Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Approximationsalgorithmen

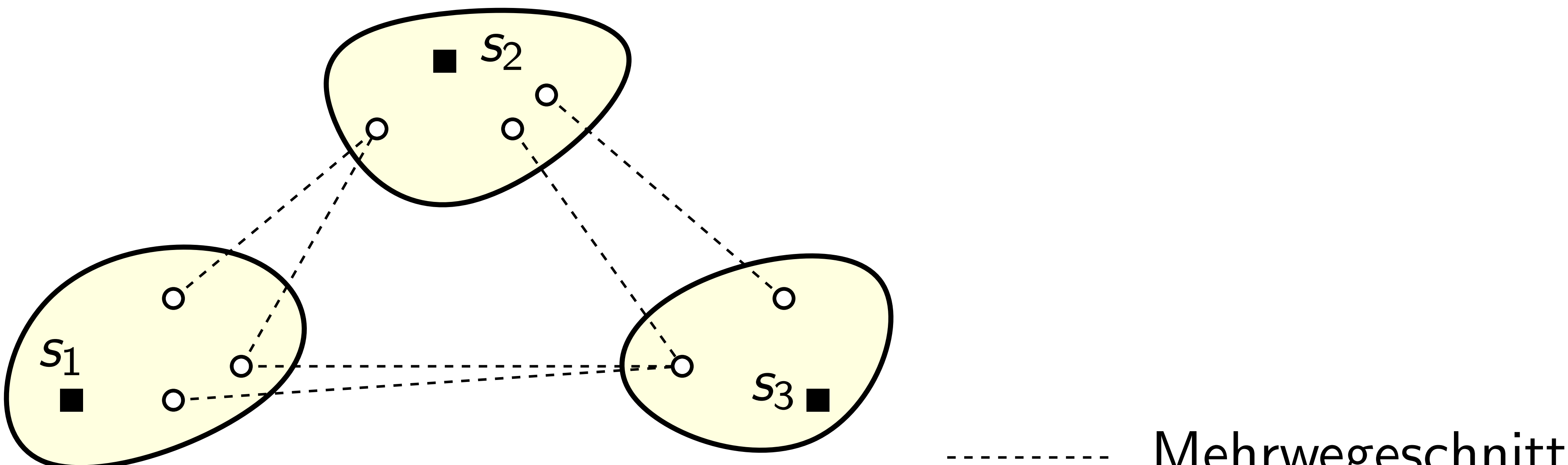
4. Vorlesung: Mehrwegeschnitt

– Folien von Joachim Spoerhase –

Alexander Wolff Lehrstuhl für Informatik I WS 2018/19

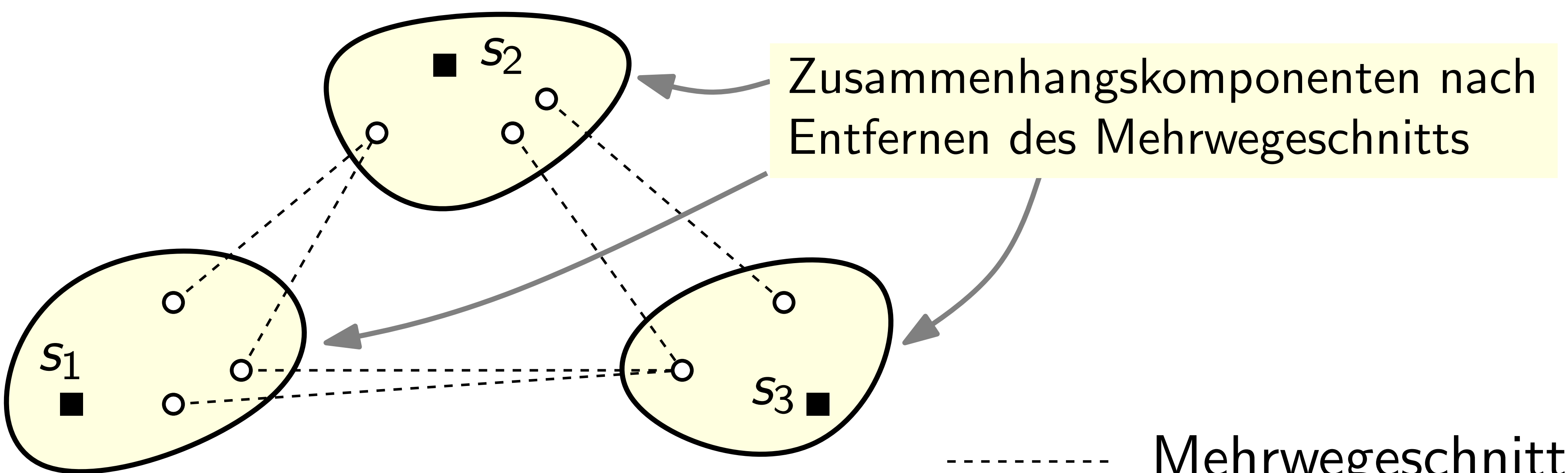
MehrwegeSchnitt

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und eine Menge $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq V$ von Terminalen. Ein **Mehrwegeschnitt** für