Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Approximationsalgorithmen

Vorlesung 13:
Steinerwald, primal-dual

Folien von Joachim Spoerhase

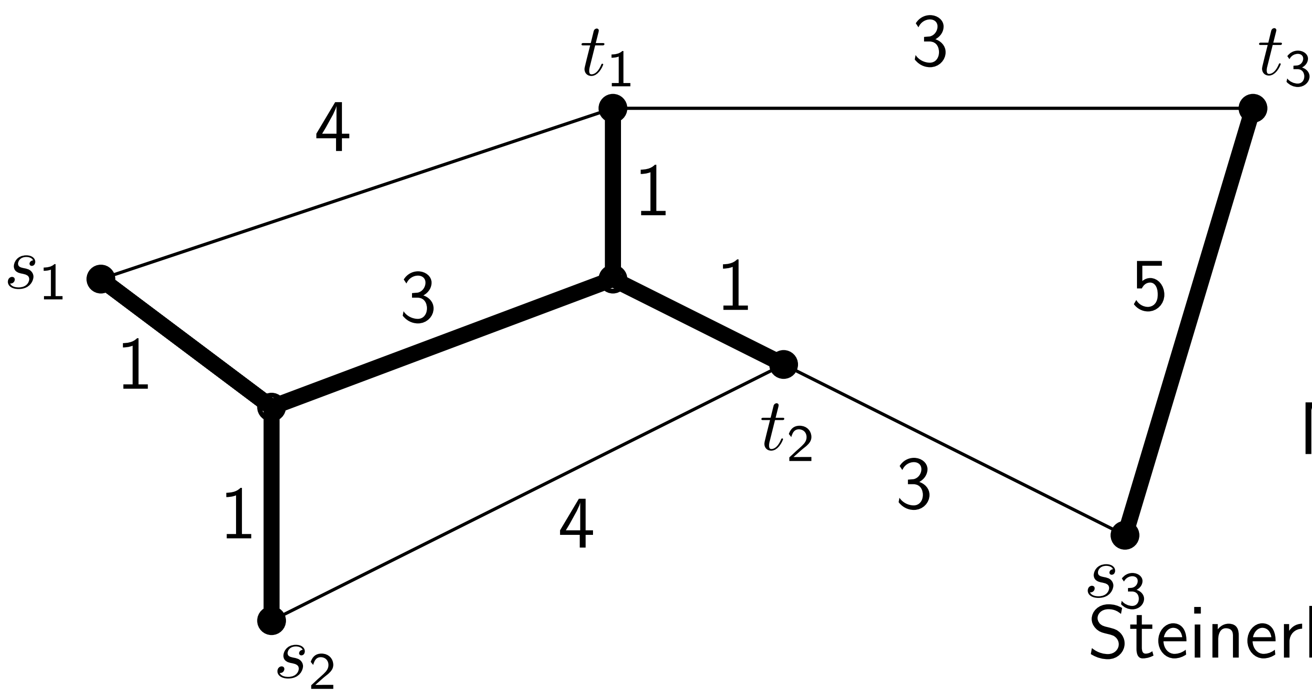
[Vazirani: §22, Williamson & Shmoys: §7.4]

Alexander Wolff   Lehrstuhl für Informatik I   WS 2018/19

Steinerwald

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{N}$ sowie Menge $R = \{(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)\}$ von k Paaren von Knoten.

Gesucht: Eine Kantenmenge $F \subseteq E$ mit minimalen Gesamtkosten $c(F)$, so dass der Teilgraph (V, F) jedes der Paare (s_i, t_i), $i = 1, \ldots, k$ verbindet.



Spezialfälle?

Kürzeste Wege ($k = 1$)

MST (Paare $= V \times V$)

Steinerbäume (Paare $= T \times T$)

Ansätze?

