

Approximationsalgorithmen

7. Vorlesung: Metrisches k -Zentrum

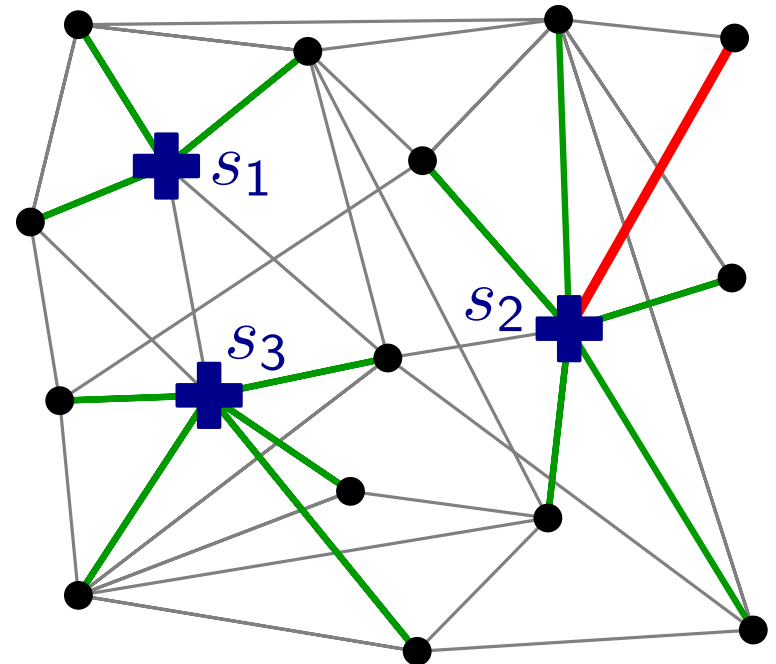
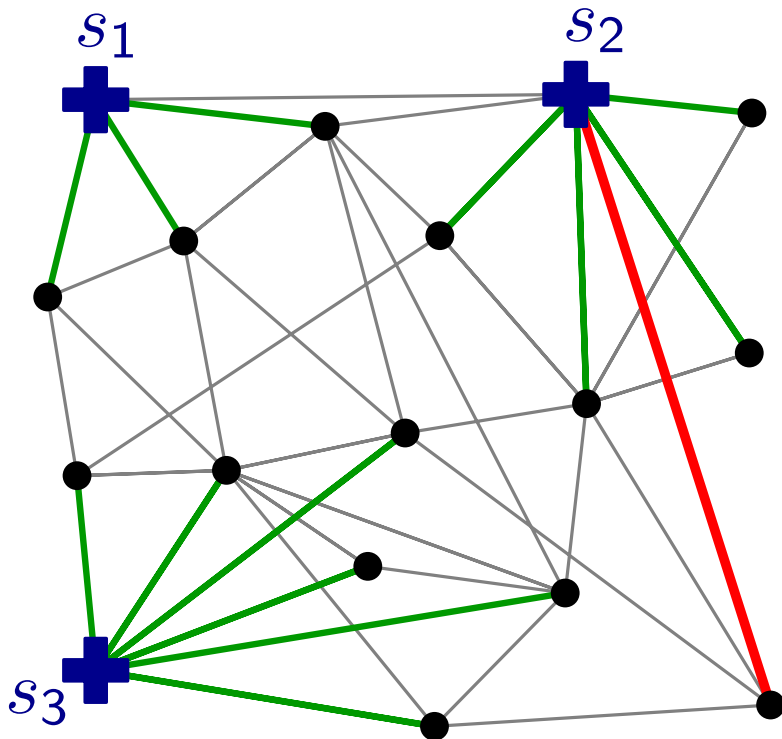
– Basierend auf Folien von Joachim Spoerhase –

Das metrische k -ZENTRUM-Problem

Gegeben: Ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Metrik $c: E \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$.

