Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Approximationsalgorithmen

Vorlesung 10: PTAS für euklidisches TSP

Folien von Joachim Spoerhase

[Vazirani: §11]

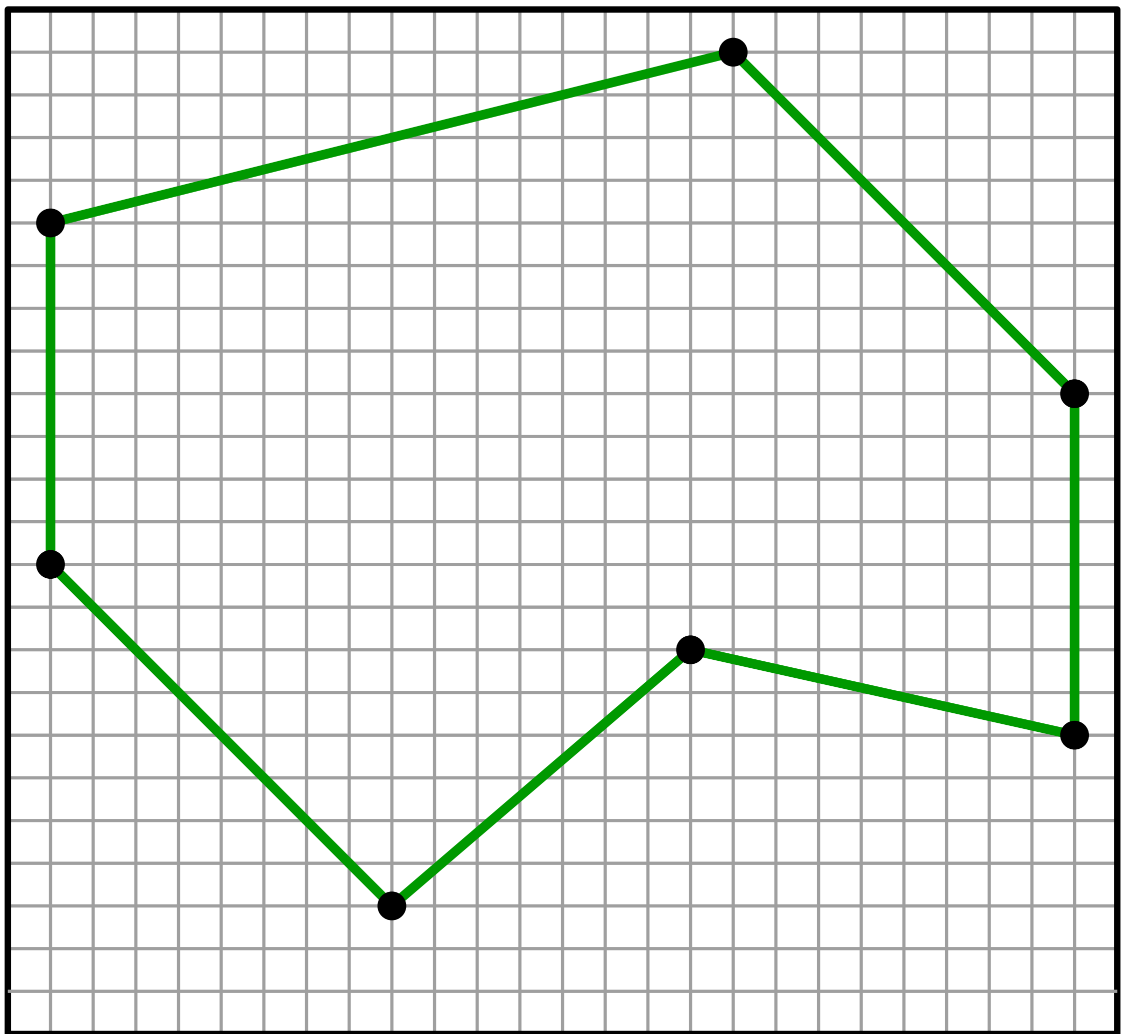
Alexander Wolff Lehrstuhl für Informatik I WS 2018/19

Euklidisches TSP

Gegeben: Eine Menge von n Punkten in $\mathbb{R}^2$.

Die Distanz zwischen zwei Punkten ist die euklidische Distanz.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.