S ist eine Menge E' von Kanten, so dass keine zwei Terminale im Graphen $(V, E - E')$ zusammenhängend sind.



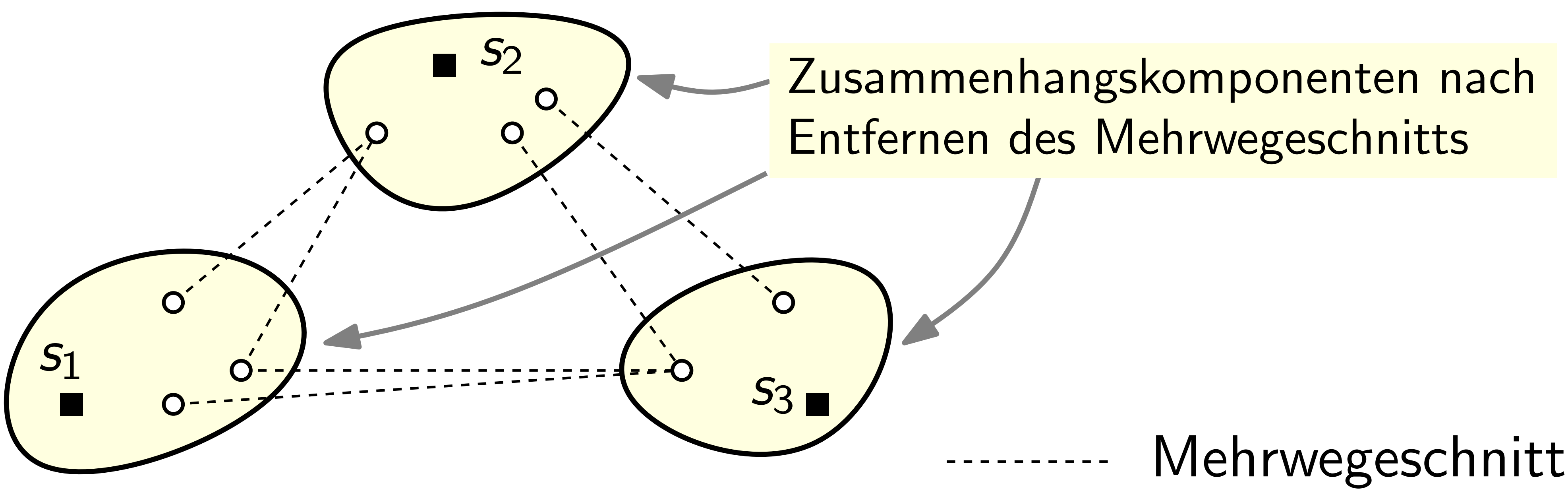
MehrwegeSchnitt

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und eine Menge $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq V$ von Terminalen. Ein **Mehrwegeschnitt** für S ist eine Menge E' von Kanten, so dass keine zwei Terminale im Graphen $(V, E - E')$ zusammenhängend sind.



