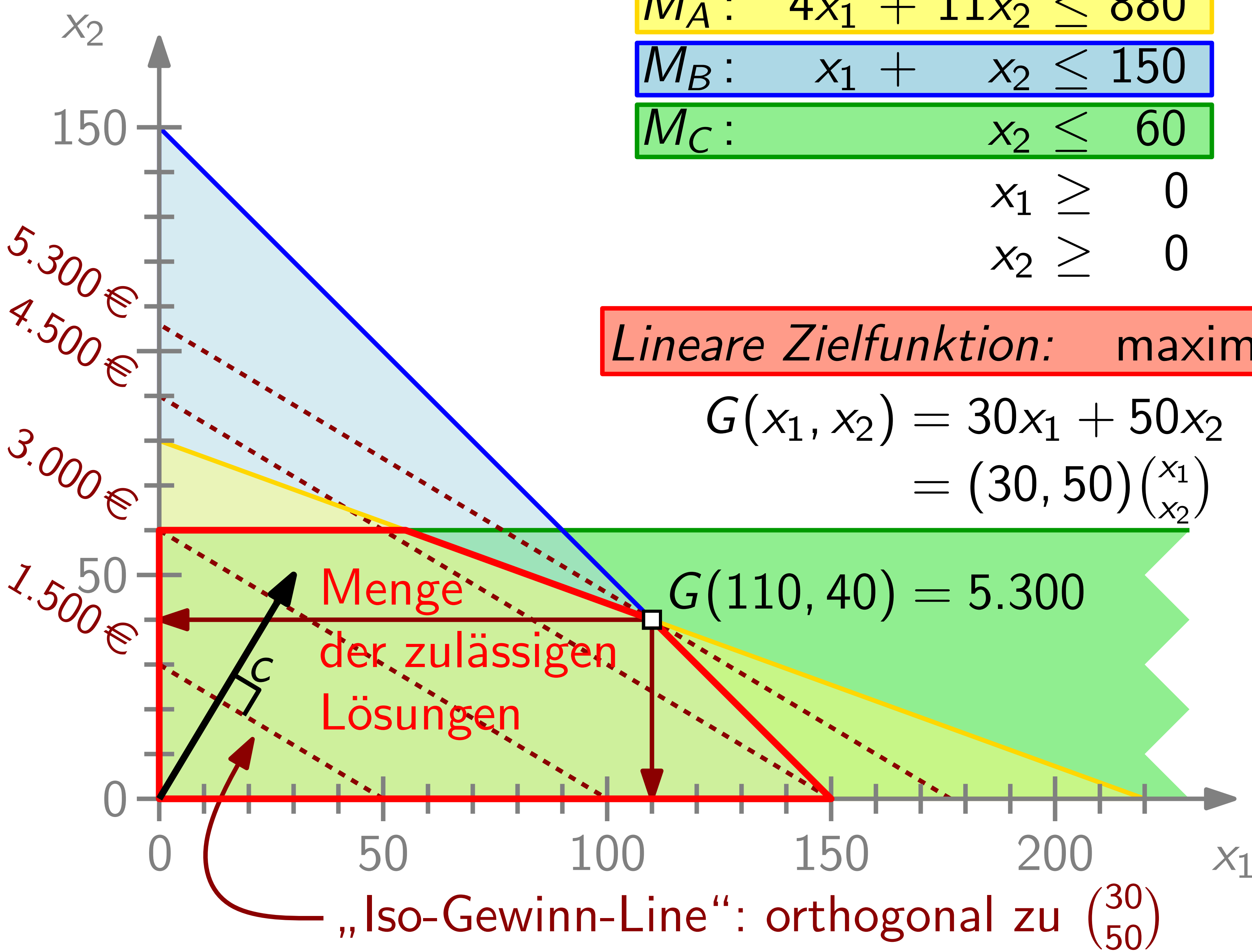
Lösung

Lineare Beschränkungen:

$M_A:$	$4x_1 + 11x_2 \leq 880$		
$M_B:$	$x_1 + x_2 \leq 150$	$Ax \leq b$	
$M_C:$	$x_2 \leq 60$		
	$x_1 \geq 0$	$x \geq 0$	
	$x_2 \geq 0$		

Lineare Zielfunktion: maximiere $c^{\mathsf{T}}x$

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2 = (30, 50)\binom{x_1}{x_2}$$



Lösung

Lineare Beschränkungen:

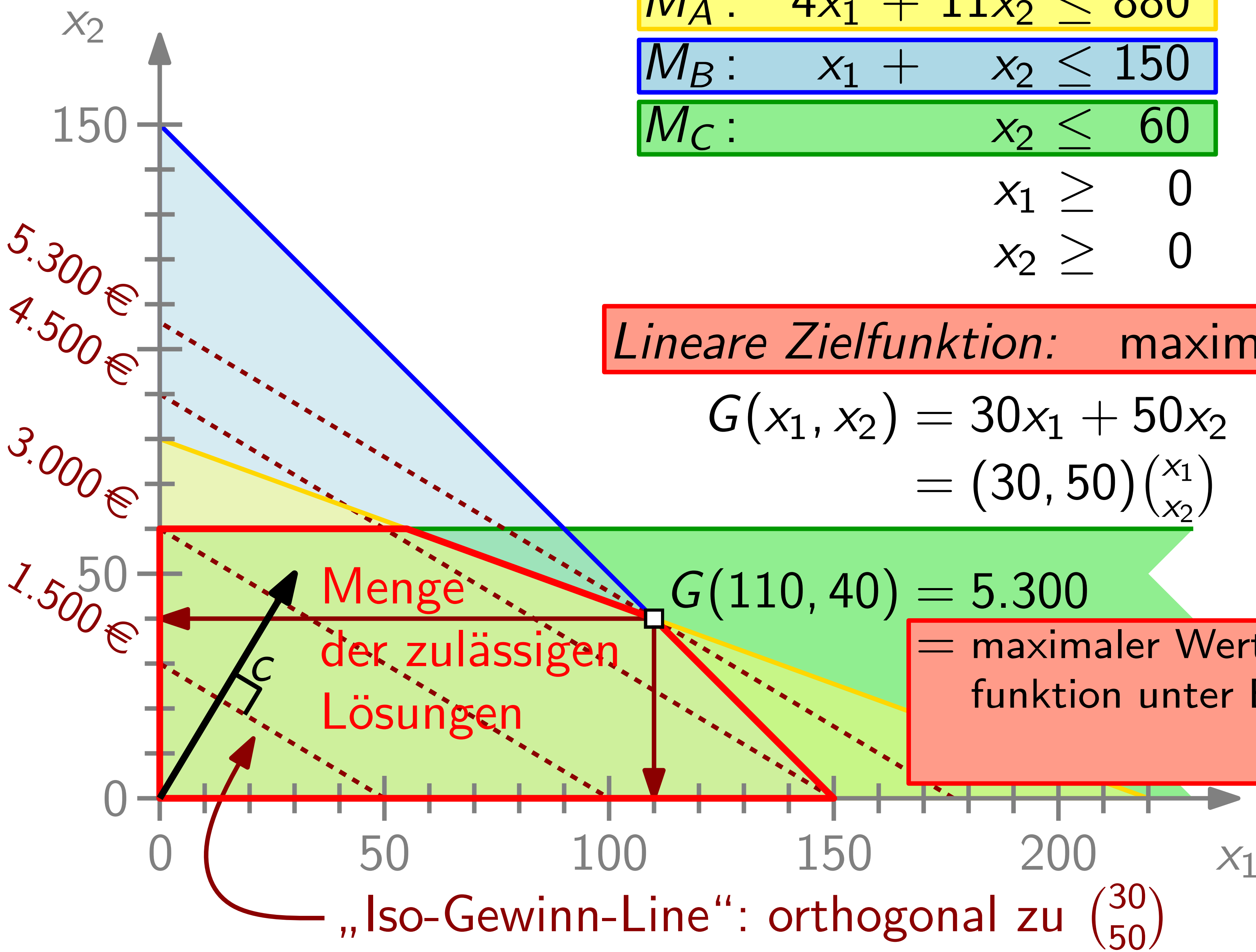
$$\begin{array}{lrcrcl} M_A: & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 880 \\ M_B: & x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \\ M_C: & & & x_2 & \leq & 60 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

Lineare Zielfunktion: maximiere $c^T x$

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\ &= (30, 50)\binom{x_1}{x_2} \end{aligned}$$



$G(110, 40) = 5.300$

$=$ maximaler Wert der Zielfunktion unter Beschränk.

Lösung

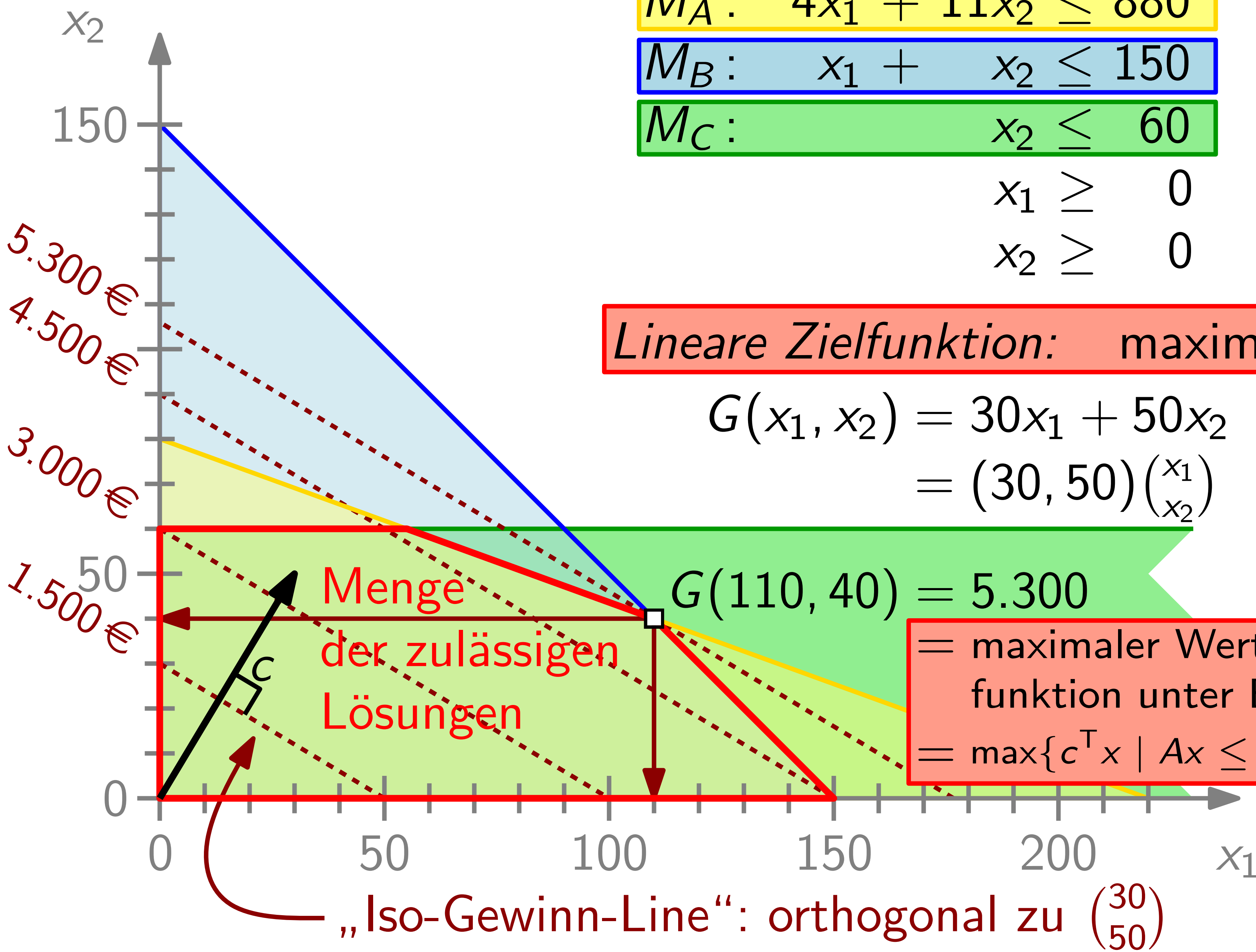
Lineare Beschränkungen:

$$
\left.\begin{array}{lrcr}
M_A: & 4x_1 + 11x_2 & \leq & 880 \\
M_B: & x_1 + x_2 & \leq & 150 \\
M_C: & x_2 & \leq & 60
\end{array}\right\} \quad Ax \leq b
$$

$$
\left.\begin{array}{rcr}
x_1 & \geq & 0 \\
x_2 & \geq & 0
\end{array}\right\} \quad x \geq 0
$$

Lineare Zielfunktion: maximiere $c^\mathsf{T} x$

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2) &= 30x_1 + 50x_2 \\
&= (30, 50)\binom{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$



$G(110, 40) = 5.300$

$=$ maximaler Wert der Zielfunktion unter Beschränk.

$= \max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Lineares Programmieren I

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht:

Lineares Programmieren I

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \mathbb{R}^n$

Lineares Programmieren I

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n$

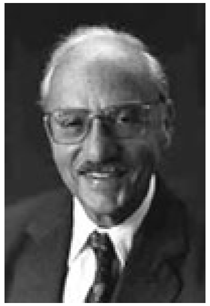
Gesucht: $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Lineares Programmieren I

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Satz. [Dantzig, 1947]
Der Simplex-Algorithmus löst lineare Programme.

