

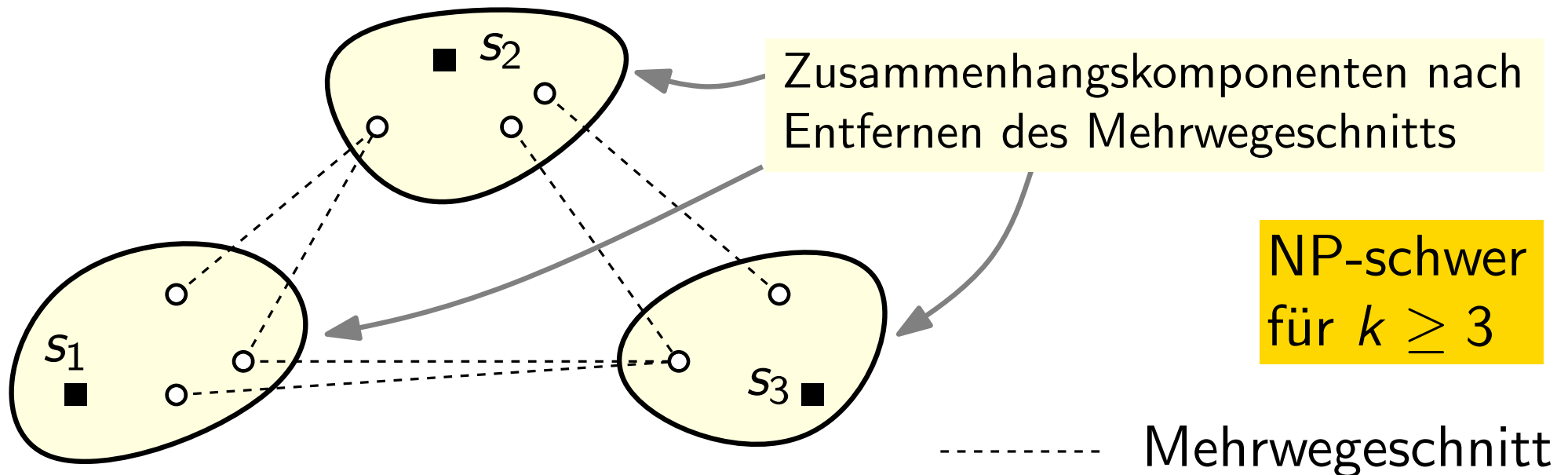
Approximationsalgorithmen

4. Vorlesung: Mehrwegeschnitt

– Folien von Joachim Spoerhase –

MEHRWEGESCHNITT

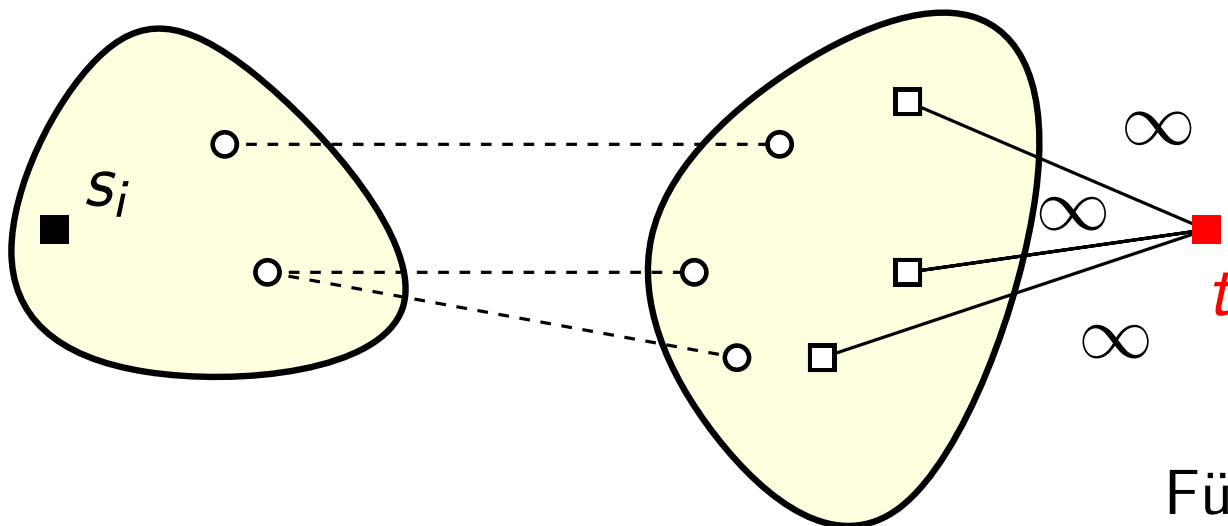
Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{Q}_+$ und eine Menge $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$ von Terminalen. Ein **Mehrwegeschnitt** für S ist eine Menge E' von Kanten, so dass keine zwei Terminale im Graphen $(V, E - E')$ zusammenhängend sind. Das Problem MEHRWEGESCHNITT fragt nach einem kostengünstigsten Mehrwegeschnitt für S .