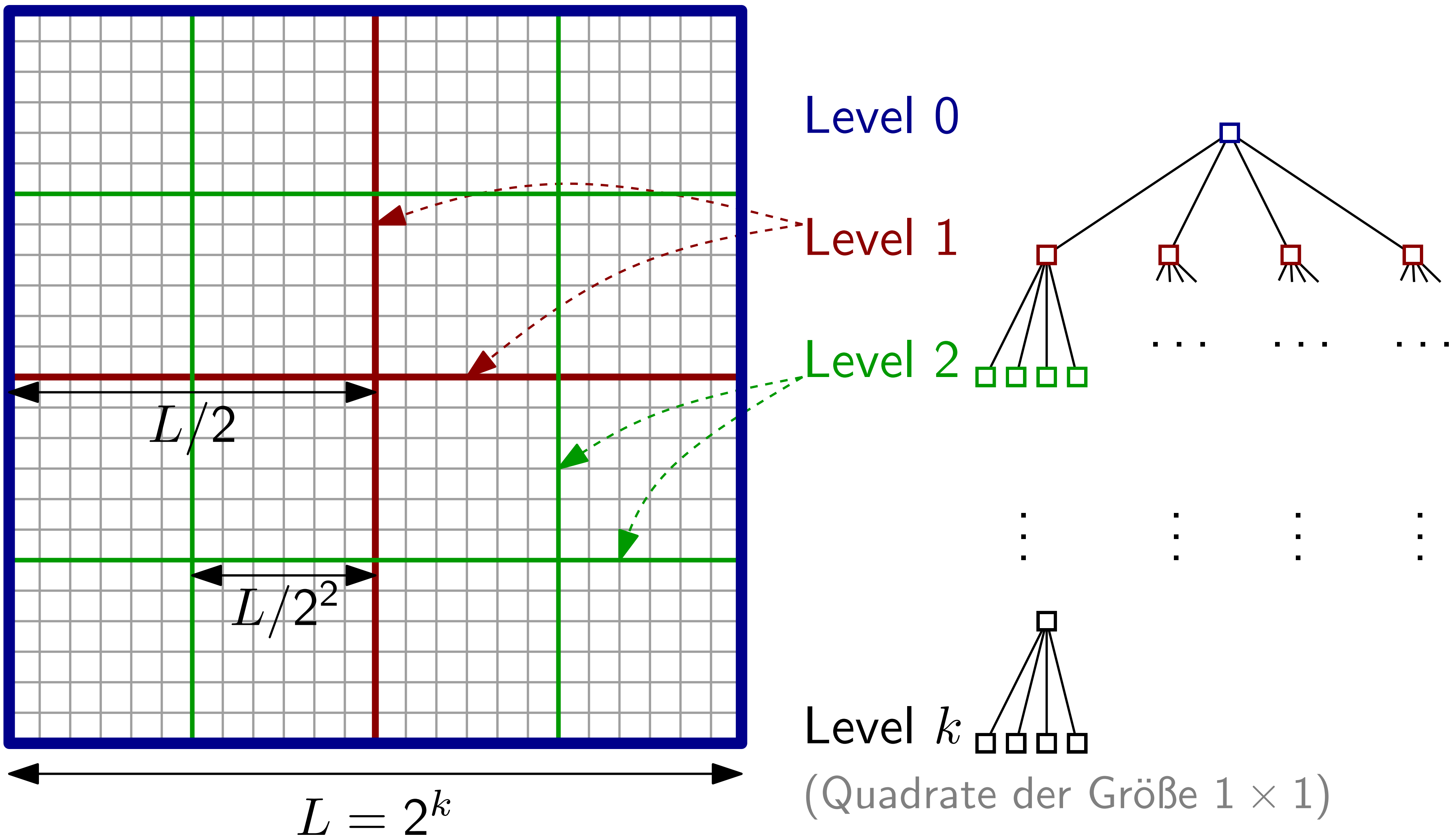
Vereinfachende Annahmen

- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$; $k = 2 + 2\log_2 n$
- Koordinaten ganzzahlig