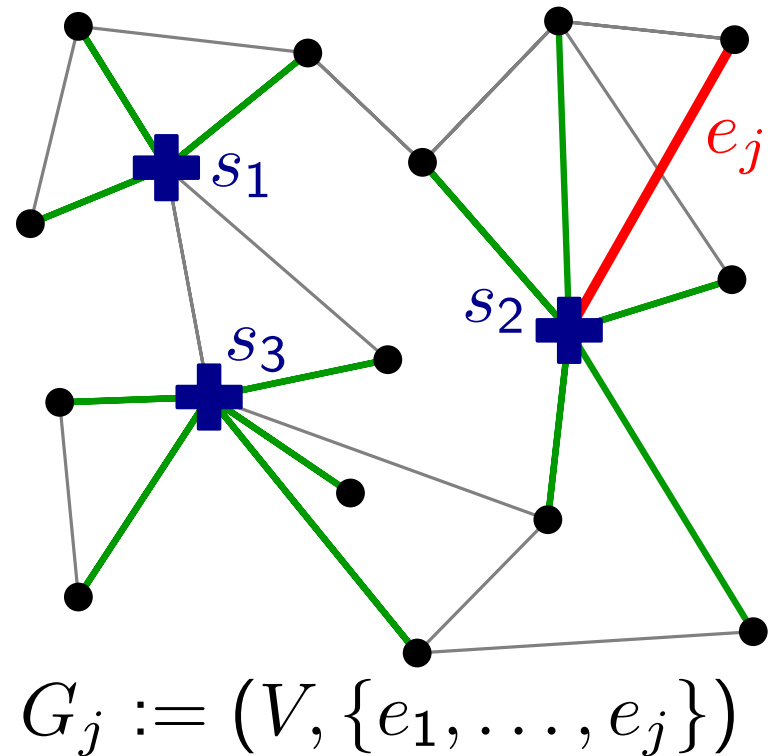
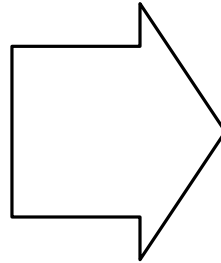
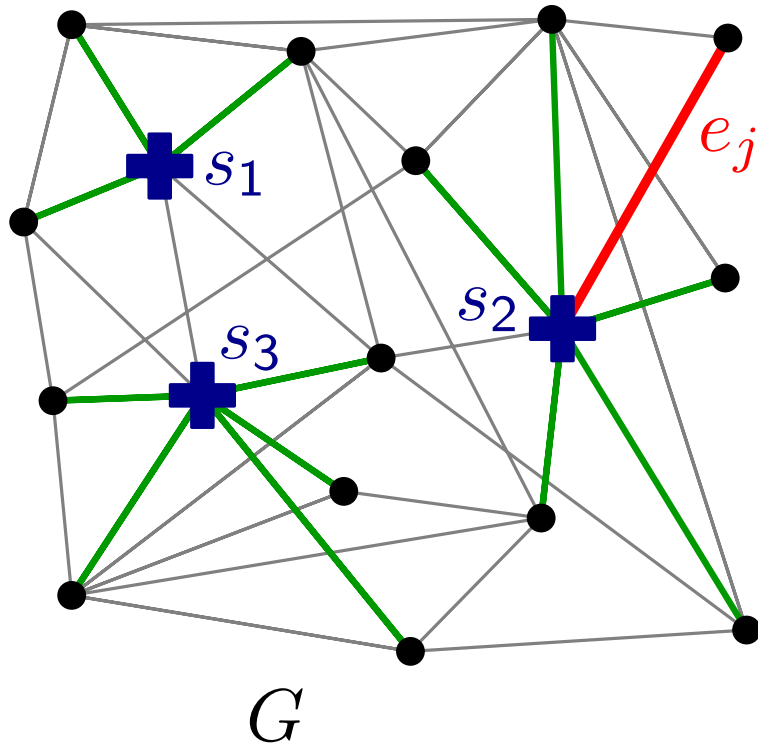
Für jede Knotenmenge $S \subseteq V$ bezeichne $c(v, S)$ die Kosten einer günstigsten Kante von v zu einem Knoten aus S .

Gesucht: Eine k -elementige Knotenmenge S , so dass $\text{cost}(S) := \max_{v \in V} c(v, S)$ minimal ist.