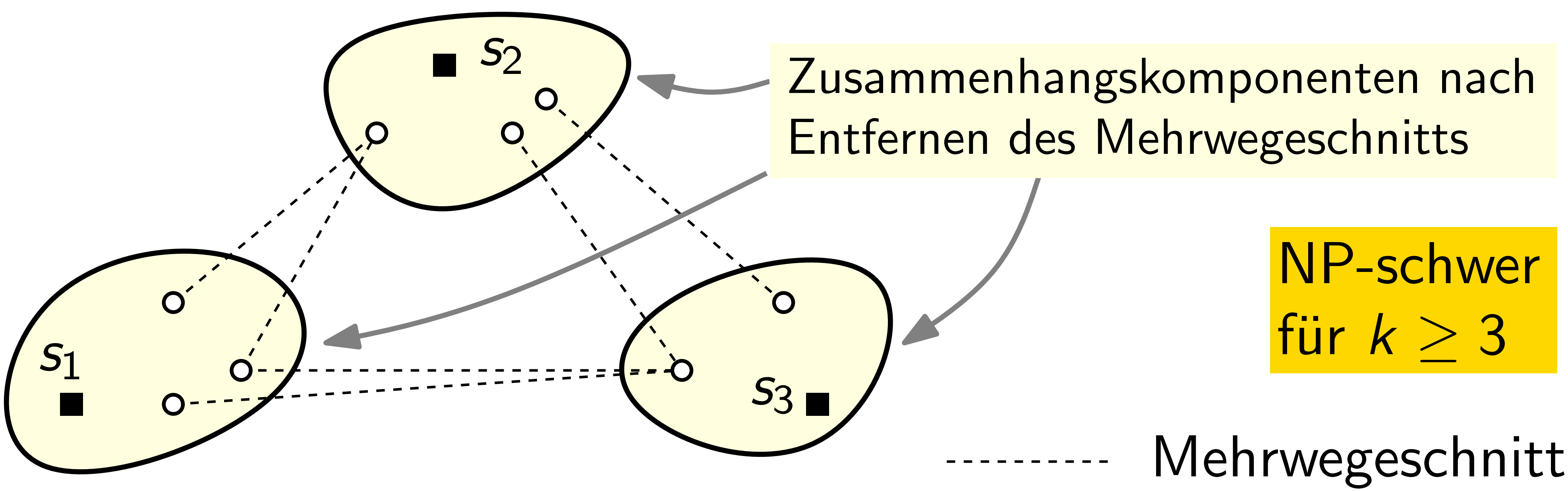
MehrwegeSchnitt

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und eine Menge $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq V$ von Terminalen. Ein **Mehrwegeschnitt** für S ist eine Menge E' von Kanten, so dass keine zwei Terminale im Graphen $(V, E - E')$ zusammenhängend sind. Das Problem MehrwegeSchnitt fragt nach einem kostengünstigsten Mehrwegeschnitt für S.