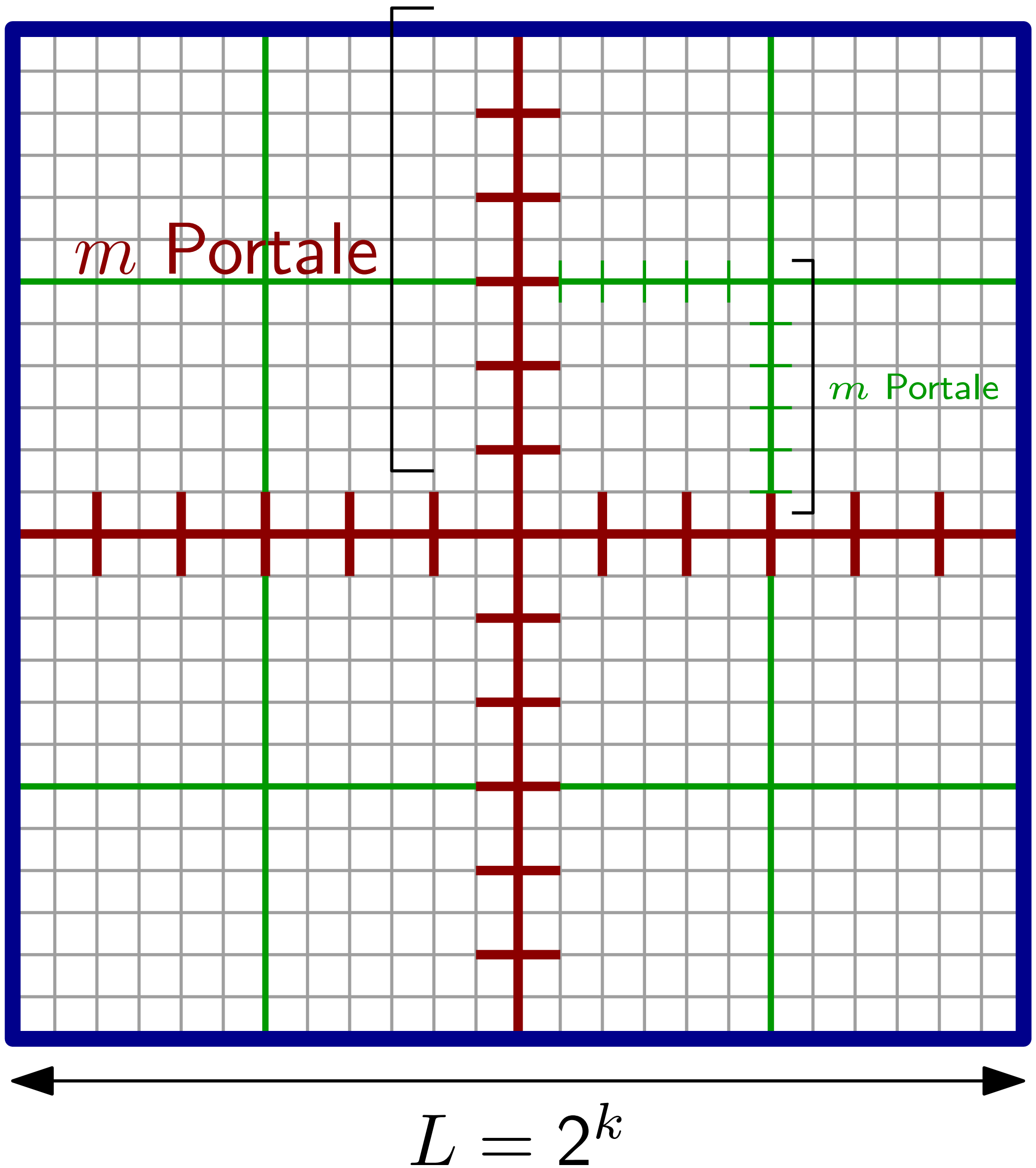
(„Rechtfertigung“ ÜA)

Ziel:
$(1+\epsilon)$-Approximation!