Parametrisches Pruning

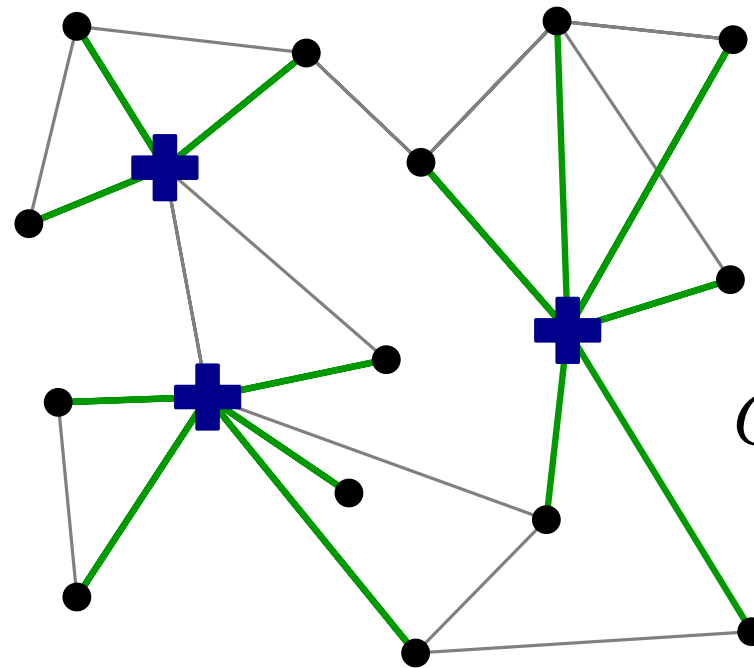
Sei $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ mit $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$.
Angenommen, wir wissen, dass $\text{OPT} = c(e_j)$.



... probieren alle G_i aus.

Dominierende Menge

Def. Eine Knotenmenge D eines Graphen H heißt **dominierend**, wenn jeder Knoten in D liegt oder adjazent zu einem Knoten aus D ist. Die Kardinalität einer kleinsten dominierenden Menge wird mit $\text{dom}(H)$ bezeichnet.



$$\text{dom}(G_j) \leq k$$

$$G_j := (V, \{e_1, \dots, e_j\})$$

... aber die Berechnung von $\text{dom}(H)$ ist NP-schwer.