Isolierender Schnitt

Ein **isolierender Schnitt** für Terminal s_i ist eine Menge von Kanten, die s_i von den restlichen Terminalen separiert.

Günstigster isolierender Schnitt effizient berechenbar!



Füge Hilfsterminal t hinzu und ermittle günstigsten s_i - t -Schnitt (siehe Vorlesung AGT).

Algorithmus MEHRWEGESCHNITT

- Für $i = 1, \dots, k$:
Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i .
- Gib die Vereinigung C der $k - 1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.

Mit anderen Worten:

Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte C_1, \dots, C_k .

$$\Rightarrow c(C) \leq \frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^k c(C_i), \text{ wegen des Schubfachprinzips:}$$

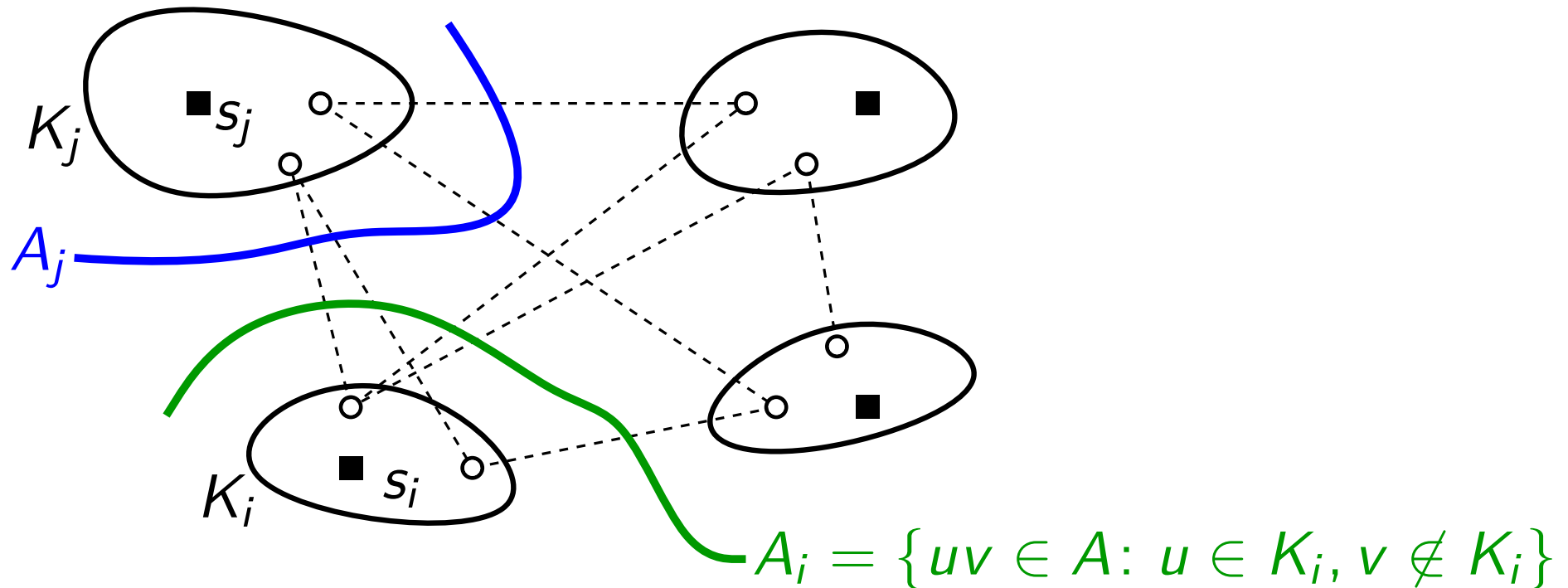
denn für den teuersten der Schnitte C_1, \dots, C_k , sagen wir C_1 , gilt