Basiszerlegung



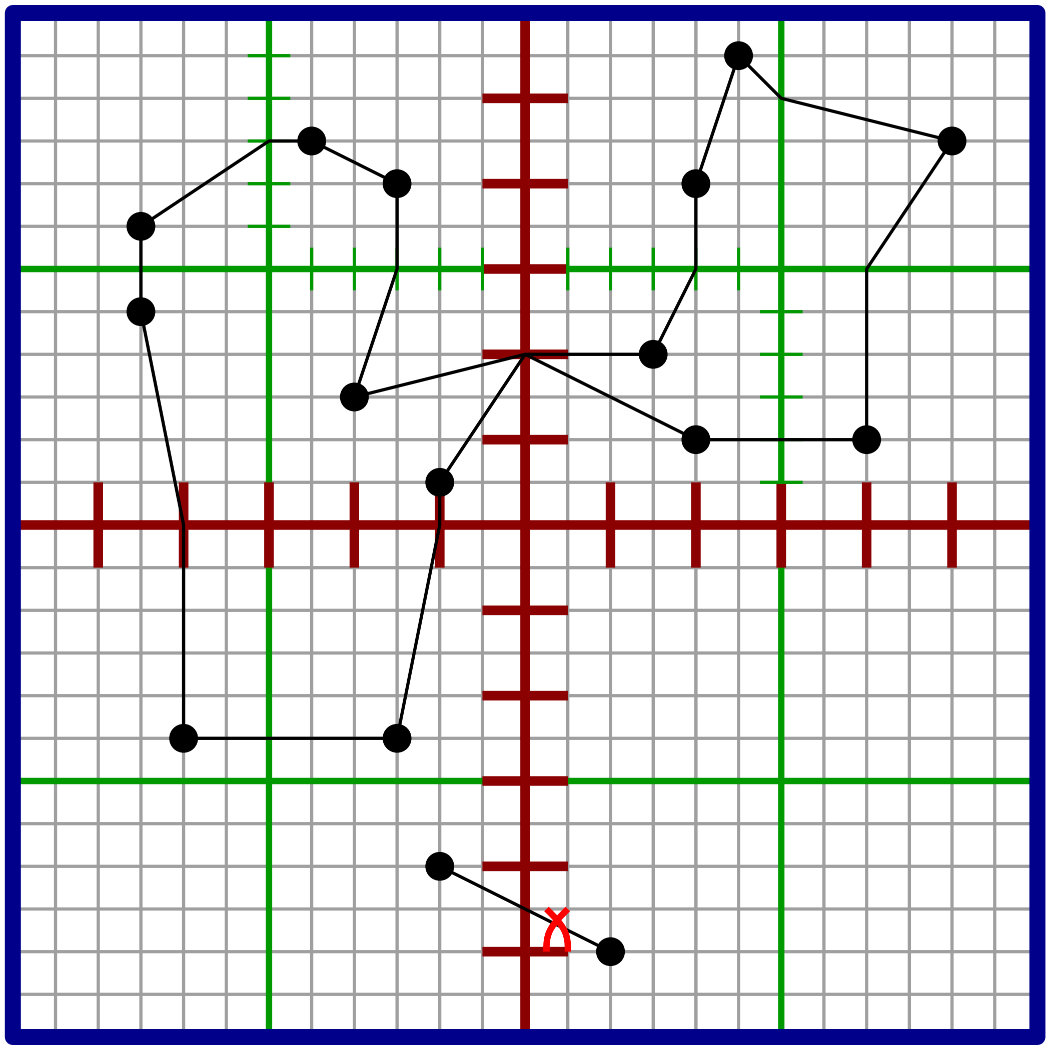
Portale



- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\epsilon, 2k/\epsilon]$

  $\Rightarrow m = O((\log n)/\epsilon)$
- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$
- Level-i-Quadrat: $L/2^i \times L/2^i$
- Level-i-Quadrat hat höchstens $4m$ Portale auf seinem Rand.

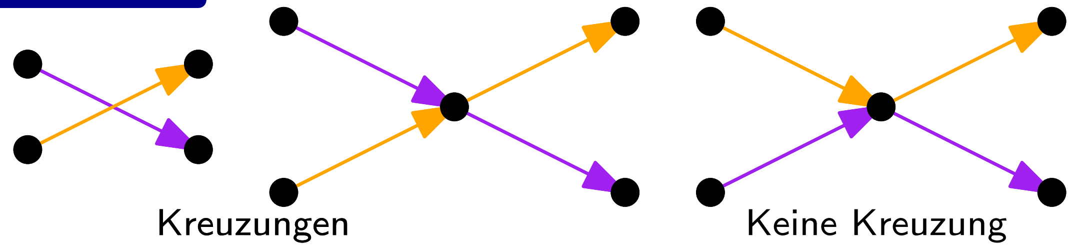
Wohlgeformte Touren



Eine Tour heißt *wohlgeformt*, wenn

- sie eine Tour über allen Eingabepunkten und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basiszerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