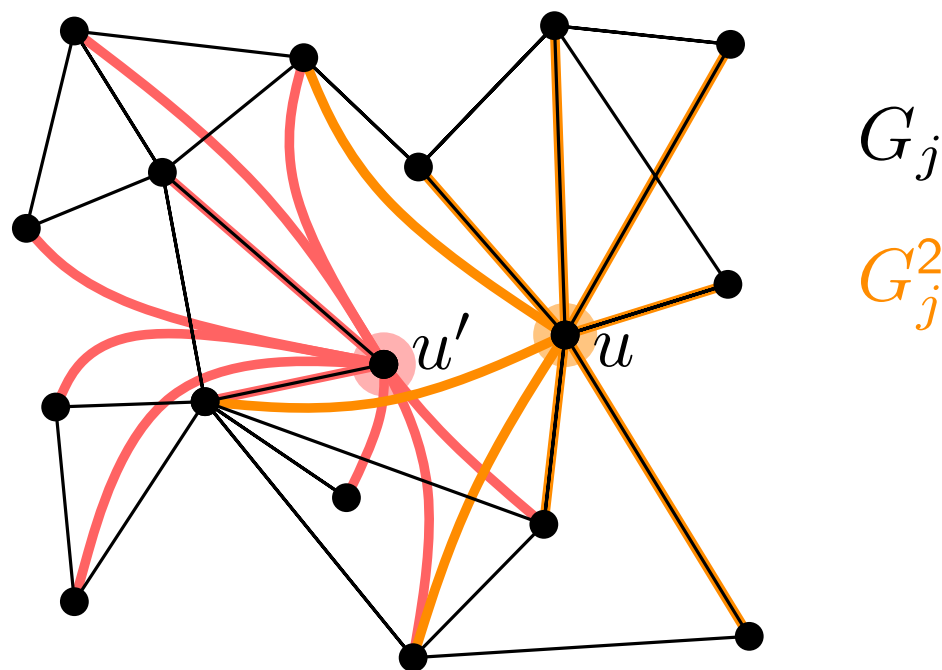


Quadrat eines Graphen

Ausweg: Finde kleine dominierende Menge in „vergrößerter“ Version von G_j

Def. Das **Quadrat** H^2 eines Graphen H hat die gleiche Knotenmenge wie H . Zwei Knoten $u \neq v$ sind genau dann adjazent in H^2 , wenn es in H einen u - v -Weg mit höchstens zwei Kanten gibt.

Dominierende Menge in G_j^2 mit $\leq k$ Elementen ist 2-Approximation für metrisches k -Zentrum

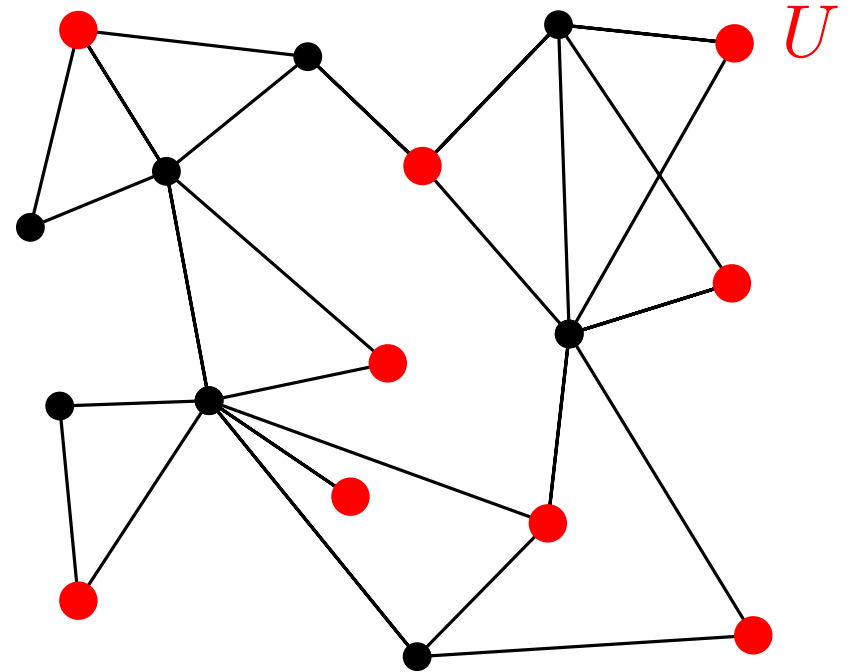


Unabhängige Mengen

Def.