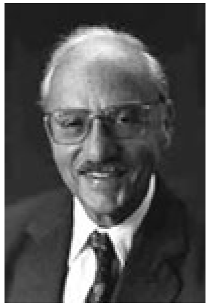


Lineares Programmieren I

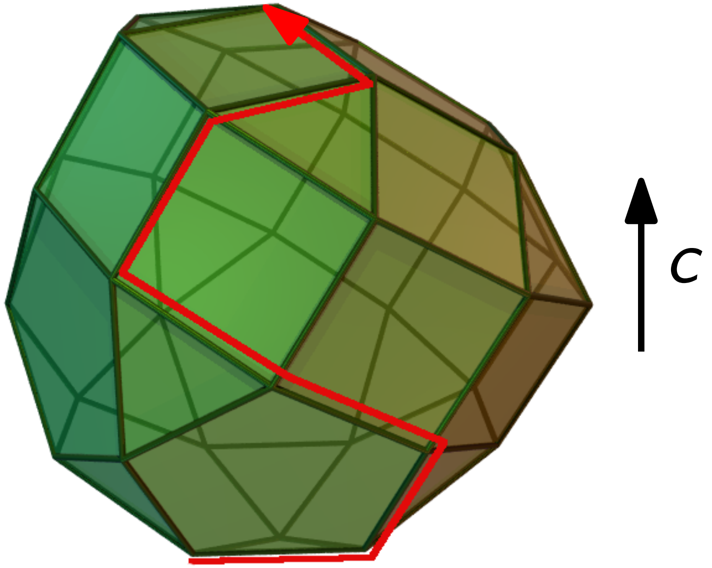
Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Satz. [Dantzig, 1947]



Der Simplex-Algorithmus löst lineare Programme.

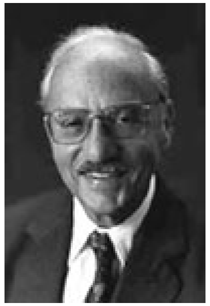


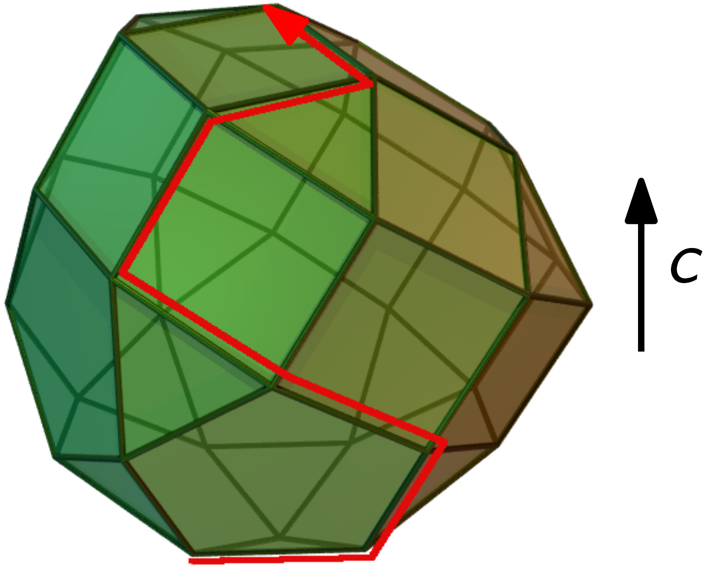
Lineares Programmieren I

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Satz. [Dantzig, 1947]
Der Simplex-Algorithmus löst lineare Programme.

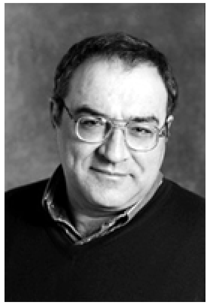




Satz. [Klee & Minty, 1972]
Es gibt Beispiele, auf denen der Simplex-Algorithmus exponentielle Zeit benötigt.

Lineares Programmieren II

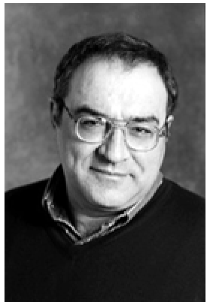
Satz. [Khachiyan, 1979]
Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen.



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ

Lineares Programmieren II

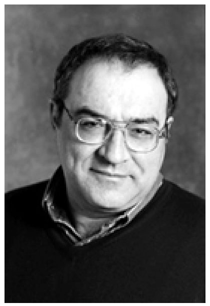
Satz. [Khachiyan, 1979]
Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ

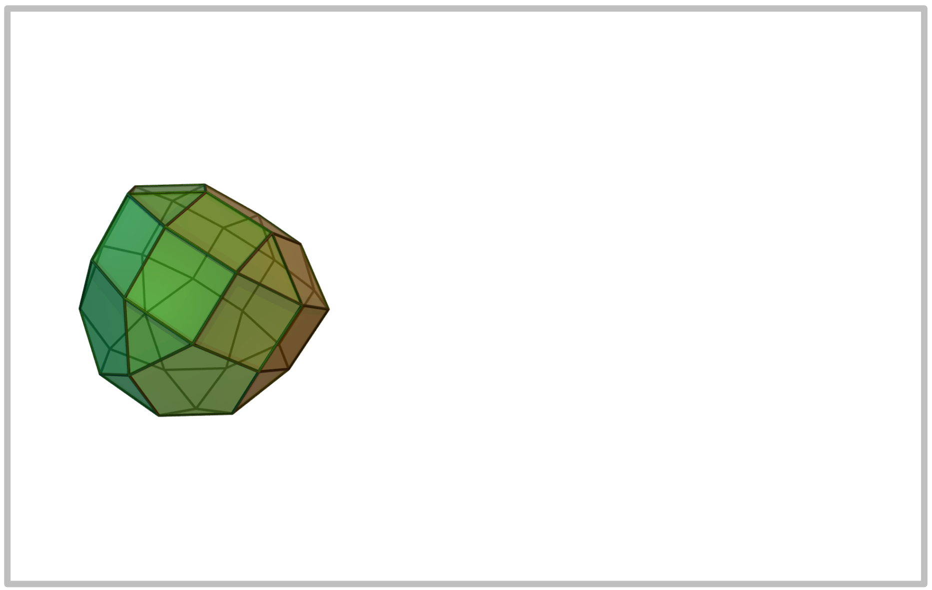
Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*



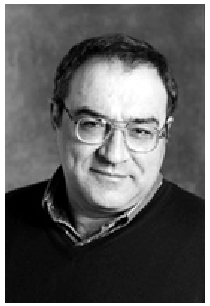
Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



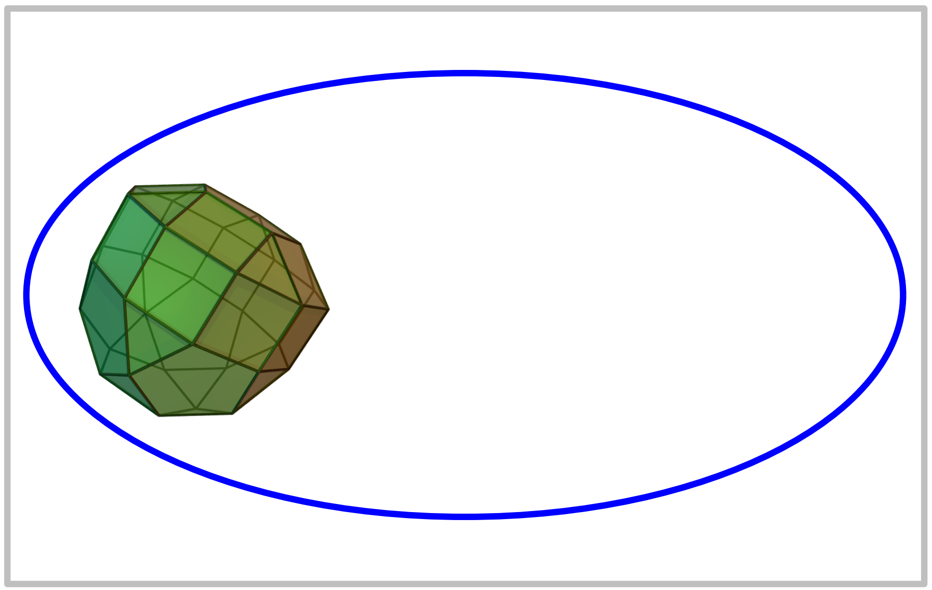
Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ

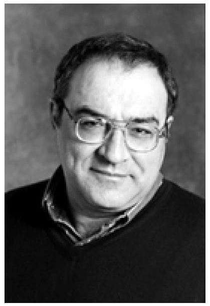
Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



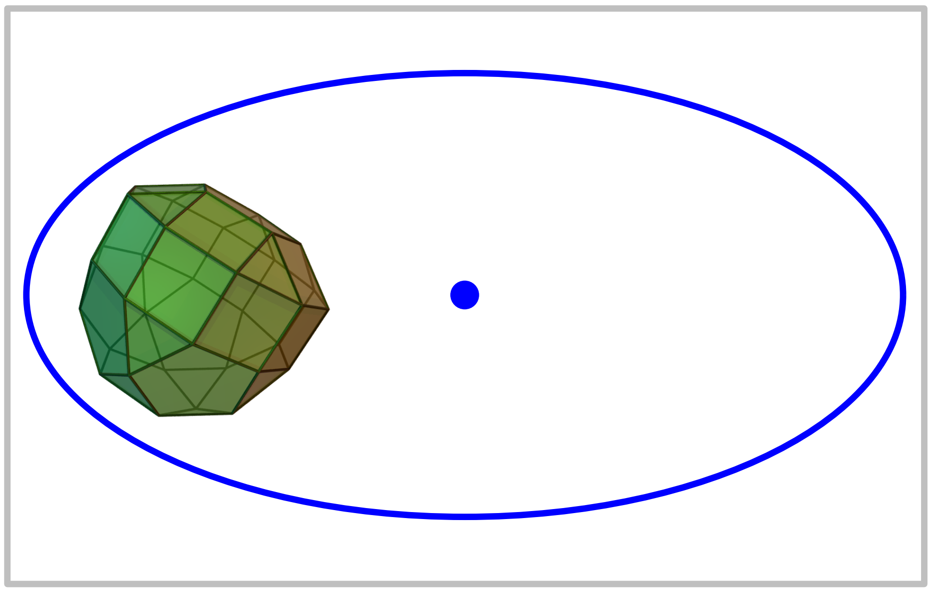
Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



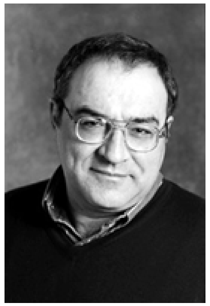
Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ



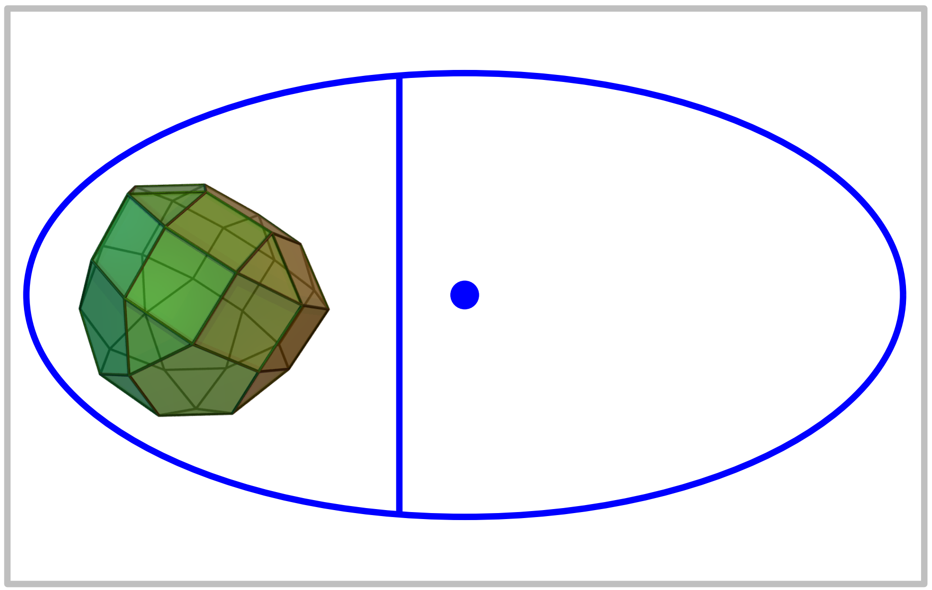
Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.