$$c(C_1) \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c(C_i).$$

Approximationsgüte

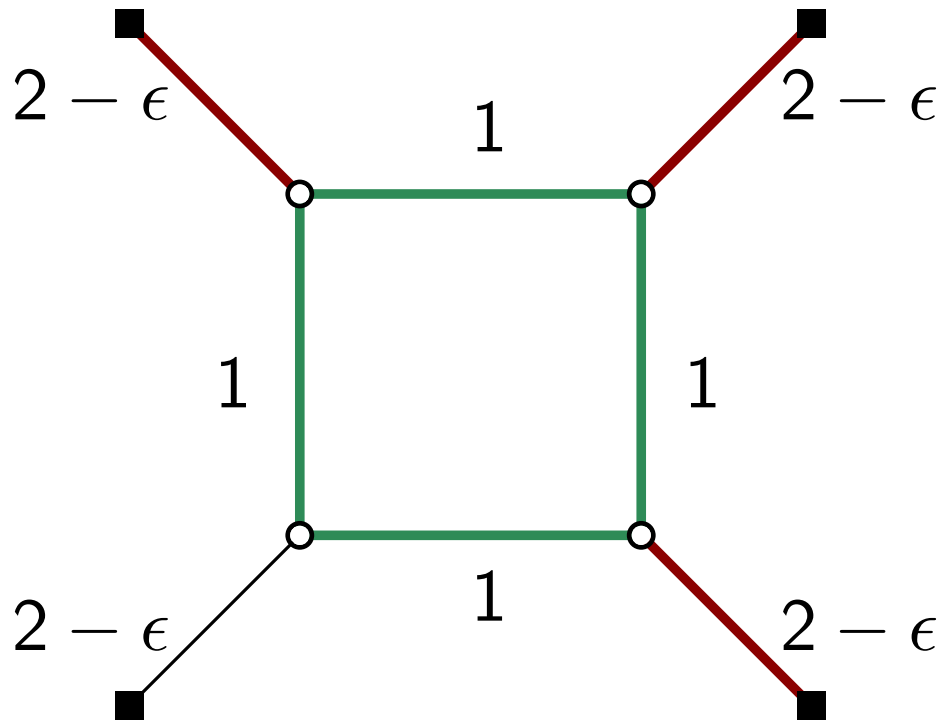
Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A :



Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ und $c(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k c(A_i)$ $\underbrace{\text{ALG}}$
 $\Rightarrow \text{OPT} = c(A) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k c(C_i) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{k-1} c(C).$

Scharfes Beispiel



$$ALG = (k - 1)(2 - \epsilon)$$

$$OPT = k$$

$$ALG/OPT = (k - 1)(2 - \epsilon)/k \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2 - 2/k$$

Übungen (in der Vorlesung?)

- Formulieren Sie SETCOVER als ganzzahliges lineares Programm (ILP)!

- Formulieren Sie MEHRWEGESCHNITT als ILP.

Tipp 1: Verwenden Sie eine 0-1-Variable $x_{v,i}$ für jeden Knoten $v \in V$ und jedes $i \in \{1, \dots, k\}$.
 $x_{v,i} = 1$ soll bedeuten, dass ...
... v in der Zusammenhangskomp. K_i von s_i liegt.

Tipp 2: Probieren Sie's erst mit $|\cdot|$, obwohl das *keine* lineare Funktion ist.