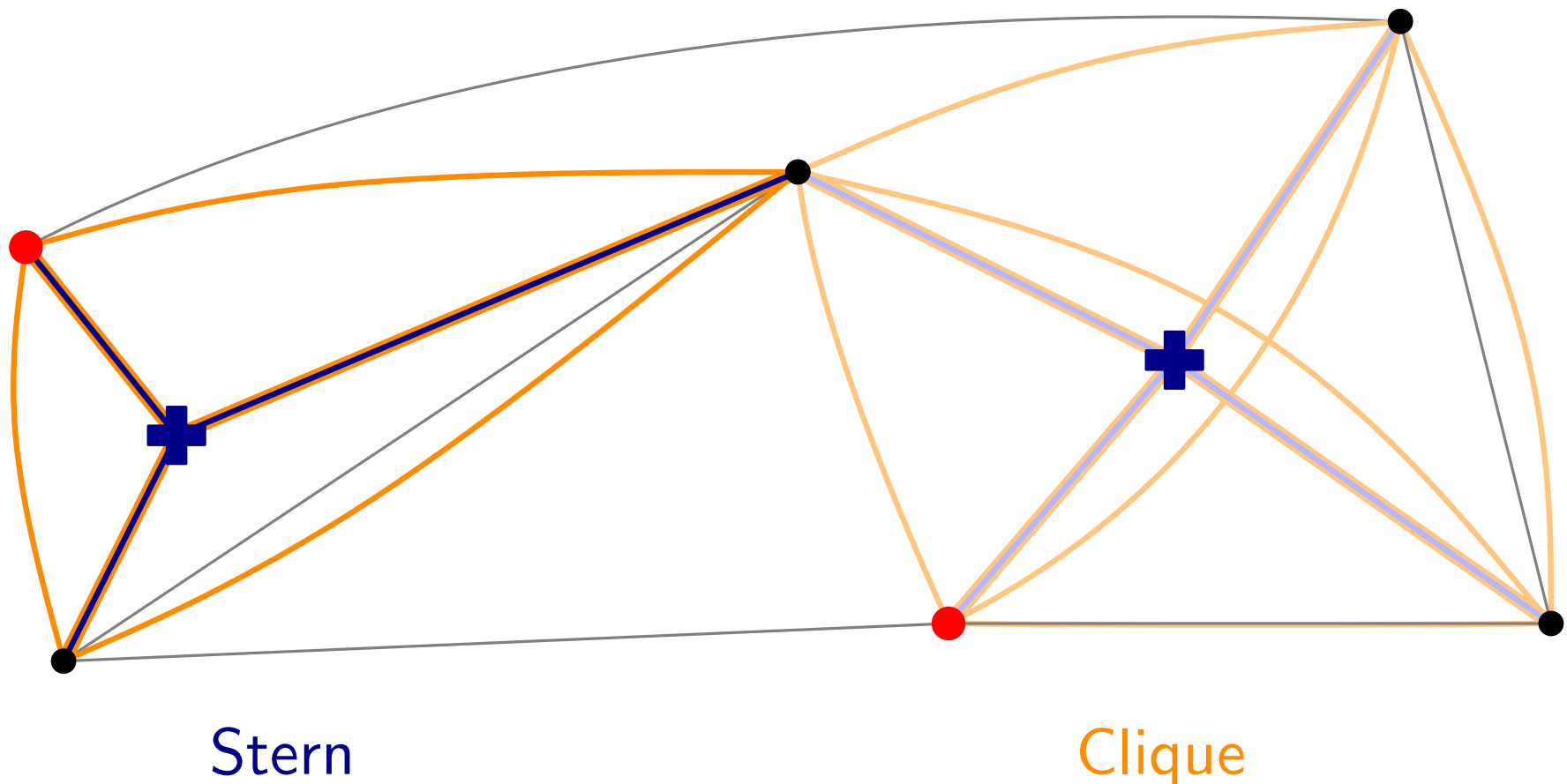
Eine Knotenmenge U in einem Graphen heißt **unabhängig**, wenn keine zwei Knoten aus U adjazent sind. Sie heißt darüberhinaus **nicht erweiterbare unabhängige Menge**, wenn es keine echte Obermenge von Knoten gibt, die auch unabhängig ist.

Nicht erweiterbare
unabhängige
Menge ist
dominierend



Unabhängige Mengen in H^2

Lemma. Sei H ein Graph und U eine unabhängige Menge in H^2 . Dann gilt $|U| \leq \text{dom}(H)$



Faktor 2 für metrisches k -ZENTRUM

Algorithmus Metrisches- k -ZENTRUM

Sortiere die Kanten von G gemäß $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

for $j = 1, \dots, m$ **do**

 Konstruiere G_j^2

 Finde nicht erweiterb. unabhängige Menge U_j in G_j^2

if $|U_j| \leq k$ **then**

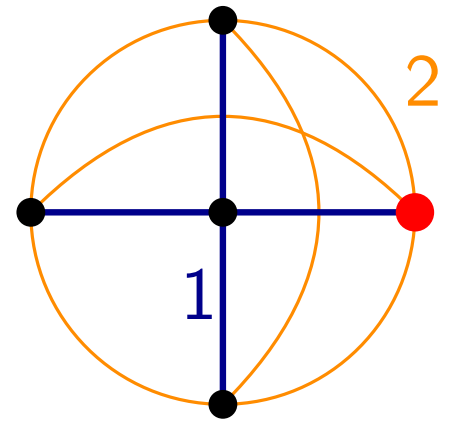
return U_j

Lemma. Sei j wie am Ende des Algorithmus, dann gilt $c(e_j) \leq \text{OPT}$.