Ohne Einschränkung (ÜA): Kein Portal wird mehr als zweimal besucht



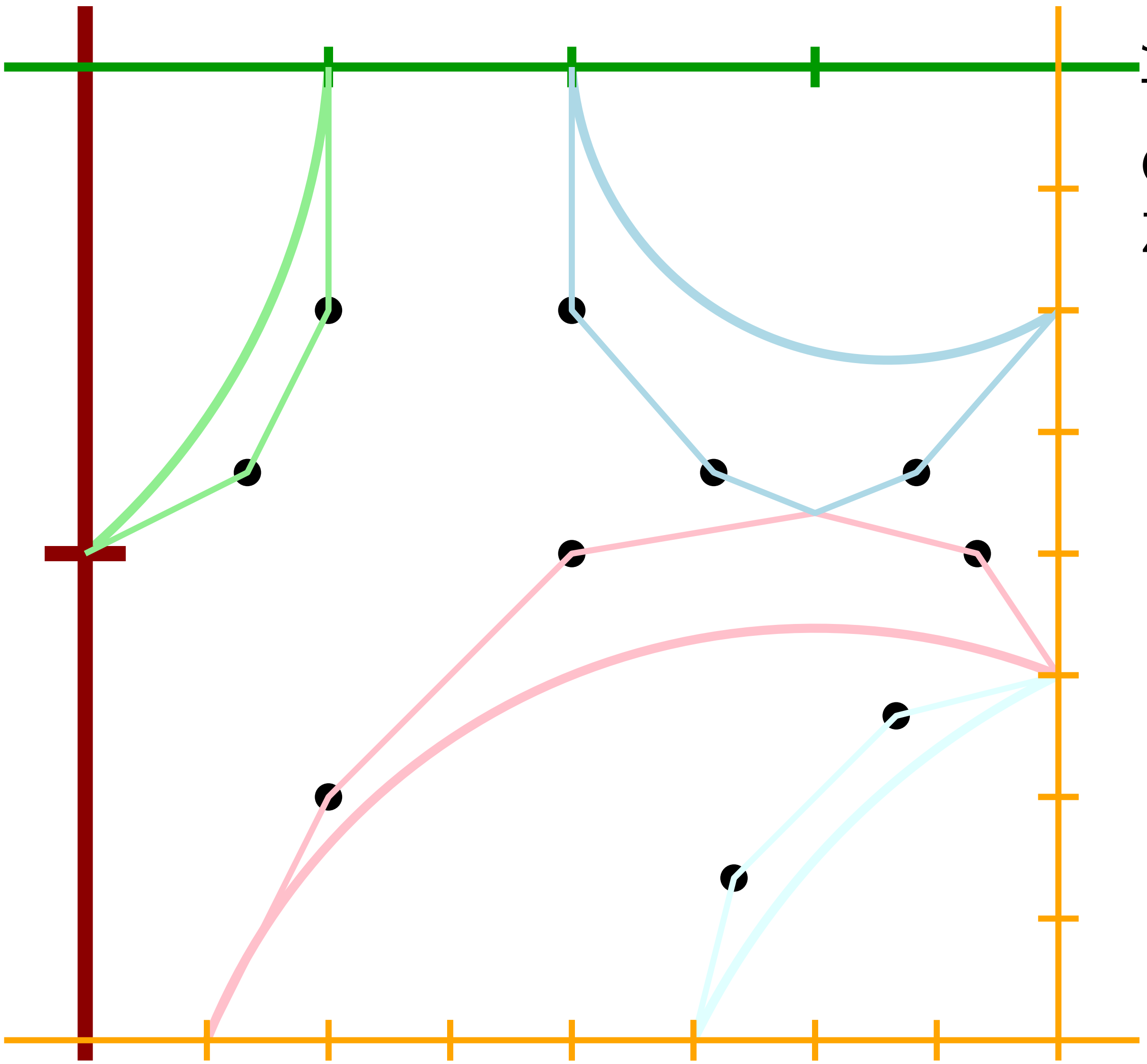
Berechnung wohlgeformter Touren

Lem. 1. Eine günstigste wohlgeformte Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\epsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Beweisidee.

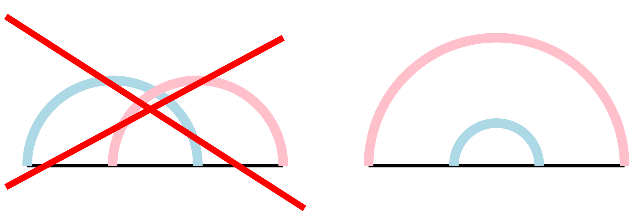
- Dynamische Programmierung!
- Berechne Daten über beste wohlgeformte Tour für jedes Quadrat im Zerlegungsbaum.
- Diese Daten können im Zerlegungsbaum effizient Bottom-Up propagiert werden.

Dynamisches Programm (I)