- Vereinigung k kürzester s_i-t_i-Wege
- Steinertree auf der Terminalmenge

Obige Ansätze sind beliebig schlecht :-([Übungsaufgabe]

Schwierigkeit: Welche Terminalmengen liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente?

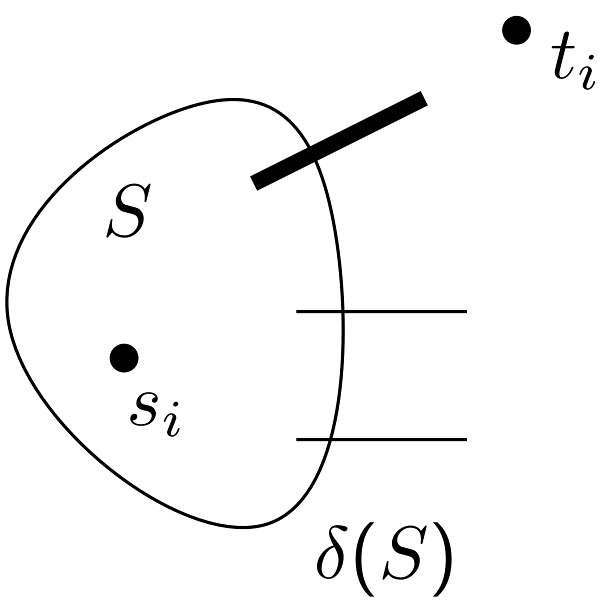
Ein ILP

$$
\begin{array}{llll}
\text{Minimize} & \sum\limits_{e \in E} c_e x_e & & \\
\text{subject to} & \sum\limits_{e \in \delta(S)} x_e & \geq 1 & S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, k \\
& x_e \in \{0, 1\} & & e \in E
\end{array}
$$

wobei $\mathcal{S}_i := \{S \subseteq V : |S \cap \{s_i, t_i\}| = 1\}$

und $\delta(S) := \{(u, v) \in E \colon u \in S$ und $v \notin S\}$

$\rightsquigarrow$ exponentiell großes ILP!



LP-Relaxierung und Duales LP

$$\text{Minimize} \quad \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, k \qquad (y_S)$$

$$x_e \geq 0 \qquad e \in E$$

$$\text{Maximize} \quad \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_i \\ i=1,\ldots,k}} y_S$$

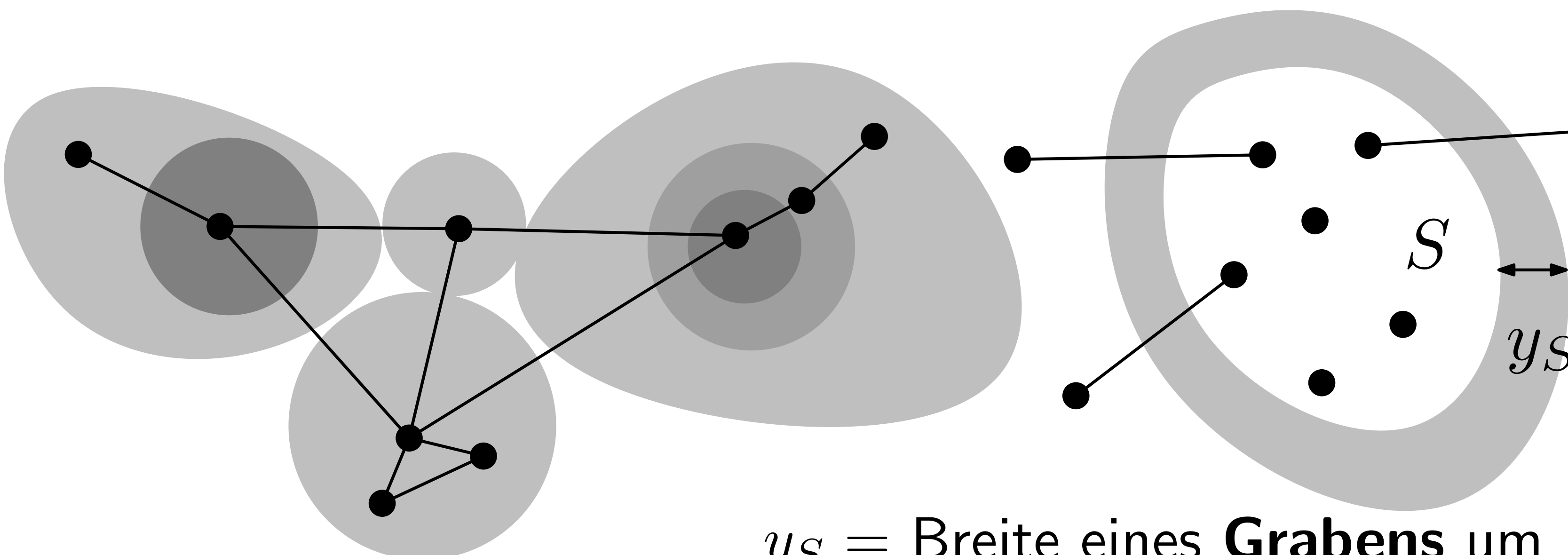
$$\text{subject to} \quad \sum_{S:\, e \in \delta(S)} y_S \leq c_e \qquad e \in E$$