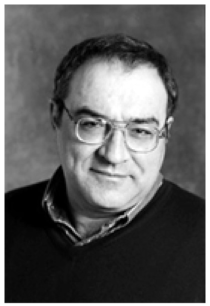


Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ



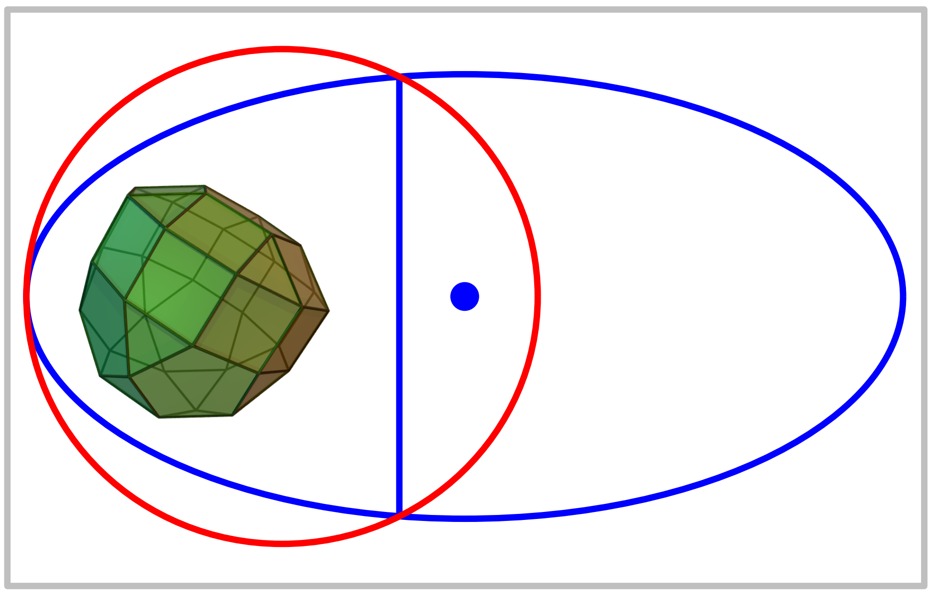
Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ

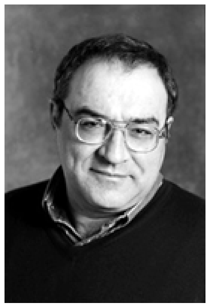
Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



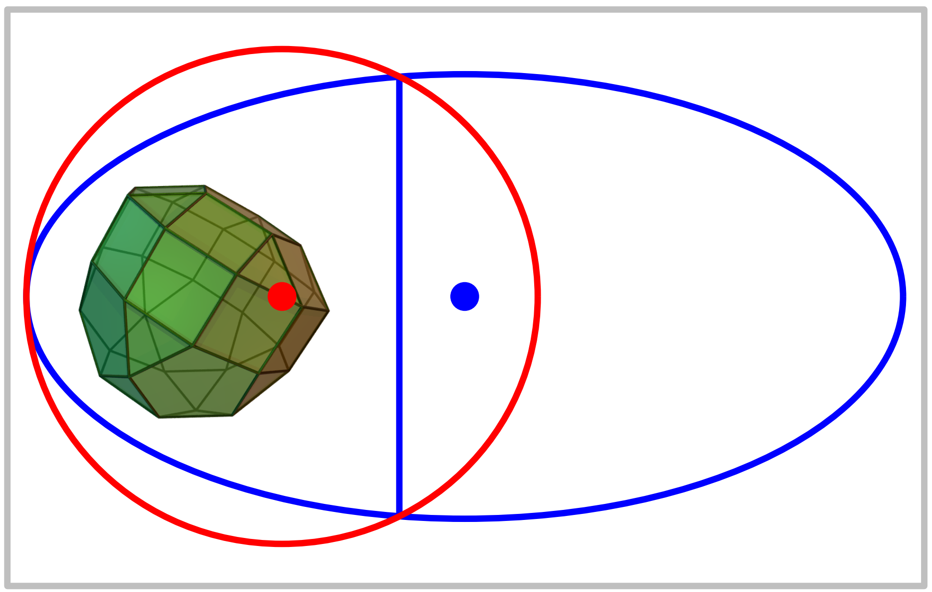
Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



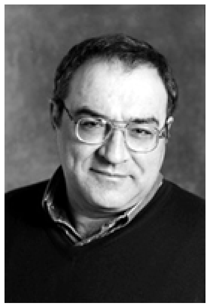
Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ



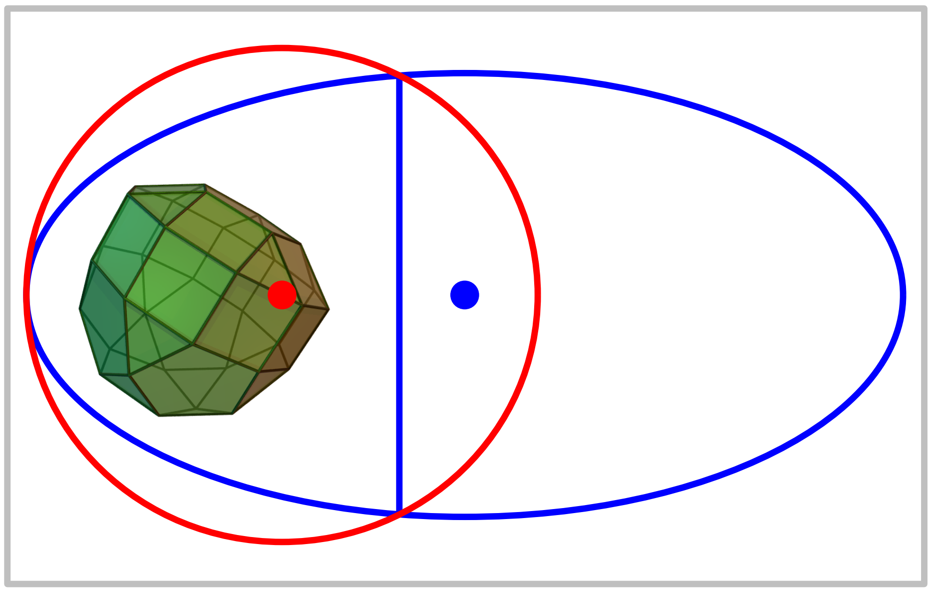
Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ



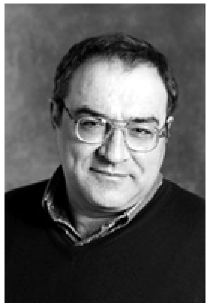
Narendra Karmarkar
*1957 Gwalior, Indien

Satz. [Karmakar, 1984]

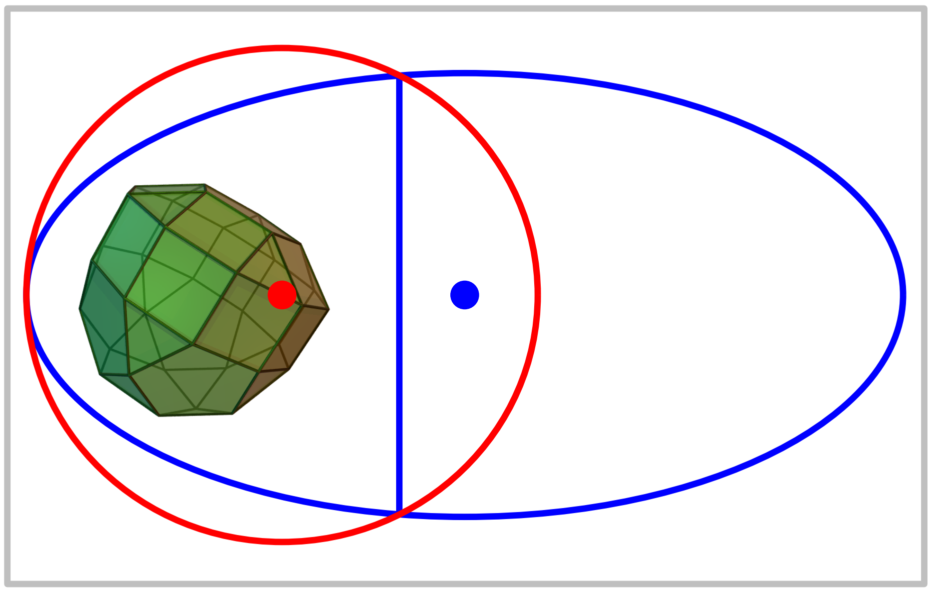
Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^{3.5})$ Zeit *numerisch stabil* lösen.

Lineares Programmieren II

Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*
Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ



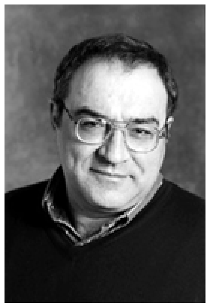
Narendra Karmarkar
*1957 Gwalior, Indien

Satz. [Karmakar, 1984] *Innere-Punkt-Methode*
Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^{3.5})$ Zeit *numerisch stabil* lösen.

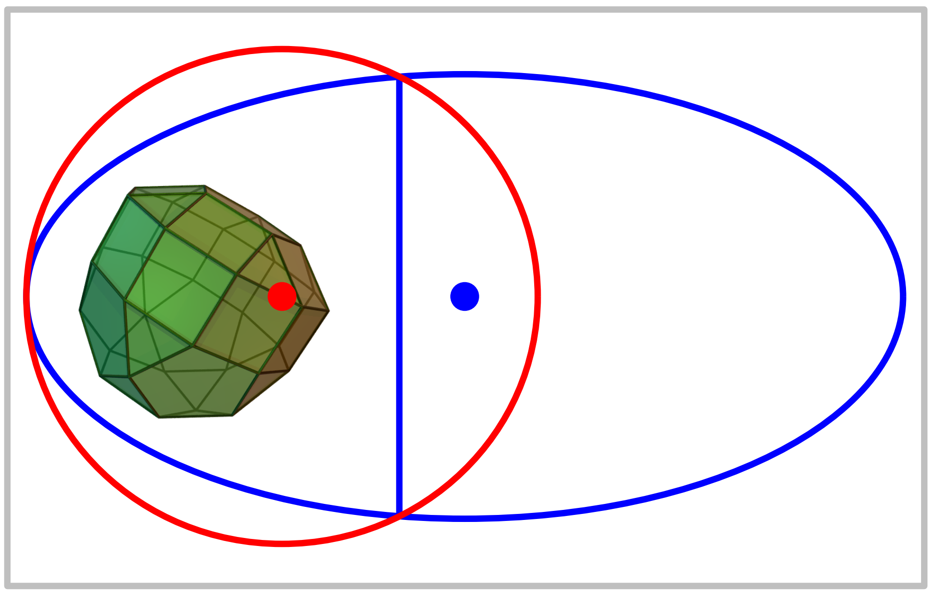
Lineares Programmieren II

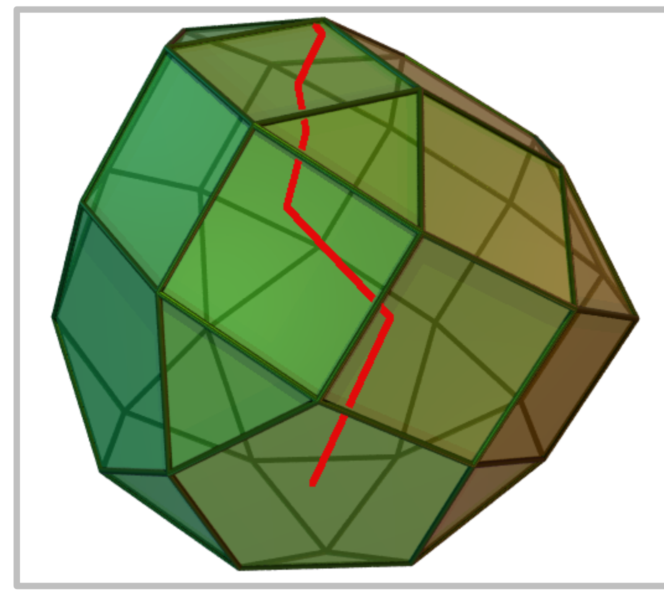
Satz. [Khachiyan, 1979] *Ellipsoidmethode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L =$ Anz. Bits in der Eingabe.



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South Brunswick, NJ





Narendra Karmarkar
*1957 Gwalior, Indien

Satz. [Karmakar, 1984] *Innere-Punkt-Methode*

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^{3.5})$ Zeit *numerisch stabil* lösen.

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

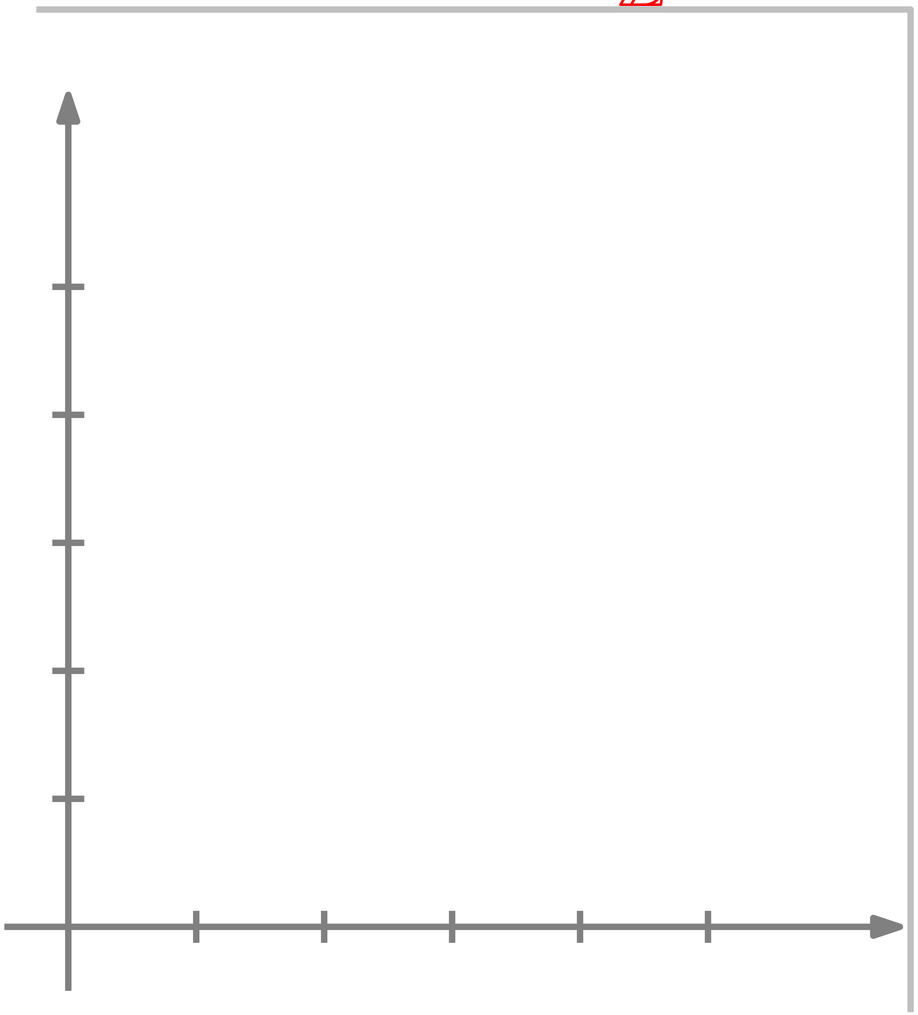
Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