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-2-Approximationsalgorithmus für das metrische k -ZENTRUM-Problem.

Geht's besser?

Analyse scharf?



Satz.

Unter der Annahme $P \neq NP$ gibt es keinen Faktor- $(2 - \epsilon)$ -Approximationsalgorithmus für das metrische k -ZENTRUM-Problem, wobei $\epsilon > 0$.

Beweis.

Reduktion von dominierende Menge.

Geg.: $G = (V, E)$, k

Konstr. vollst. Graph $G' = (V, E \cup E')$

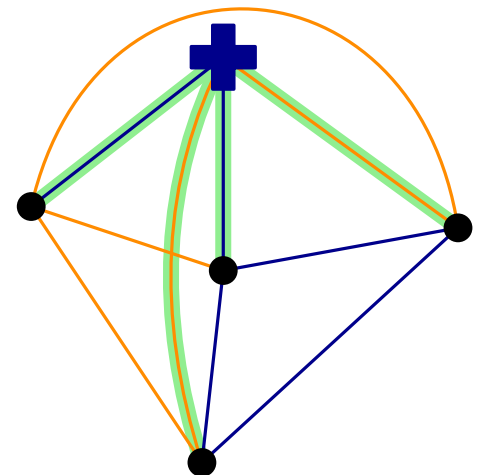
mit $c(e) = \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in E \\ 2, & \text{falls } e \in E' \end{cases}$

Δ -Ungleichung erfüllt

S : metrisches k -Zentrum

Falls $\text{dom}(G) \leq k$, dann $\text{cost}(S) = 1$

Falls $\text{dom}(G) > k$, dann $\text{cost}(S) = 2$



Metrisches ~~k~~ -ZENTRUM-Problem

gewichtetes

Gegeben: Ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Metrik $c: E \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und ~~eine natürliche Zahl $k \leq |V|$.~~ **Knotengewichte $w: V \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und eine Gewichtsschranke $W \in \mathbb{Q}_+$**

Für jede Knotenmenge $S \subseteq V$ bezeichne $c(v, S)$ die Kosten der günstigsten Kante von v zu einem Knoten aus S .

Gesucht: ~~Eine k elementige Knotenmenge S ,~~ **Knotenmenge S mit Gewicht höchstens W** so dass $\text{cost}(S) := \max_{v \in V} c(v, S)$ minimal ist.

Die gewichtete Version

Algorithmus Metrisches-**Gewichtetes**-ZENTRUM

Sortiere die Kanten von G gemäß $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

for $j = 1, \dots, m$ **do**

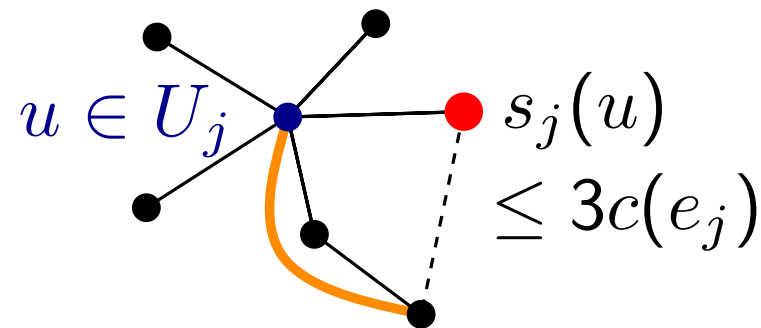
 Konstruiere G_j^2

 Finde nicht erweiterb. unabhängige Menge U_j in G_j^2

 Berechne $S_j := \{ s_j(u) \mid u \in U_j \}$

if ~~$|U_j| \leq k$~~ **then** $w(S_j) \leq W$

return ~~U_j~~ S_j



$s_j(u) :=$ leichtester Knoten aus $N_{G_j}(u) \cup \{u\}$

Satz. Obiger Algorithmus liefert eine 3-Approximation für das gewichtete metrische ZENTRUM-Problem.