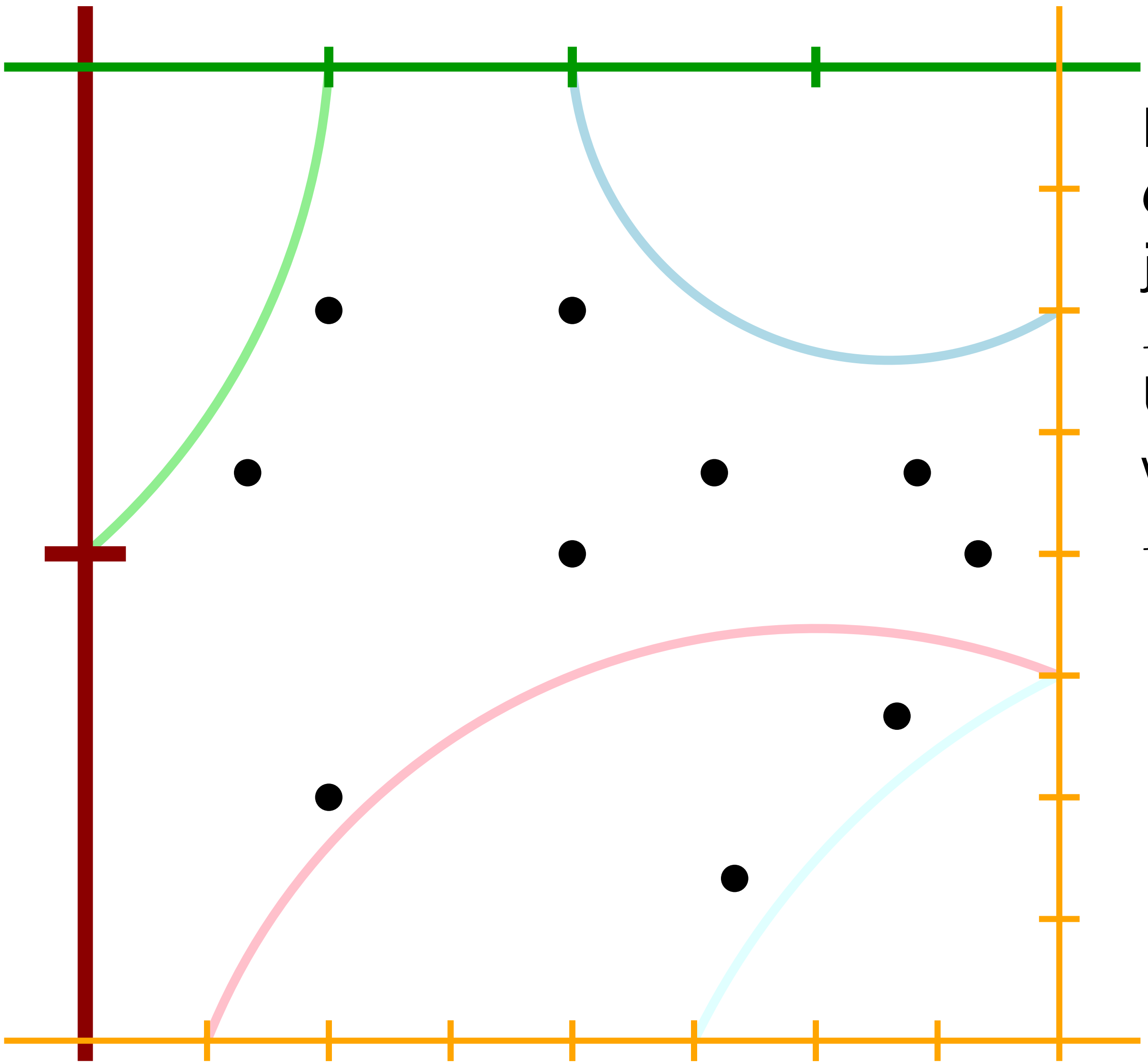
Jede globale, wohlgeformte Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

- Überdeckung der Knoten in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht
- eine **kreuzungsfreie Paarung** der besuchten Portale



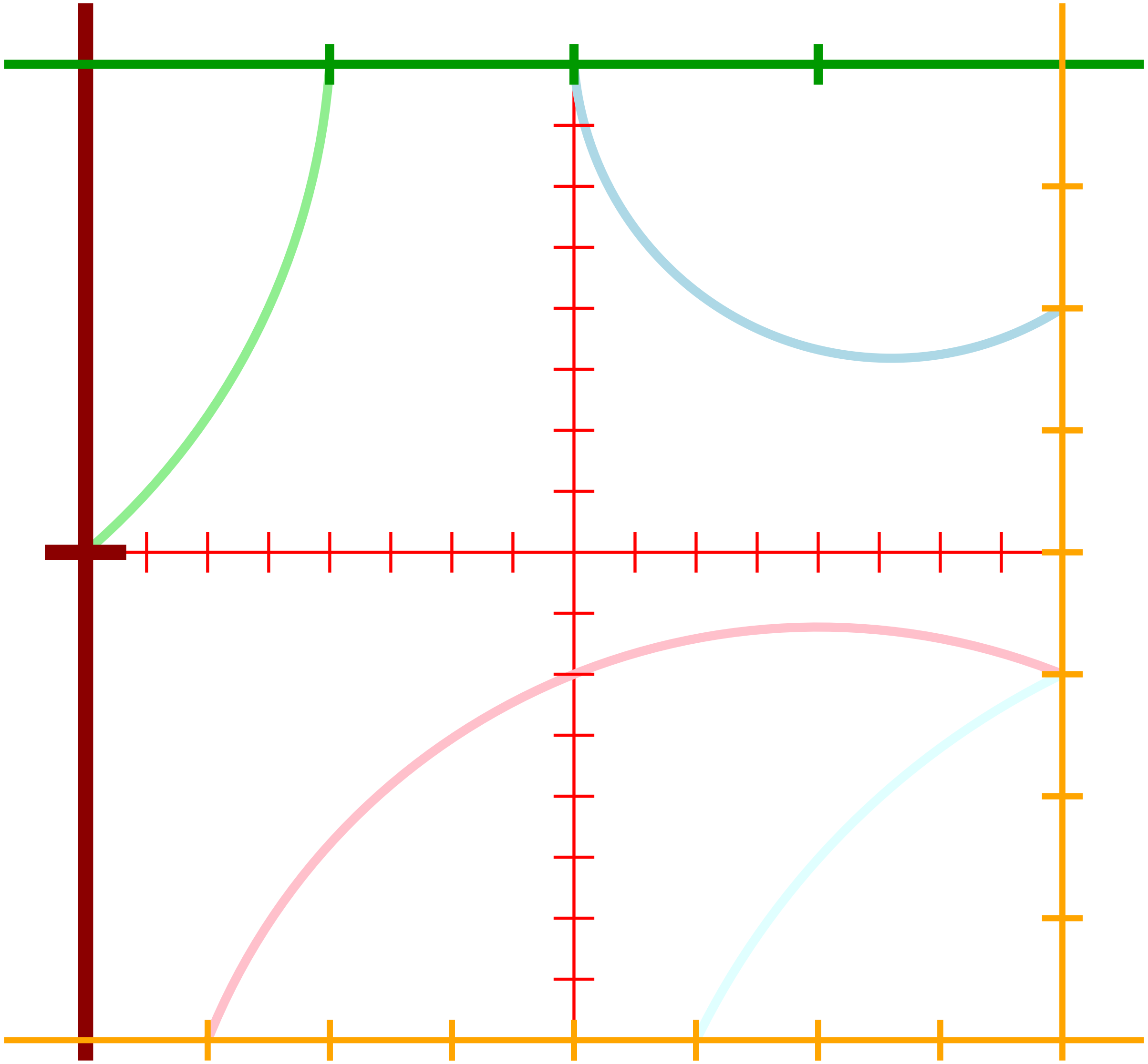
max. $\underbrace{n^{O(1/\epsilon)}}_{\#\text{Besuchsvektoren}} \times \underbrace{2^{O(m)}}_{\#\text{real. Paarungen}}$ $= n^{O(1/\epsilon)}$ krf. Paarungen