$$y_S \geq 0 \qquad S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, k$$

Intuition für Duales

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_i \\ i=1,\ldots,k}} y_S & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{S:\, e \in \delta(S)} y_S \leq c_e & e \in E \\
& y_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, k
\end{array}
$$

Graph ist Netzwerk von **Brücken**, die **Gräben** überspannen:



$\delta(S) =$
Menge der Kanten / Brücken über Graben um S

$y_S =$ Breite eines **Grabens** um Menge S

Ein erster Primal-Dual-Ansatz

Komplementärer Schlupf: $x_e > 0 \;\Rightarrow\; \sum_{S\colon\, e\in\delta(S)} y_S = c(e)$.

$\Rightarrow$ Wähle „scharfe“ Kanten (und nur solche)!

Wollen iterativ zulässige ganzzahlige Primal-Lösung aufbauen.

Wie finden wir verletzte primale Beschränkung? $\left(\sum_{e\in\delta(S)} x_e < 1\right)$

$\rightsquigarrow$ Zusammenhangskomponente C!

Wie verbessern wir (iterativ) Dual-Lösung?

$\rightsquigarrow$ Erhöhe y_C! (Möglich, weil keine Kante aus $\delta(C)$ scharf.)

Ein erster Primal-Dual-Ansatz

PrimalDualSteinerwaldNaiv(G, c, R)
$\mathbf{y} \leftarrow 0, F \leftarrow \emptyset$
while nicht alle $(s_i, t_i) \in R$ sind in (V, F) verbunden **do**
Bestimme ZK C in (V, F) mit $|C \cap \{s_i, t_i\}| = 1$ für ein i.
Erhöhe y_C bis $\displaystyle\sum_{S:\ e' \in \delta(S)} y_S = c_{e'}$ für ein $e' \in \delta(C)$.
$F \leftarrow F \cup \{e'\}$
return F

Laufzeit?

Trick: Verwalte alle y_S mit $y_S = 0$ implizit.