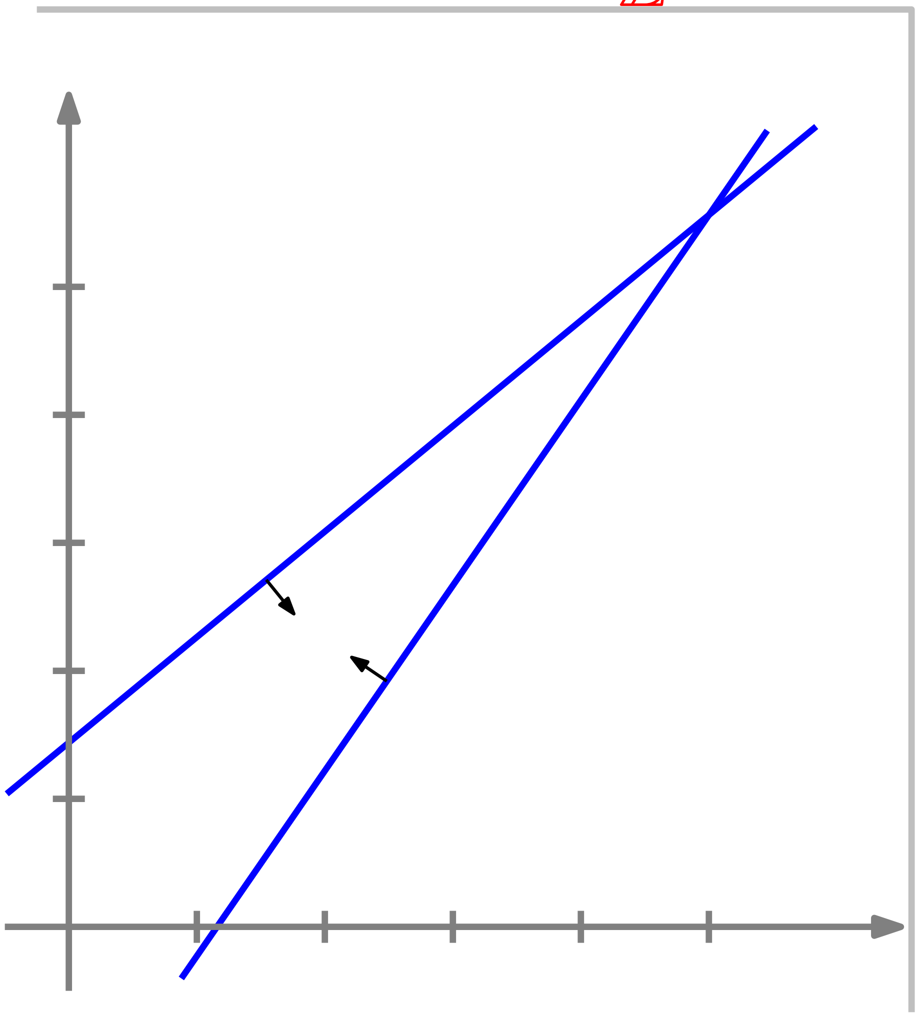
Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$



Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

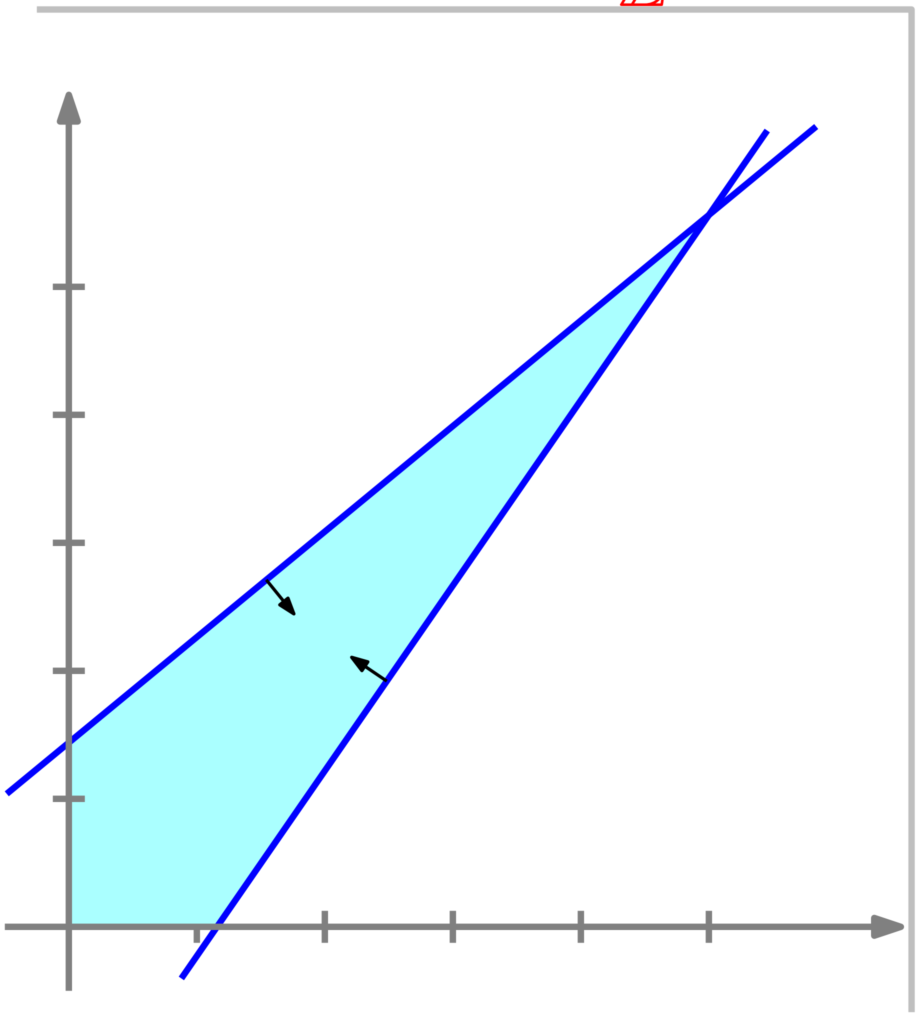
Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ $x \in \mathbb{Z}^n$



Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

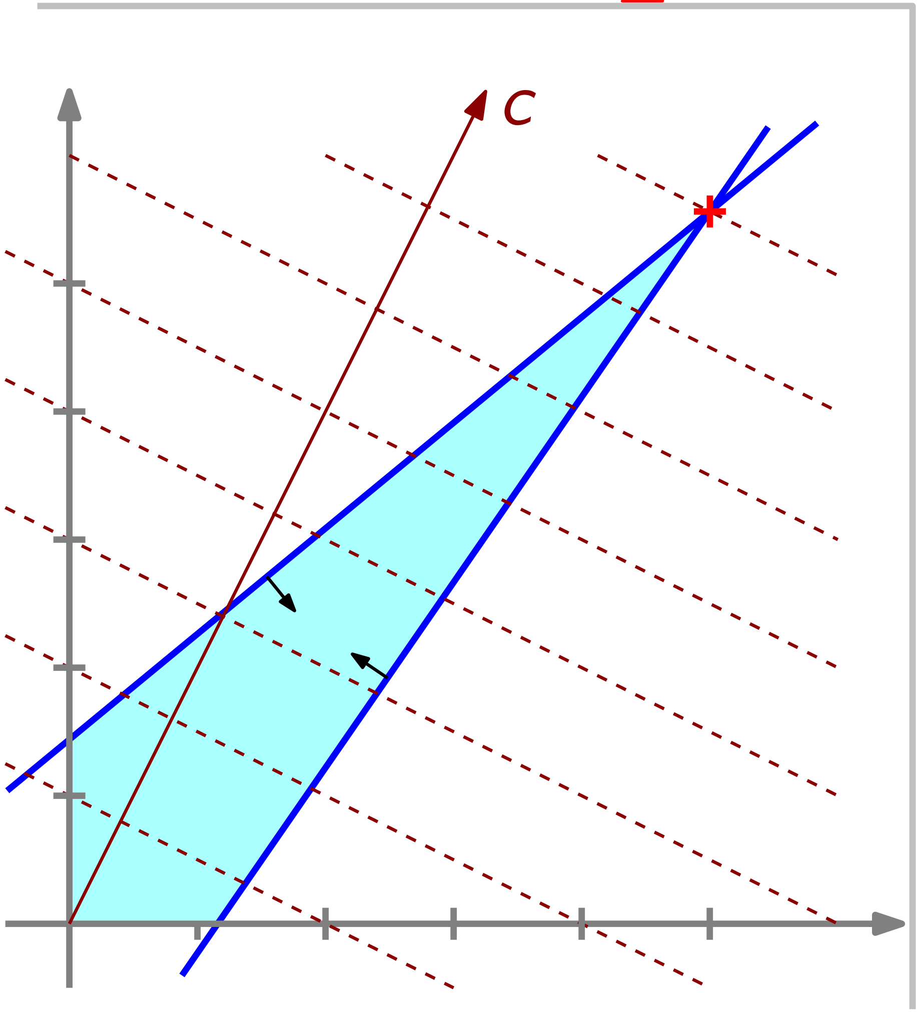
Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \le b, x \ge 0\}$ $x \in \mathbb{Z}^n$



Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \le b, x \ge 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$