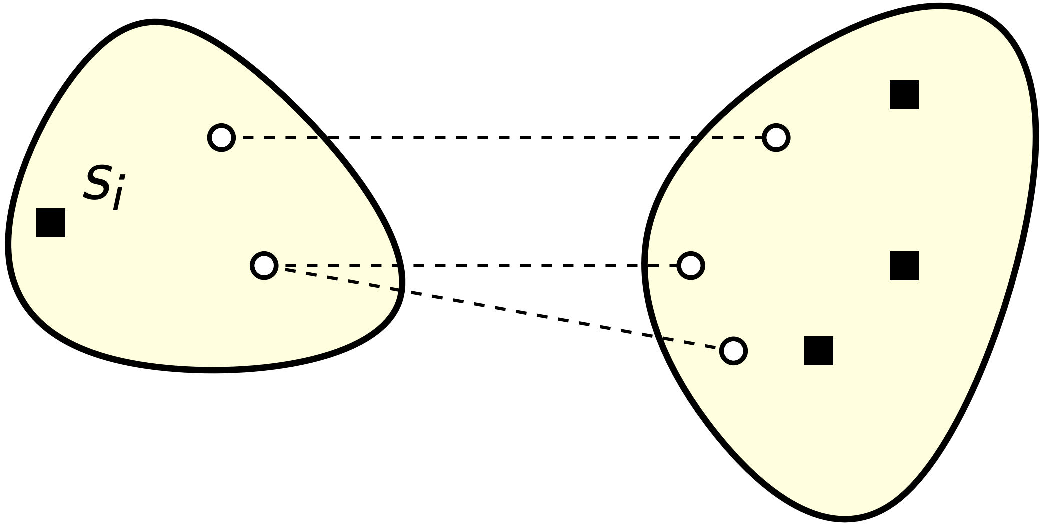
MehrwegeSchnitt

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und eine Menge $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$ von Terminalen. Ein **Mehrwegeschnitt** für S ist eine Menge E' von Kanten, so dass keine zwei Terminale im Graphen $(V, E - E')$ zusammenhängend sind. Das Problem MehrwegeSchnitt fragt nach einem kostengünstigsten Mehrwegeschnitt für S.



Isolierender Schnitt

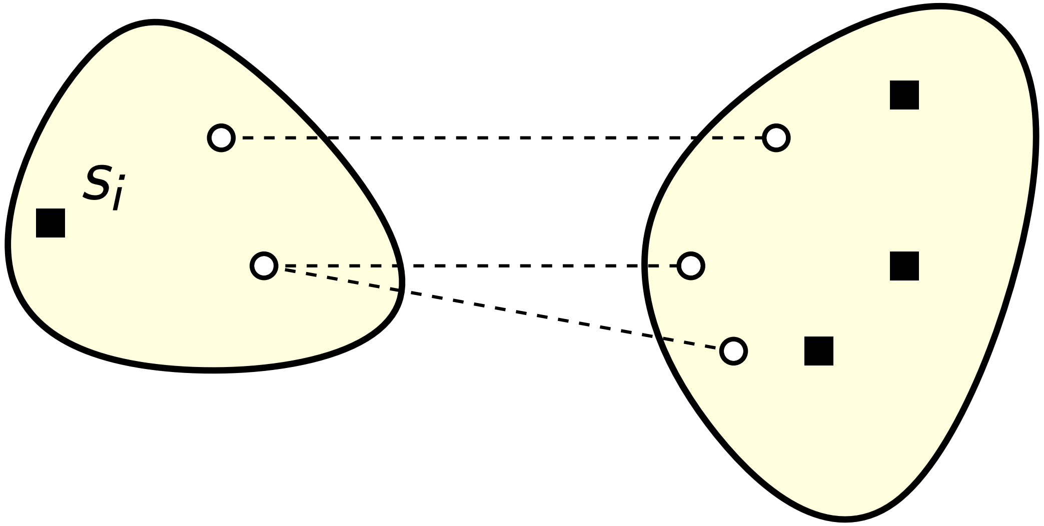
Ein **isolierender Schnitt** für Terminal s_i ist eine Menge von Kanten, die s_i von den restlichen Terminalen separiert.



Isolierender Schnitt

Ein **isolierender Schnitt** für Terminal s_i ist eine Menge von Kanten, die s_i von den restlichen Terminalen separiert.