Analyse

Die Kosten der finalen Lösung F lassen sich schreiben als

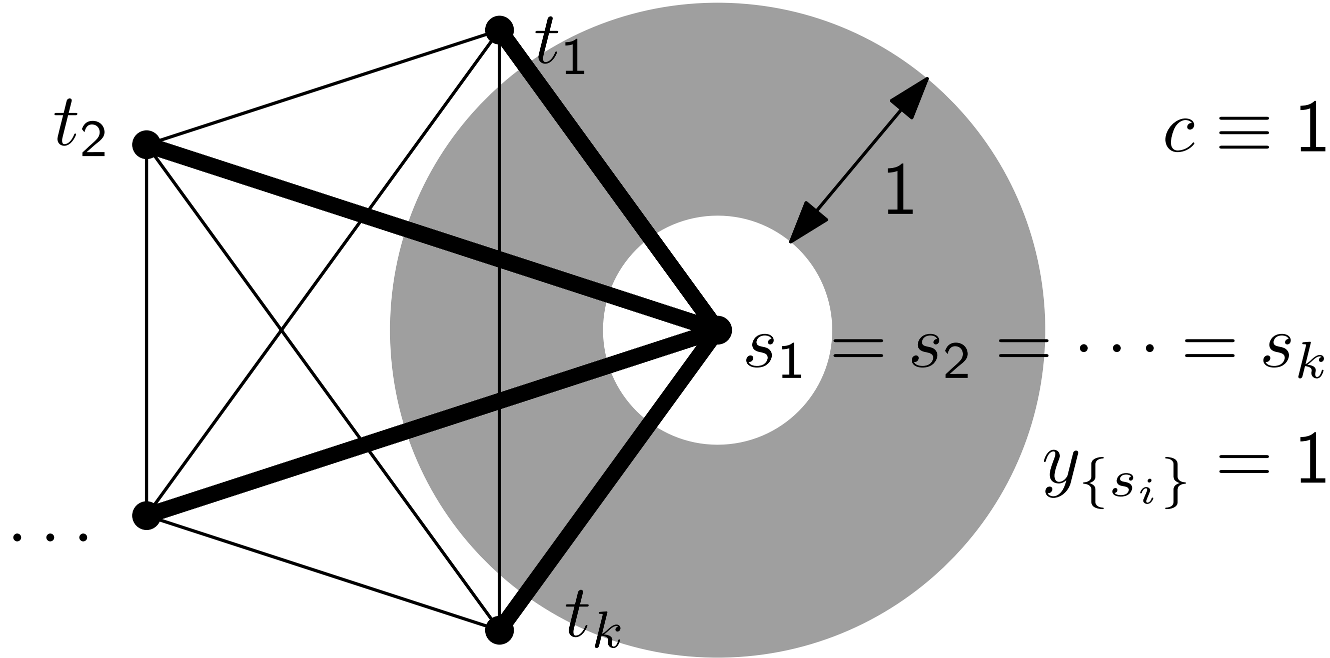
$$\sum_{e \in F} c_e \overset{\text{k. S.}}{=} \sum_{e \in F} \sum_{S:\, e \in \delta(S)} y_S = \sum_S |\delta(S) \cap F| \cdot y_S.$$

Die ist zu vergleichen mit dem dualen Zielfunktionswert $\sum_S y_S$

Es gibt leider Beispiele mit $|\delta(S) \cap F| = k$ für alle $y_S > 0$:

Aber:
Durchschnittsgrad
der ZK$=$2!

$\Rightarrow$ Erhöhe y_C für
alle ZK C simultan!