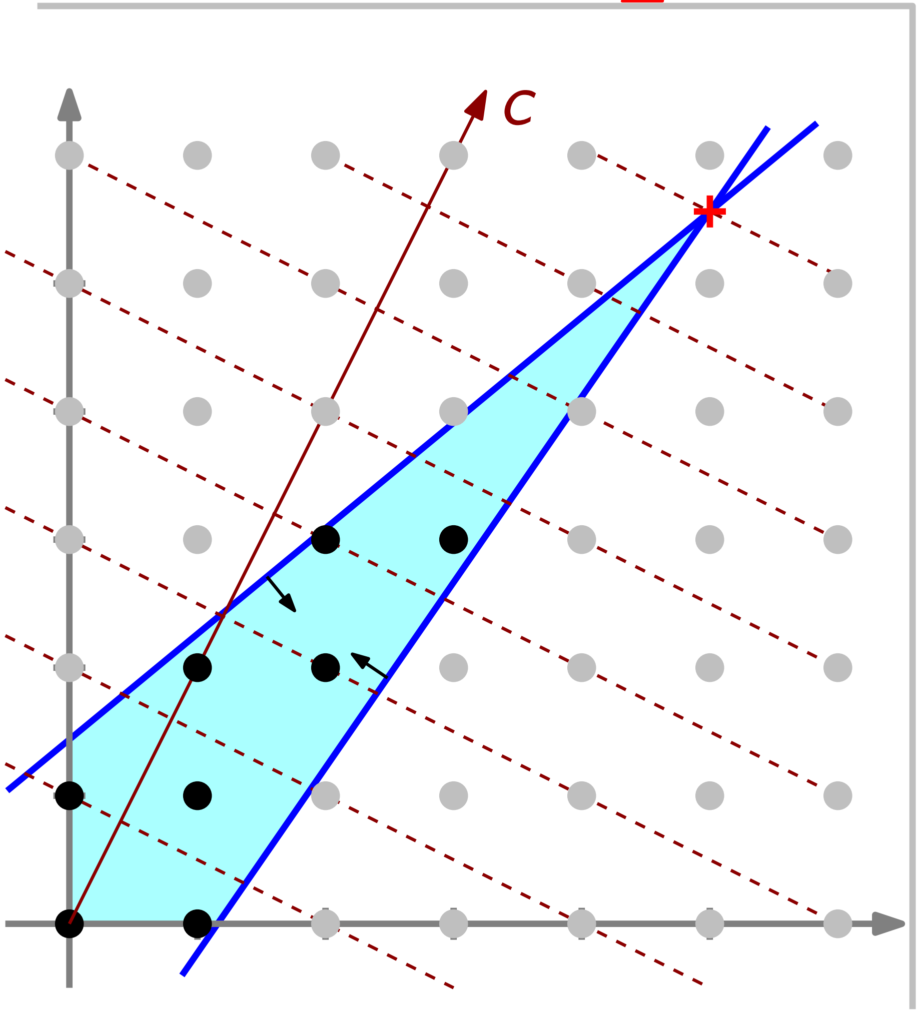


Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{Z}^n$

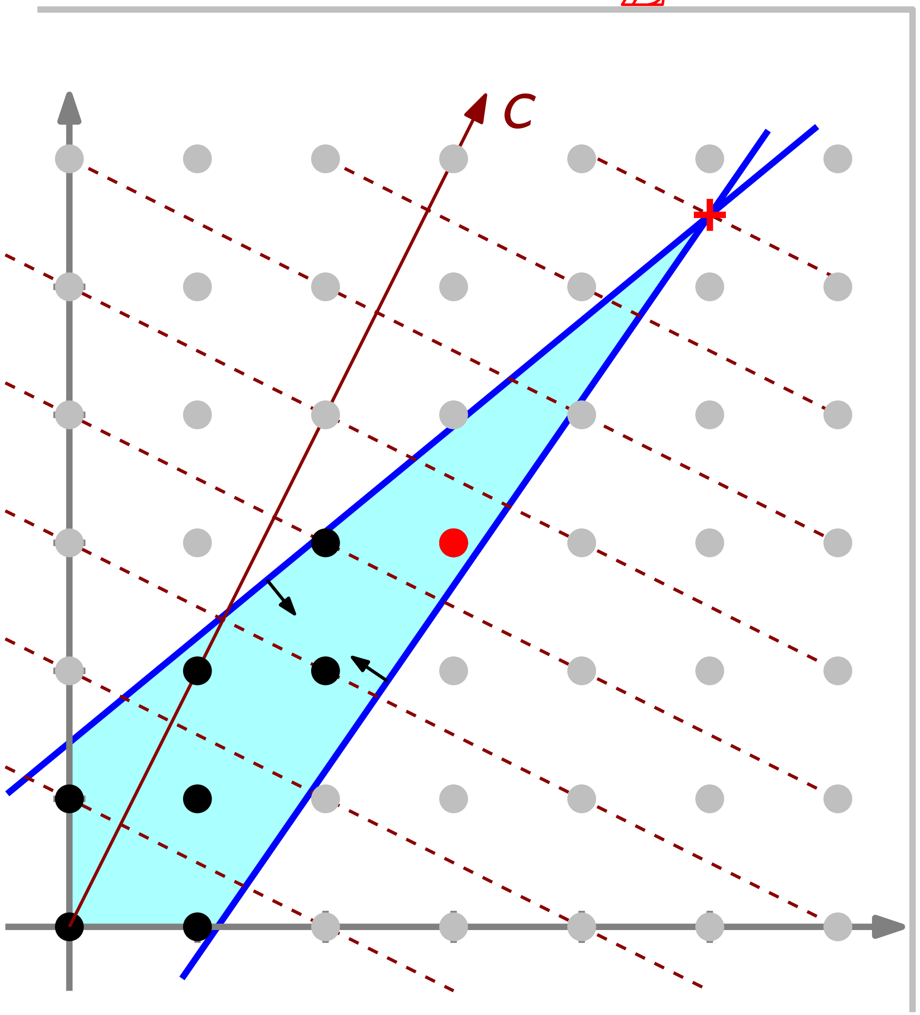
Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$

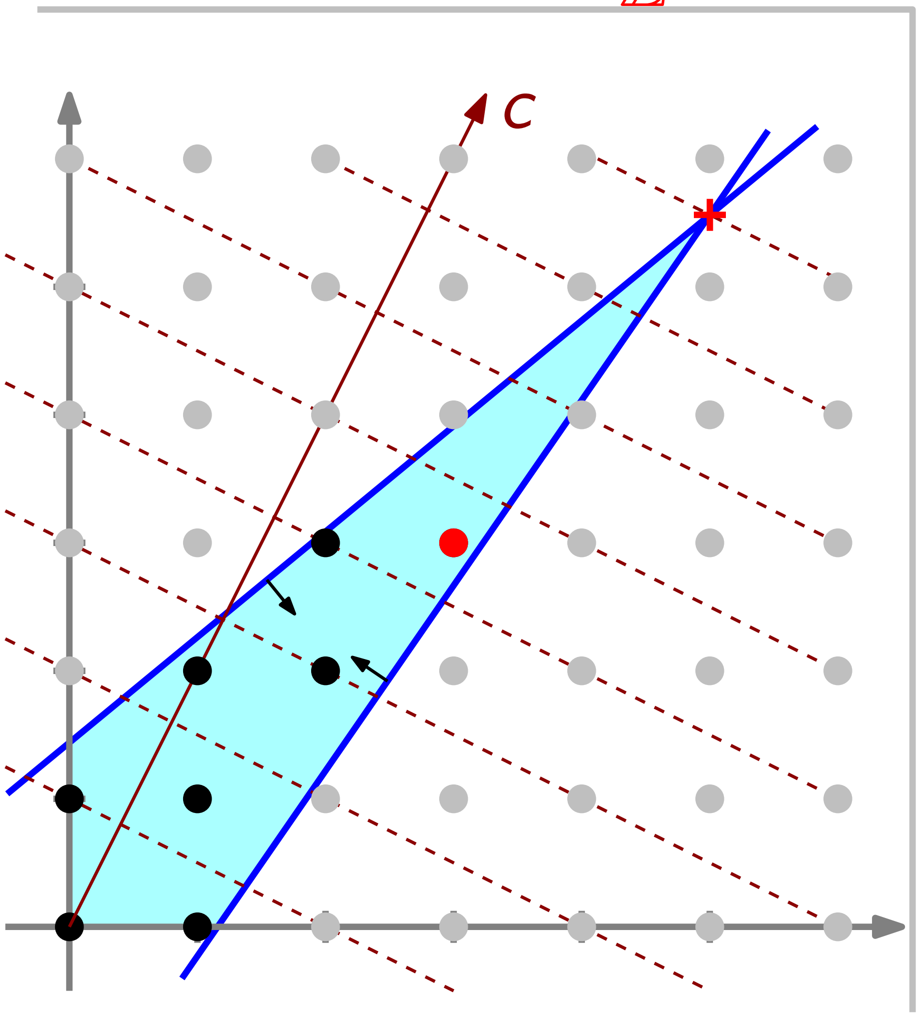


Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



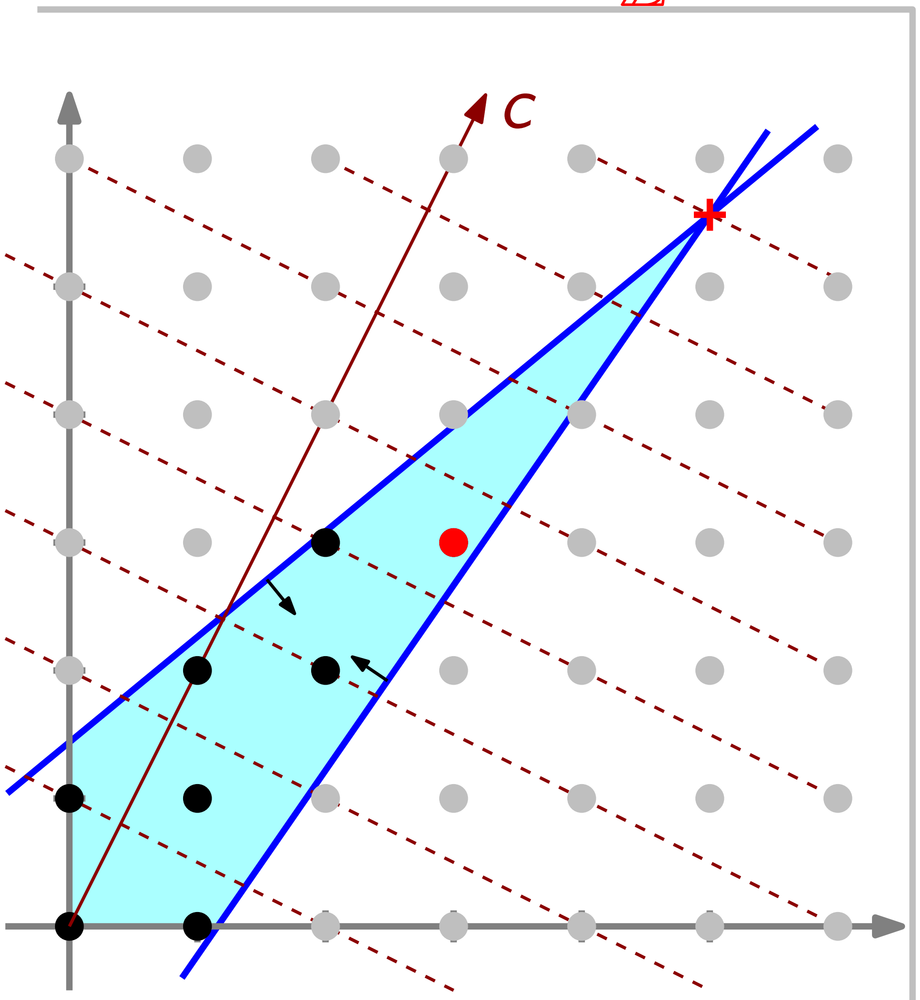
Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}^n$

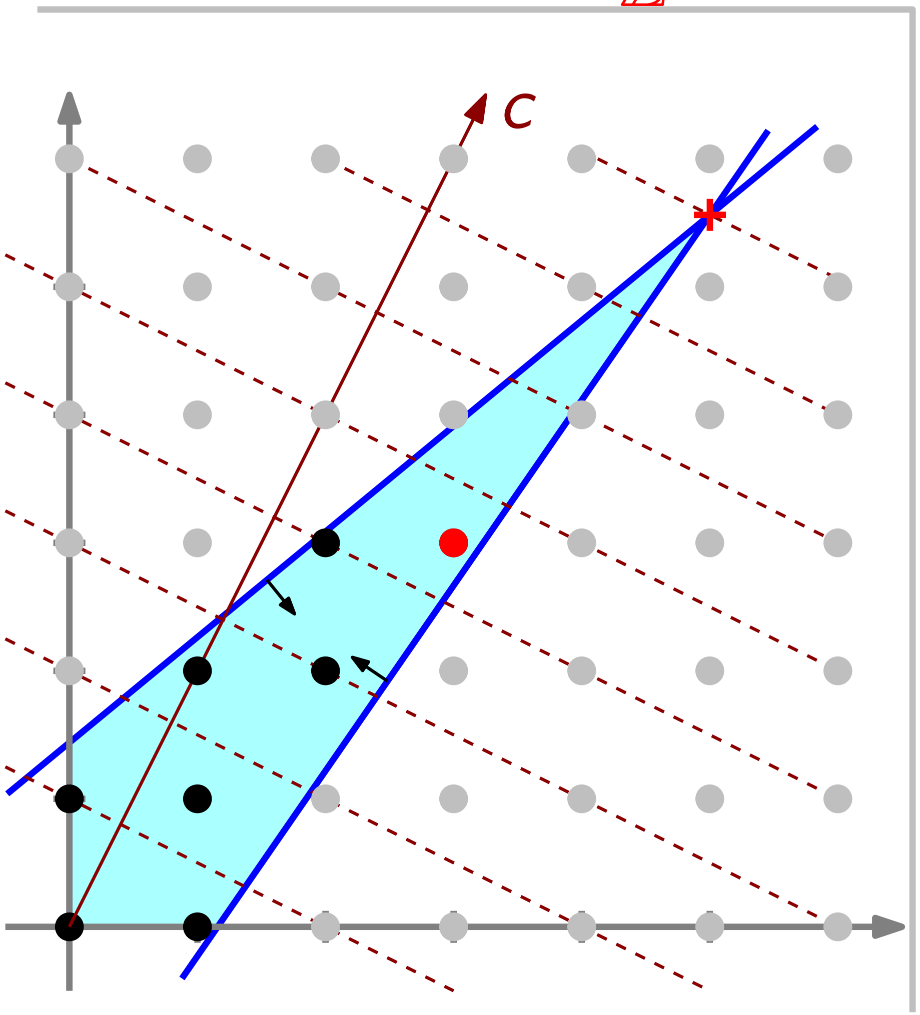


Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,

d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

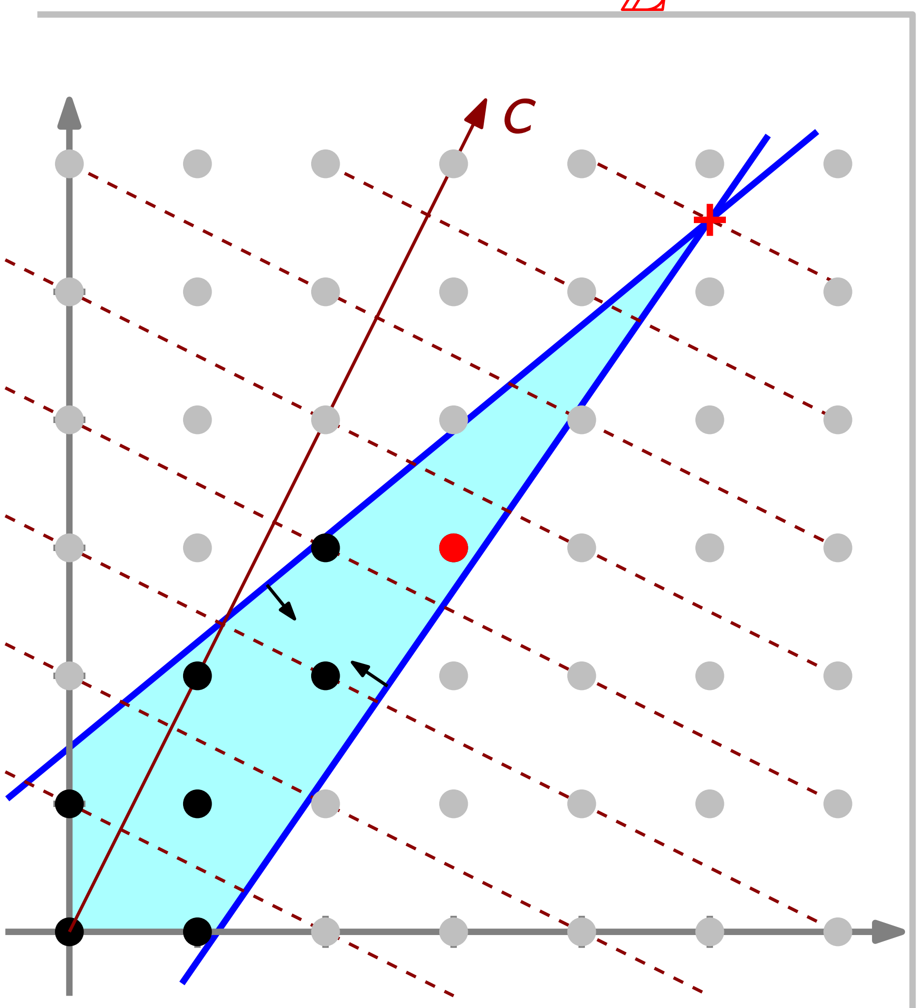
Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

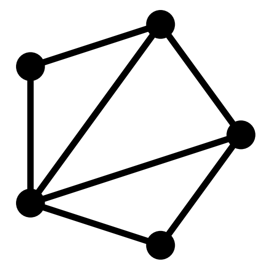
Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}^n$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,
d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.