Dynamisches Programm (II)



Berechne für jedes Quadrat Q im Zerlegungsbaum und jede kreuzungsfreie Paarung P für Q eine günstigste Überdeckung der Knoten mit wohlgeformten Pfaden, die P respektiert.

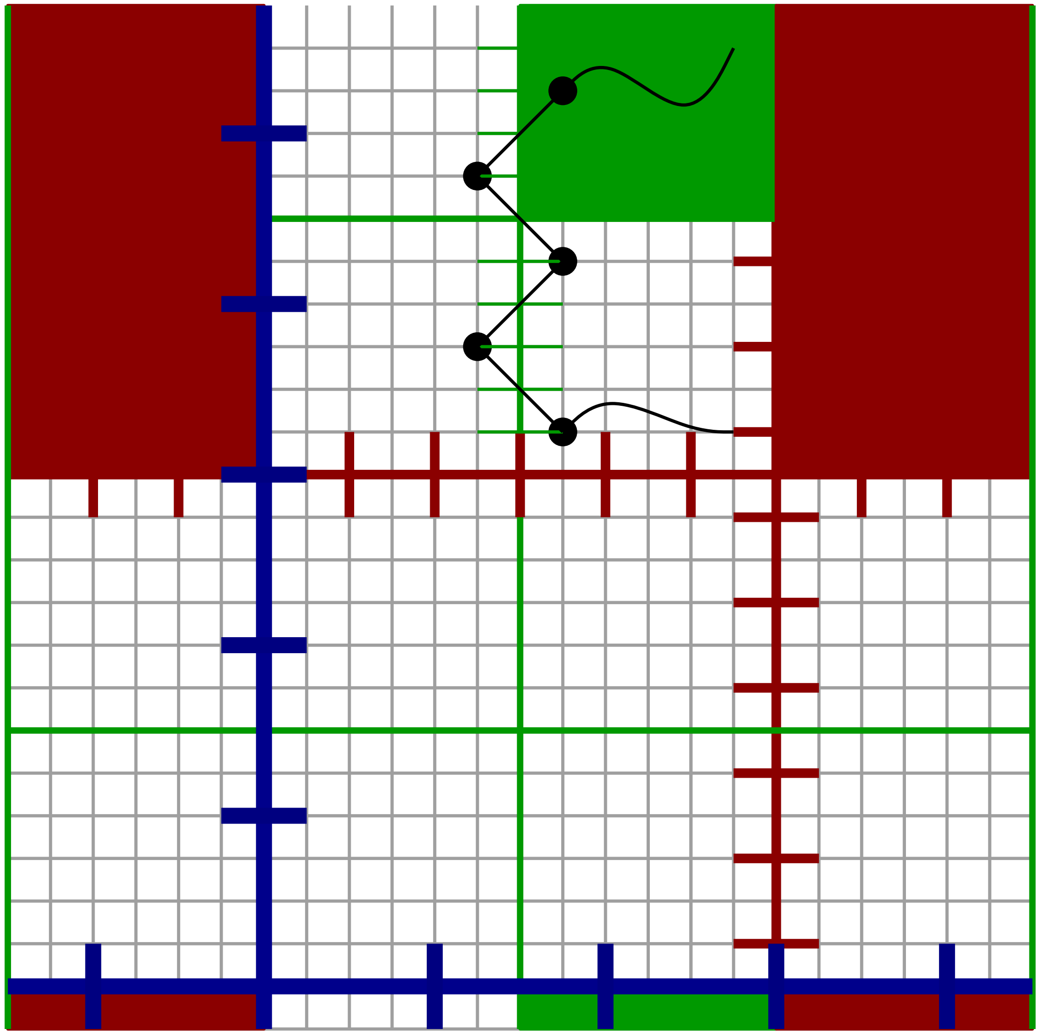
Dynamisches Programm (III)



Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\epsilon)})^4 = n^{O(1/\epsilon)}$ kreuzungsfreien Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren
- Korrektheit per Induktion

Verschobene Zerlegung



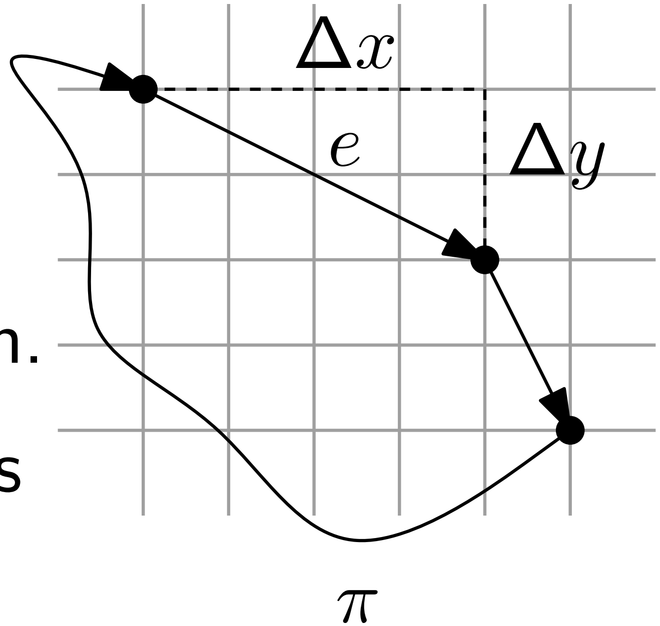
- Die beste wohlgeformte Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:
  $$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
  $$y \mapsto (y + b) \bmod L$$
- Quadrate im Zerlegungsbaum werden „umgeschlagen“.
- Dynamisches Programm muss entsprechend modifiziert werden.

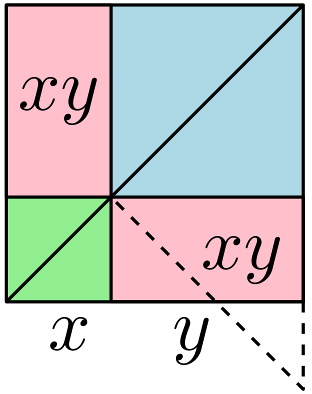
Verschobene Zerlegung (II)

Lem. 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \text{OPT}$.

Beweis

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.
- Jede Kante e generiert $N_e \leq \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.



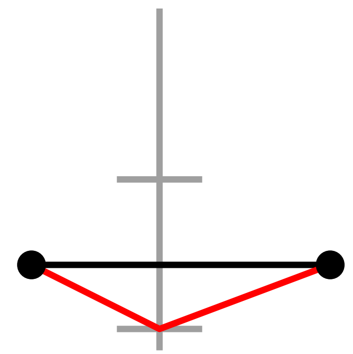


- $N_e^2 \leq (\Delta x + \Delta y)^2 \leq 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 2|e|^2$.
- Nun liefert Aufsummieren die Behauptung.

Verschobene Zerlegung (III)

Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt. Dann sind die erwarteten Kosten einer günstigsten wohlgeformten Tour bezüglich der (a, b)-verschobenen Zerlegung höchstens $(1 + \sqrt{2}\epsilon)$OPT.

Beweis. Betrachte optimale Tour π. Machen π wohlgeformt, indem wir alle Schnittpunkte mit dem $(L \times L)$-Gitter zum nächstgelegenen Portal bewegen.



Verlängerung pro Schnittpunkt $\leq$ Interportaldistanz

Verschobene Zerlegung (III)

- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.

- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i/L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).

- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{L}{2^i m} \frac{2^i}{L} \leq \frac{k+1}{m} \leq \epsilon.$$

- Summierung über alle $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$ vielen Schnittpunkte zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes liefert die Behauptung.

Approximationsschema

Satz 4. Es gibt einen *deterministischen* Algorithmus (PTAS) für euklidisches TSP, der für jedes $\epsilon > 0$ eine $(1+\epsilon)$-Approximation in $n^{O(1/\epsilon)}$ Zeit liefert.

Beweis. Probiere alle L^2 vielen (a, b)-verschobenen Zerlegungen aus. Eine davon muss nach Satz 3 die gewünschte Güte haben.