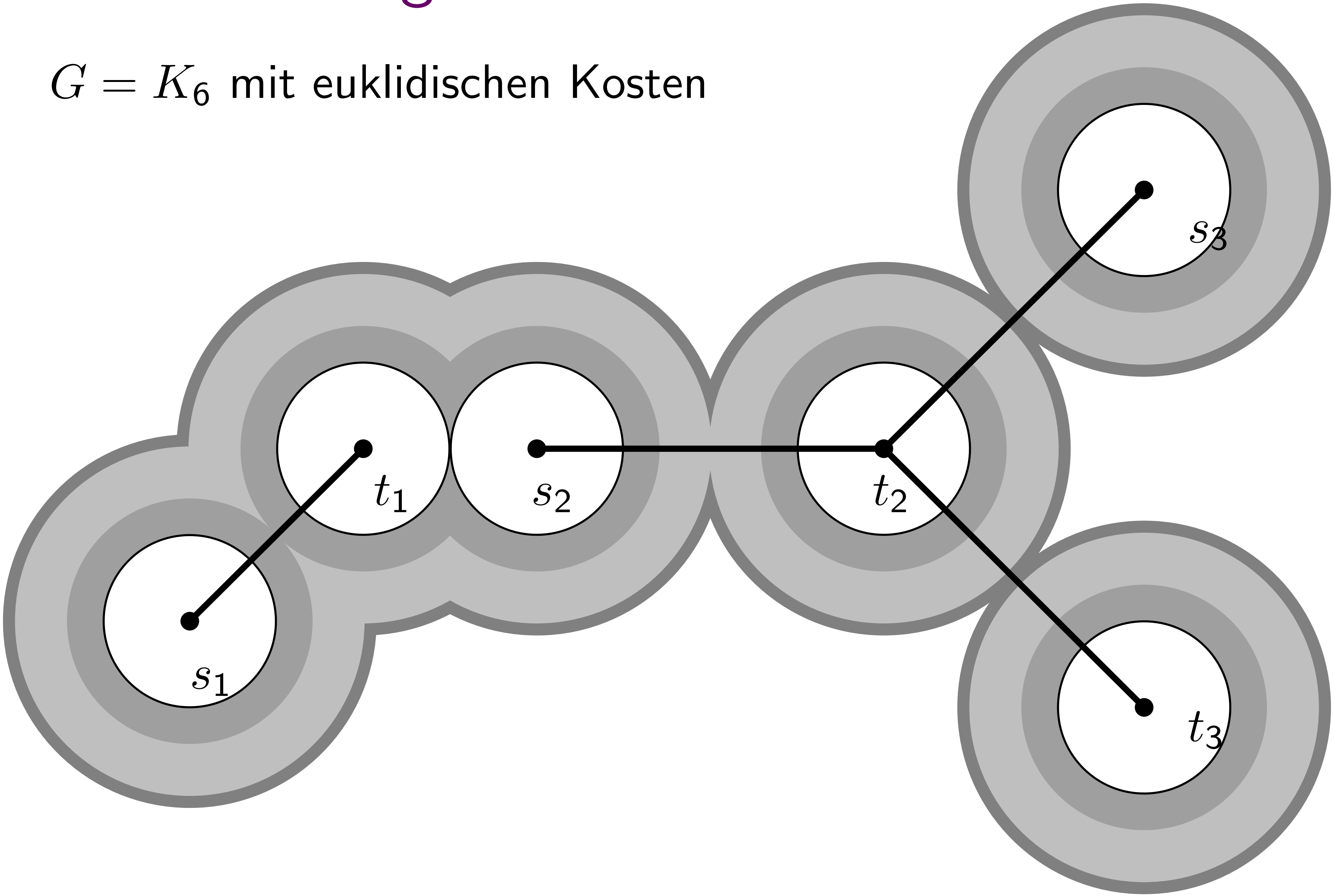


Primal-Dual mit simultaner Erhöhung

PrimalDualSteinerwald(G, c, R)
$\mathbf{y} \leftarrow 0, F \leftarrow \emptyset, \ell \leftarrow 0$
while nicht alle $(s_i, t_i) \in R$ sind in (V, F) verbunden **do**
  $\ell \leftarrow \ell + 1$
  $\mathcal{C} \leftarrow$ Menge aller ZK C in (V, F) mit $|C \cap \{s_i, t_i\}| = 1$ für ein i
  Erhöhe y_C für alle $C \in \mathcal{C}$ einheitlich,
    bis $\sum_{S\colon\, e_\ell \in \delta(S)} y_S = c_{e_\ell}$ für ein $e_\ell \in \delta(C)$, $C \in \mathcal{C}$.
  $F \leftarrow F \cup \{e_\ell\}$
$F' \leftarrow F$
// Pruning
for $k \leftarrow \ell$ **downto** 1 **do**
  if $F' \setminus \{e_k\}$ ist zulässige Lösung **then**
    $F' \leftarrow F' \setminus \{e_k\}$
return F'