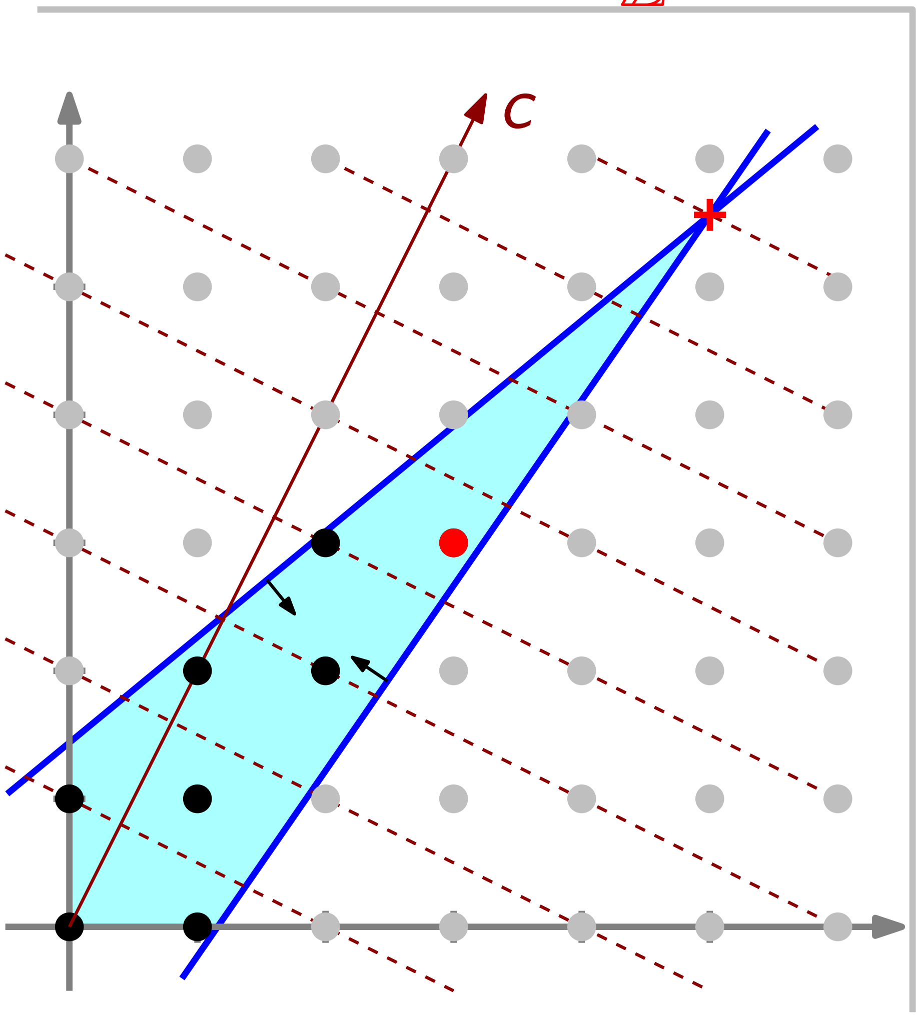
Ziel: $|V'|$ minimal!

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

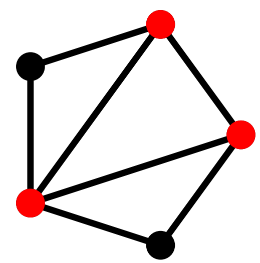
Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$



Ges. Knotenüberdeckung,
d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

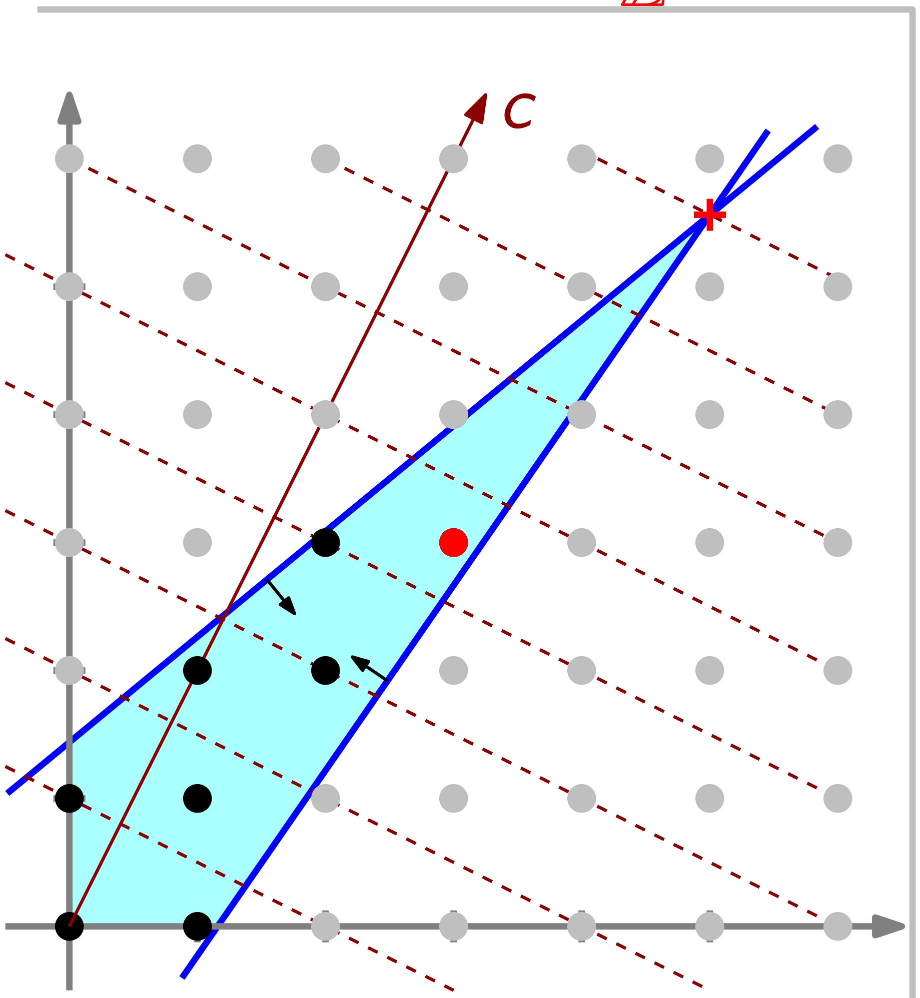
Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

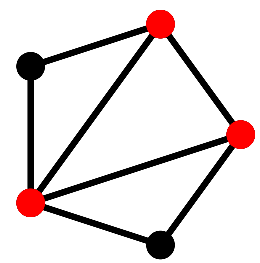
häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}^n$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$



Ges. Knotenüberdeckung,
d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

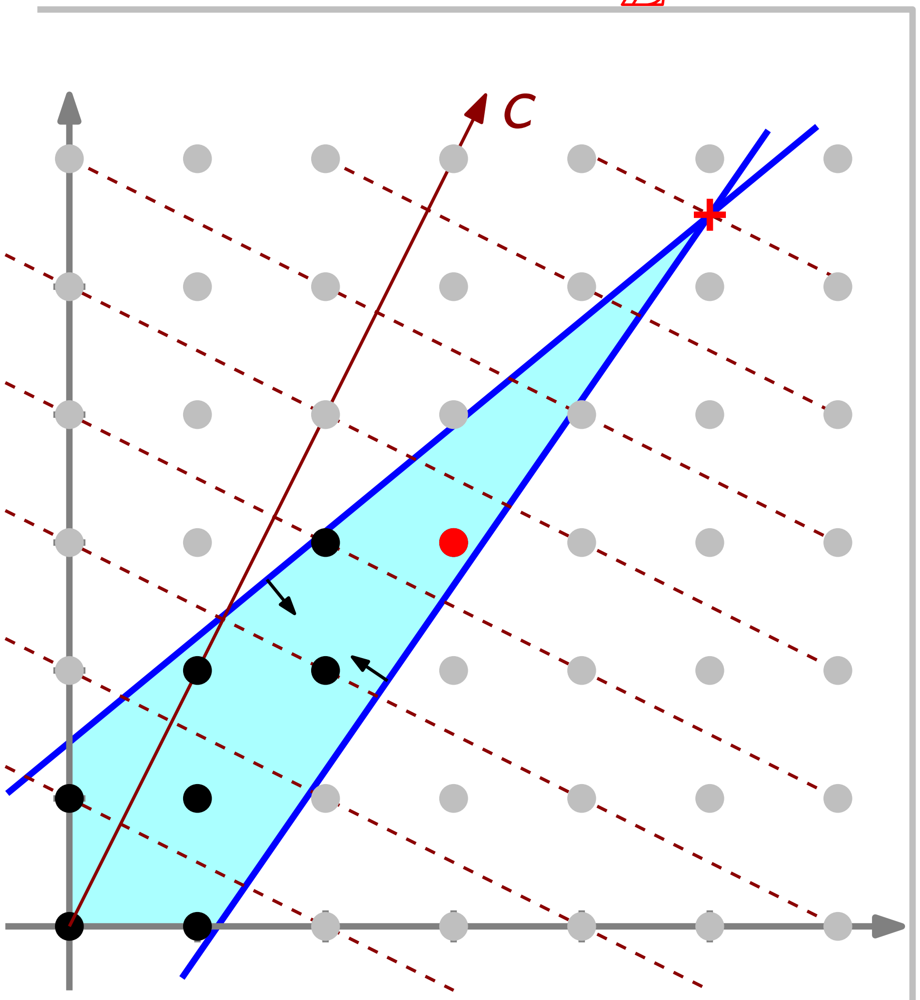
Aufgabe. Modellieren Sie dieses Problem als ILP!

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

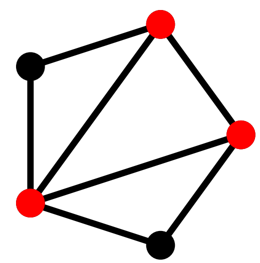
häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\top x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.



Ziel: $|V'|$ minimal!

Aufgabe. Modellieren Sie dieses Problem als ILP!

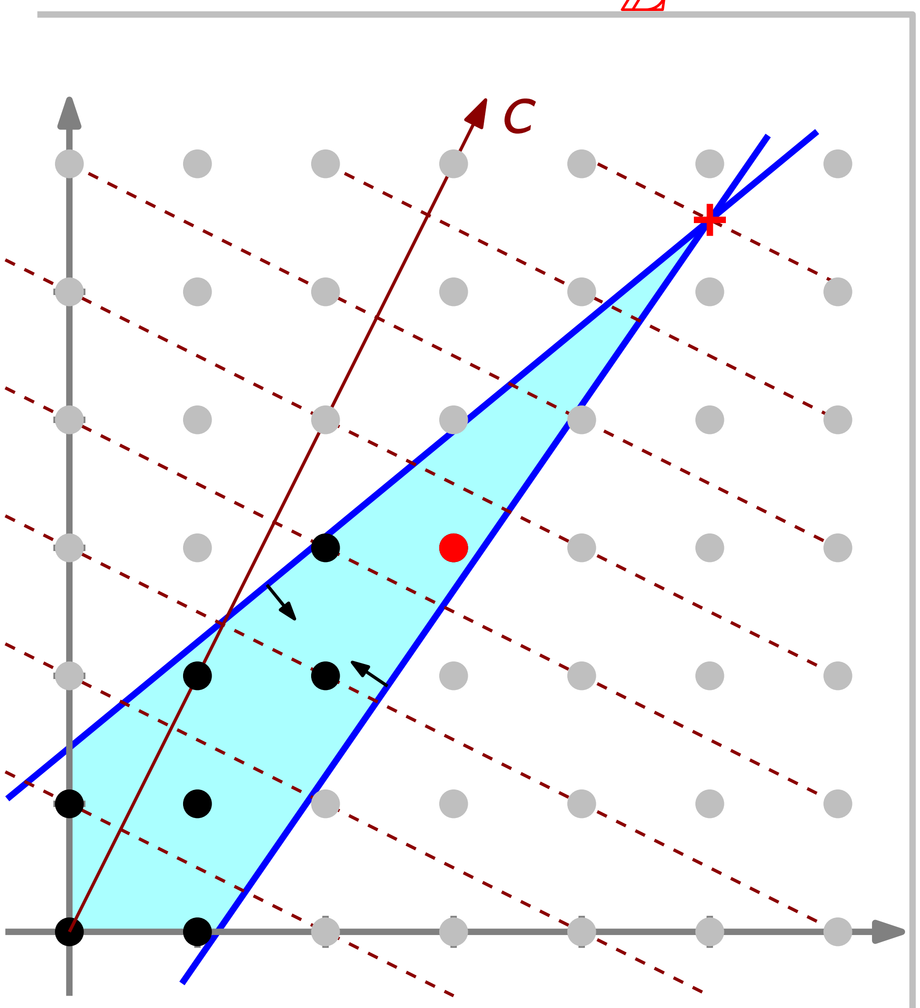
Tipp. Verwenden Sie für jeden Knoten v eine Variable $x_v \in \{0,1\}$, mit $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

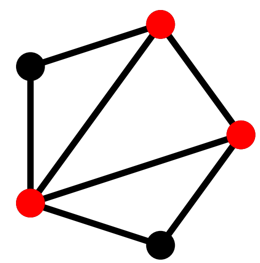
Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,

d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.