Visualisierung

$G = K_6$ mit euklidischen Kosten



Struktur-Lemma

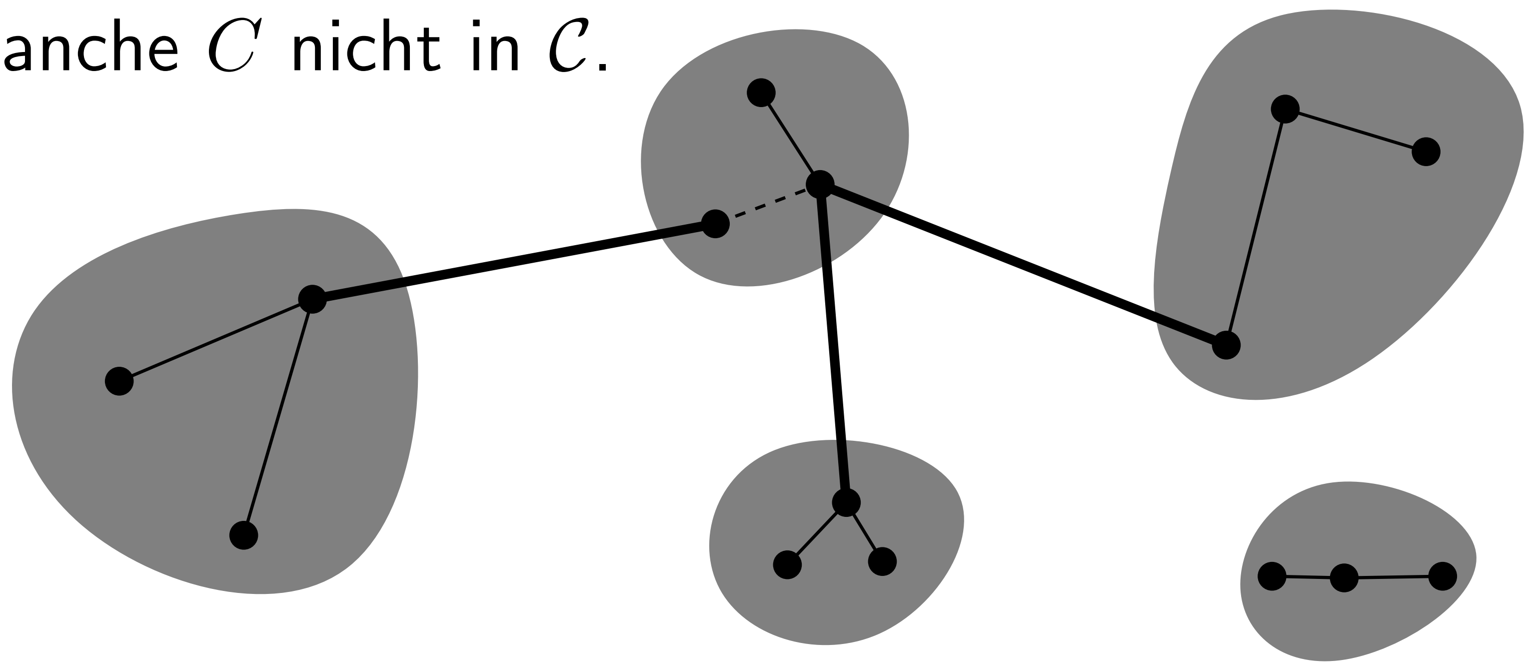
Lemma 1. In jeder Iteration des Algorithmus gilt

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} |\delta(C) \cap F'| \leq 2|\mathcal{C}|\,.$$

Idee. Zunächst Intuition...

Durchschnittsgrad der ZK C bezüglich F ist ≤ 2!

Schwierigkeit: Manche C nicht in $\mathcal{C}$.



Beweis des Struktur-Lemmas

Lemma 1. In jeder Iteration des Algorithmus gilt

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} |\delta(C) \cap F'| \leq 2|\mathcal{C}|\,.$$

Beweis.

Sei $G^* = (V, F')$. G^* ist ein Wald.

Betrachte die i. Iteration, in der e_i zu F hinzugefügt wird.

Kontrahiere jede ZK C von G^* zu einem Knoten $\rightsquigarrow G'$.

(Ignoriere alle ZK C mit $\delta(C) \cap F' = \emptyset$.)

Beh. G' ist ein Wald.

Beachte: $\sum_{C \text{ ZK}} |\delta(C) \cap F'| = \sum_{v \in V(G')} |\deg_{G'}(v)| = 2|E(G')|$

$\leq 2|V(G')|$

Zerlege $V(G')$ in aktive $\mathcal{C}$-Knoten und inaktive Knoten.

Beh. Inaktive Knoten haben Grad ≥ 2 in G'.

Now, $\sum_{v \text{ aktiv}} |\deg_{G'}(v)| \leq 2 \cdot |V(G')| - 2 \cdot \#(\text{inaktiv}) = 2|\mathcal{C}|$. $\square$

Analyse

Satz 1. Obiger Algorithmus ist ein 2-Approximations-algorithmus für das Steinerwald-Problem.

Beweis.

Wie zuvor

$$\sum_{e \in F'} c_e \overset{\text{k. S.}}{=} \sum_{e \in F'} \sum_{S:\ e \in \delta(S)} y_S = \sum_S |\delta(S) \cap F'| \cdot y_S .$$

Wir zeigen per Induktion über die Anzahl der Iterationen des Algorithmus, dass

$$\sum_S |\delta(S) \cap F'| \cdot y_S \leq 2 \sum_S y_S . \qquad (*)$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Analyse

$$\sum_S |\delta(S) \cap F'| \cdot y_S \leq 2 \sum_S y_S \qquad (*)$$

Beziehung gilt trivialerweise zu Begin, da $y_S = 0$ für alle S.

Angenommen $(*)$ gilt zu Beginn einer Iteration.

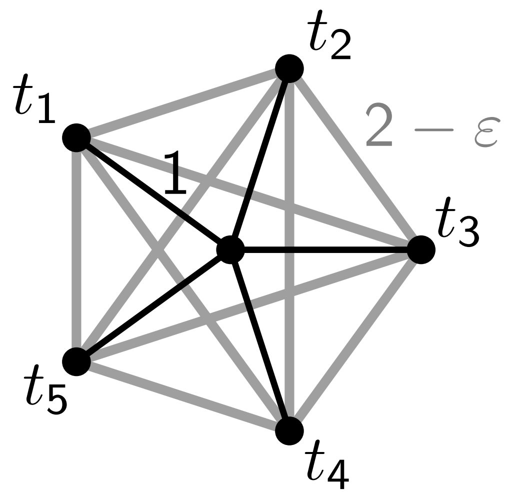
In dieser Iteration erhöhen wir y_C für alle $C \in \mathcal{C}$ um den gleichen Betrag, sagen wir um $\epsilon \geq 0$.

Das erhöht die linke Seite von $(*)$ um $\epsilon \sum_{C \in \mathcal{C}} |F' \cap \delta(C)|$ und die rechte Seite um $2\epsilon|\mathcal{C}|$.

Nach Lemma 1 gilt $(*)$ somit auch nach der Iteration. ∎

Zusammenfassung

Satz. Der synchronisierte Primal-Dual-Algorithm liefert eine 2-Approximation für das Steinerwald Problem. Das „schlechte Beispiel“ fürs Steinerbaum-Problem zeigt auch hier, dass die Analyse scharf ist.



Next week: Q & A session + (possibly) surprise topic.

Exam: Friday, Feb. 8.