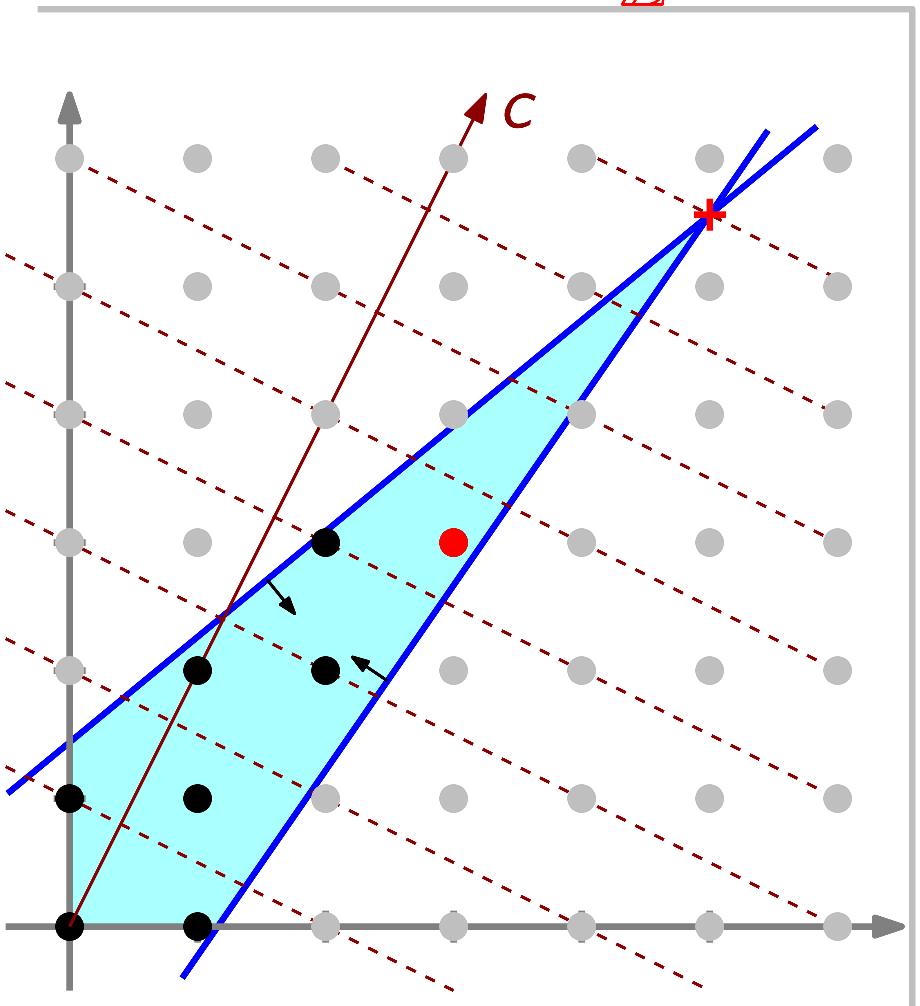
Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell. Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0, 1\}$.

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

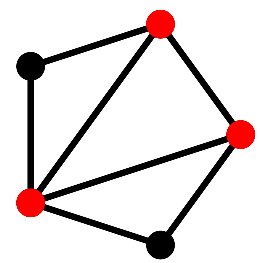
Gesucht: $x^\star \in \overset{\text{häufig } \{0,1\}^n}{\underset{\mathbb{Z}^n}{\cancel{\mathbb{R}^n}}}$ mit $x^\star = \overset{\text{oder arg min}}{\arg\max}\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \overset{\geq}{\leq} \overset{x \in \mathbb{Z}^n}{b, x \geq 0}\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,

d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.



Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell. Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0, 1\}$.

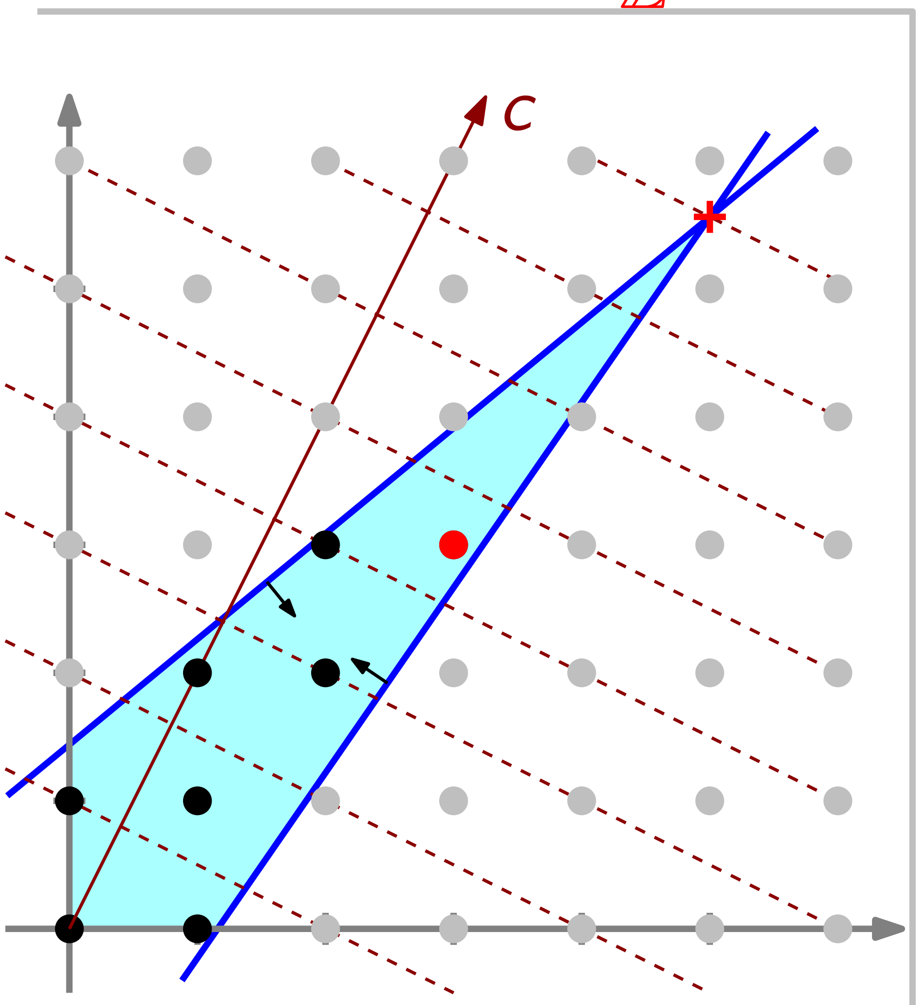
Ziel:

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

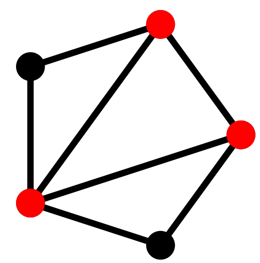
Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,

d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.



Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell. Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0, 1\}$.

Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$

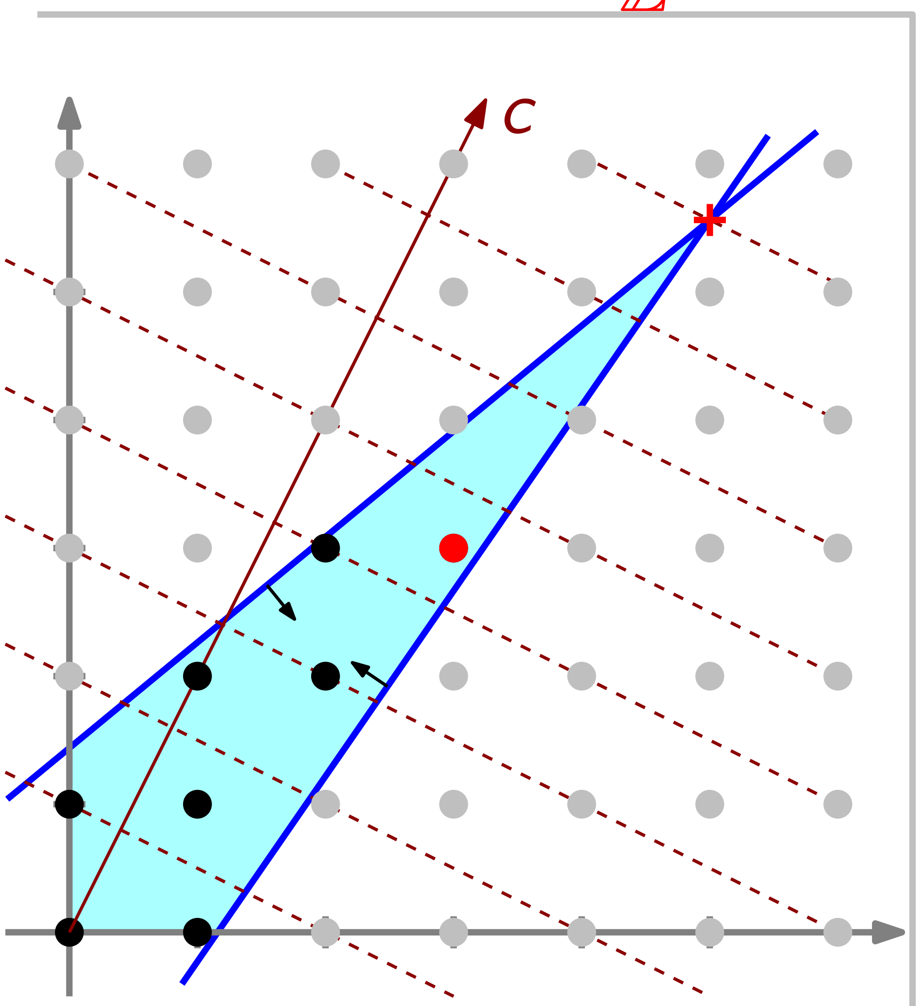
Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

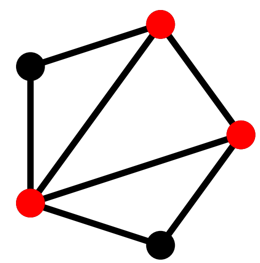
häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}^n$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$
Ges. Knotenüberdeckung,
d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.



Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell. Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0,1\}$.

Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$

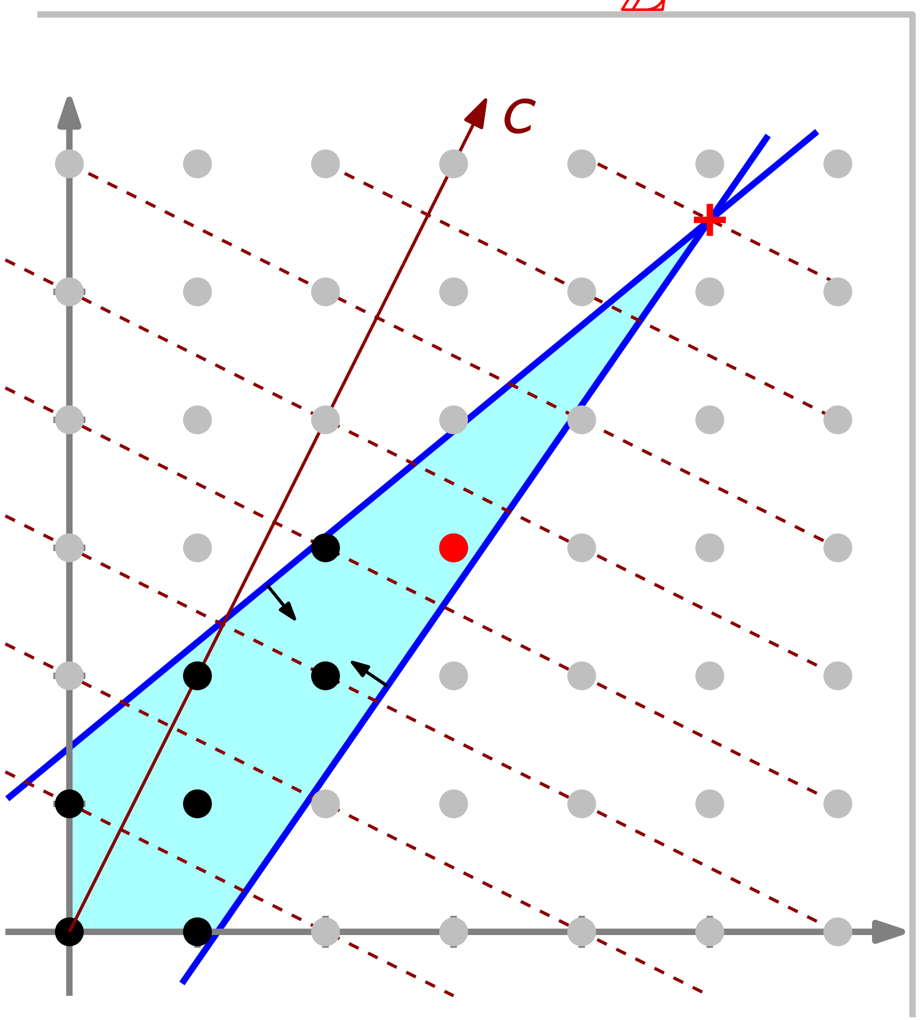
Beschränkungen:

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

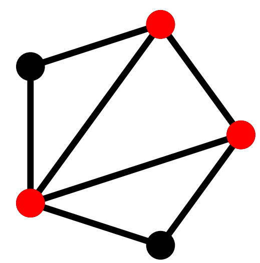
häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,
d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.



Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell. Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0,1\}$.

Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$

Beschränkungen:

für jede Kante $uv \in E$ fordern wir $x_u + x_v \geq 1$.

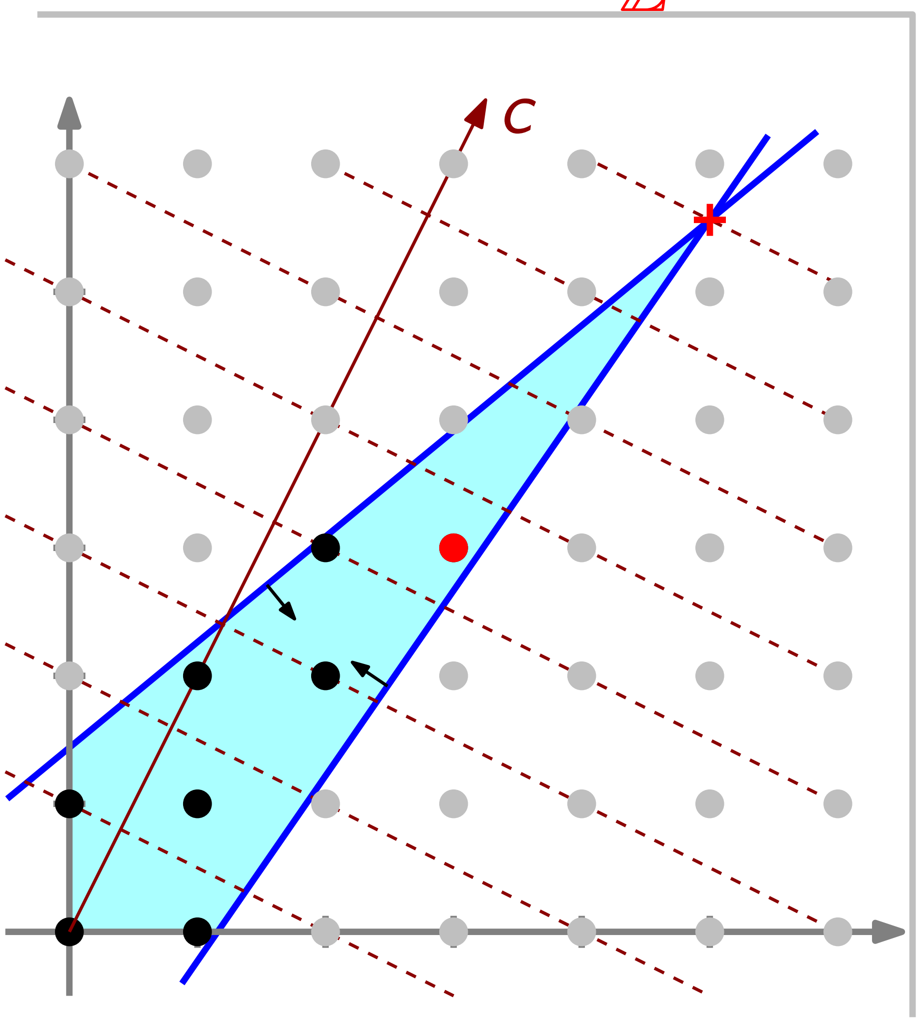
Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ oder arg min $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}^n$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,
d.h. $V' \subseteq V$, so dass
jede Kante mind. einen
Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell.

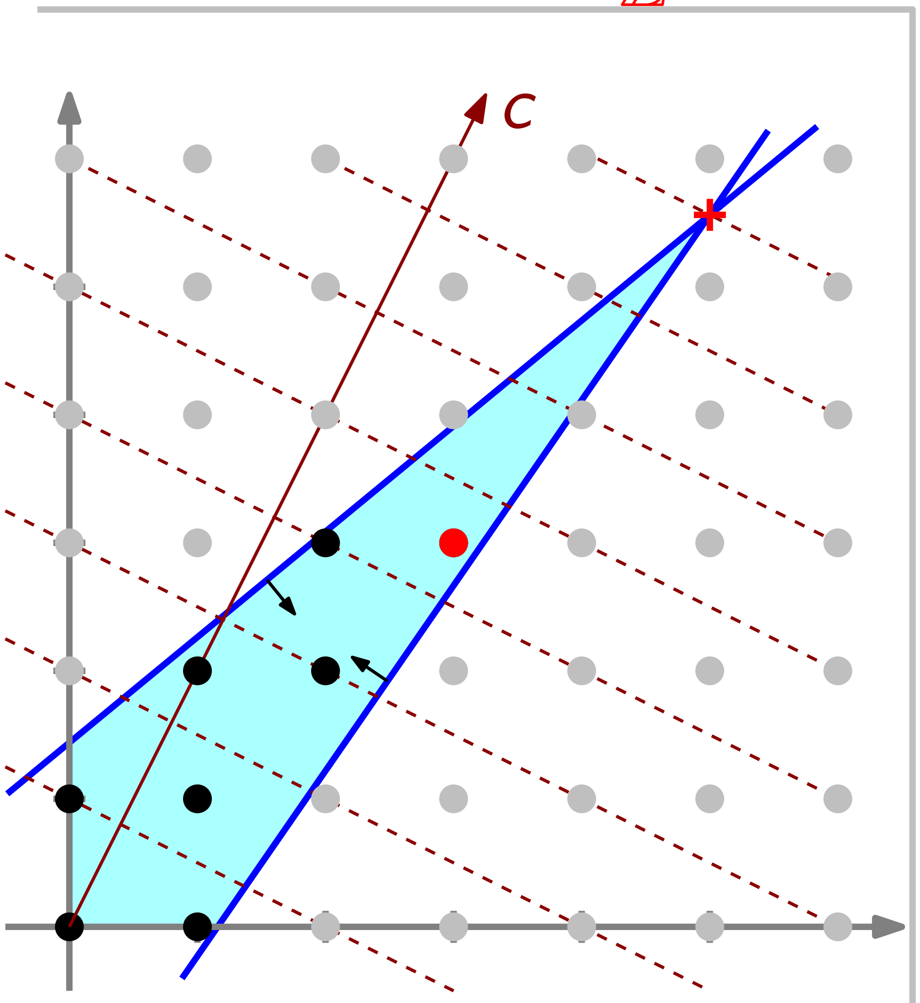
0-1-ILP

- Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0,1\}$.
- Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$
- Beschränkungen:
  für jede Kante $uv \in E$
  fordern wir $x_u + x_v \geq 1$.

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ häufig $\{0,1\}^n$ $\mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ oder $\arg\min$ $\geq$ $x \in \mathbb{Z}^n$



Problem. NP-schwer

- Geg. Graph $G = (V, E)$
- Ges. Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.
- Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell. 0-1-ILP

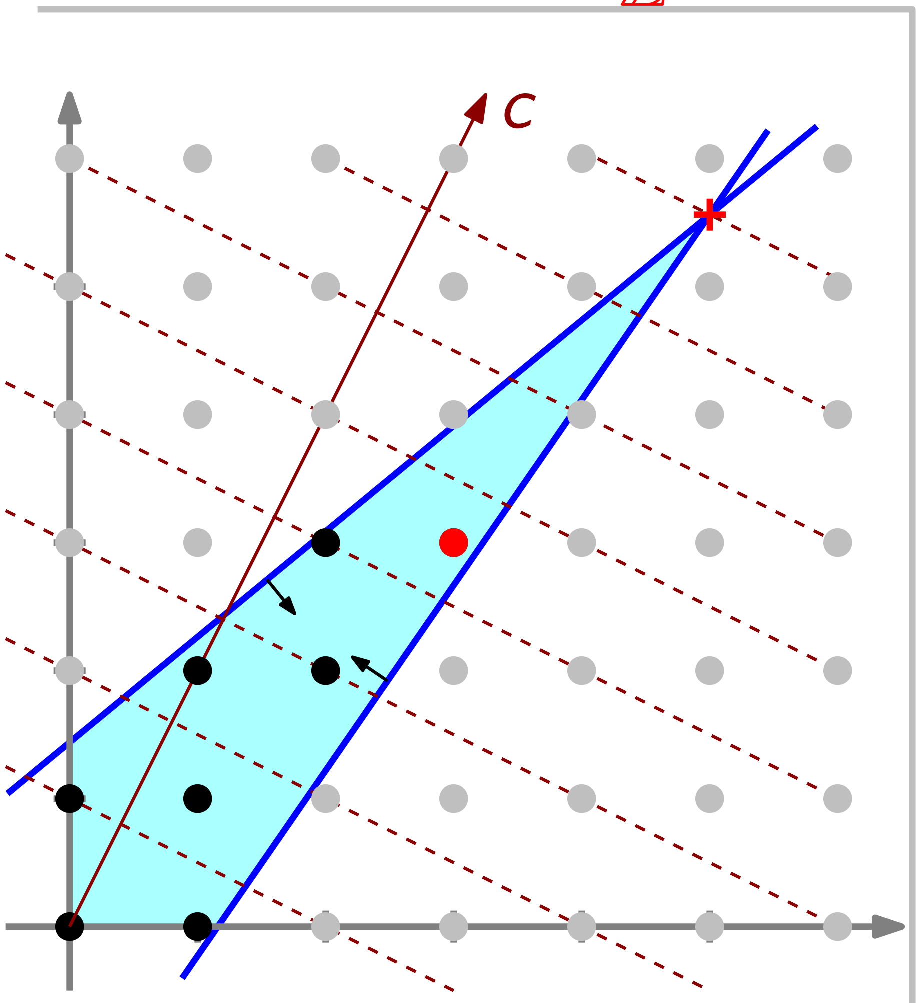
- Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0,1\}$.
- Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$
- Beschränkungen: für jede Kante $uv \in E$ fordern wir $x_u + x_v \geq 1$.

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

häufig $\{0,1\}^n$ — oder arg min — $\geq$ — $x \in \mathbb{Z}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{Z}^n$ mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Problem. Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung,

d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

NP-schwer

Modell. Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0,1\}$.

Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$

Beschränkungen:

für jede Kante $uv \in E$ fordern wir $x_u + x_v \geq 1$.

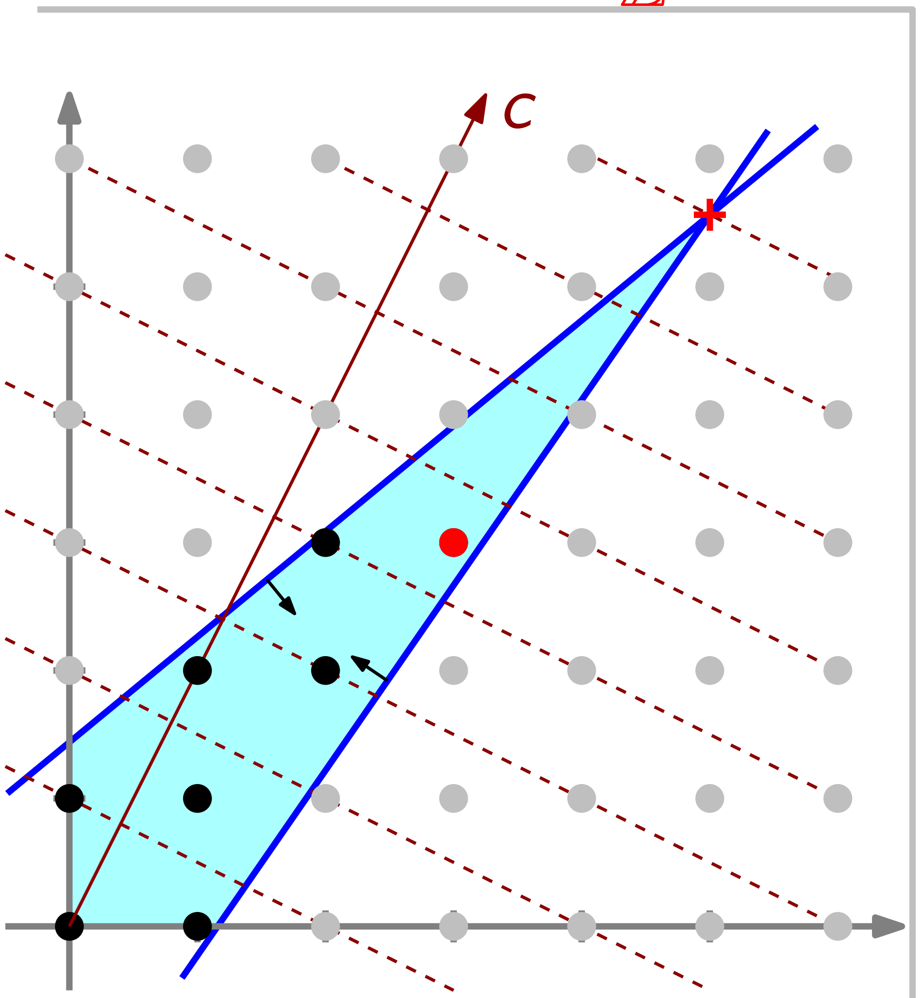
0-1-ILP

$\Downarrow$

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^\star \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{Z}^n$ (häufig $\{0,1\}^n$) mit $x^\star = \arg\max\{c^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ (oder arg min; $\geq$; $x \in \mathbb{Z}^n$)



Problem. NP-schwer

Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mind. einen Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell. 0-1-ILP $\Downarrow$ NP-schwer

Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0,1\}$.

Ziel: minimiere $\sum_{v \in V} x_v$

Beschränkungen:

für jede Kante $uv \in E$ fordern wir $x_u + x_v \geq 1$.