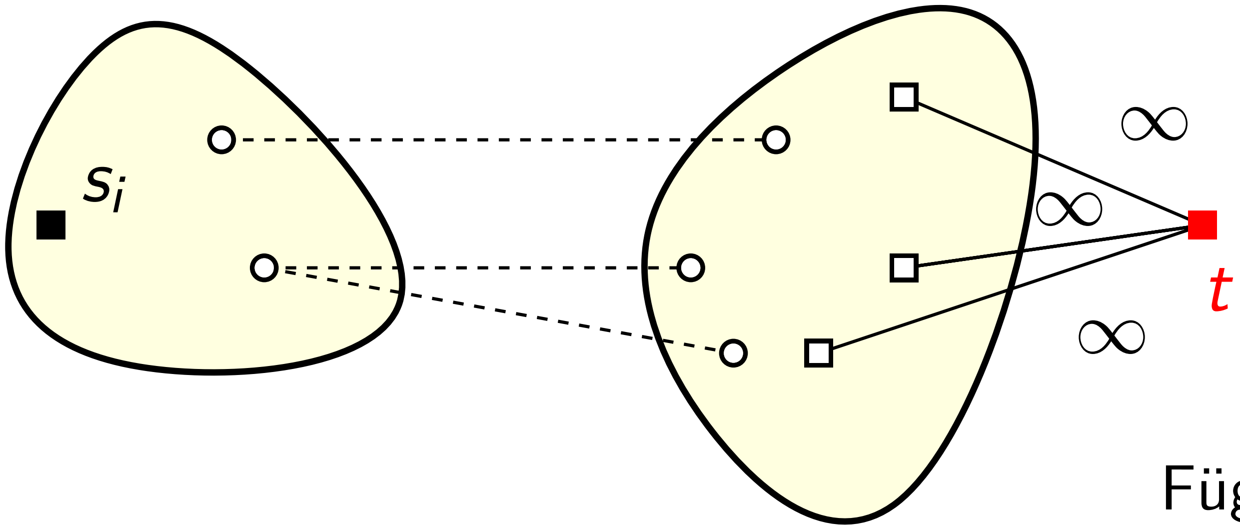
Günstigster isolierender Schnitt effizient berechenbar!



Isolierender Schnitt

Ein **isolierender Schnitt** für Terminal s_i ist eine Menge von Kanten, die s_i von den restlichen Terminalen separiert.

Günstigster isolierender Schnitt effizient berechenbar!



Füge Hilfsterminal t hinzu und ermittle günstigsten s_i-t-Schnitt (siehe Vorlesung AGT).

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.
- Gib die Vereinigung C der $k-1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.
- Gib die Vereinigung C der $k - 1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.

  Mit anderen Worten:
  Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte $C_1, \ldots, C_k$.

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.

- Gib die Vereinigung C der $k-1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.
  Mit anderen Worten:
  Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte $C_1, \ldots, C_k$.

$$\Rightarrow c(C) \quad ? \quad \sum_{i=1}^{k} c(C_i)$$

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.
- Gib die Vereinigung C der $k-1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.
  Mit anderen Worten:
  Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte $C_1, \ldots, C_k$.

$$\Rightarrow c(C) \leq \sum_{i=1}^{k} c(C_i)$$

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \dots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.
- Gib die Vereinigung C der $k-1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.
  Mit anderen Worten:
  Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte $C_1, \dots, C_k$.

$$\Rightarrow c(C) \leq \frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} c(C_i)$$

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.

- Gib die Vereinigung C der $k-1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.
  Mit anderen Worten:
  Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte $C_1, \ldots, C_k$.

$\Rightarrow c(C) \leq \dfrac{k-1}{k} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c(C_i)$, wegen des Schubfachprinzips:

Algorithmus MEHRWEGESCHNITT

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.
- Gib die Vereinigung C der $k-1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.
  Mit anderen Worten:
  Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte $C_1, \ldots, C_k$.

$\Rightarrow c(C) \leq \frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} c(C_i)$, wegen des Schubfachprinzips:

denn für den teuersten der Schnitte $C_1, \ldots, C_k$, sagen wir C_1, gilt

$$c(C_1) \geq$$

Algorithmus MehrwegeSchnitt

- Für $i = 1, \ldots, k$:
  Berechne für s_i einen günstigsten isolierenden Schnitt C_i.
- Gib die Vereinigung C der $k-1$ günstigsten dieser Schnitte zurück.
  Mit anderen Worten:
  Ignoriere den teuersten der isolierenden Schnitte $C_1, \ldots, C_k$.

$\Rightarrow c(C) \leq \frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} c(C_i)$, wegen des Schubfachprinzips:

denn für den teuersten der Schnitte $C_1, \ldots, C_k$, sagen wir C_1, gilt

$$c(C_1) \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} c(C_i).$$

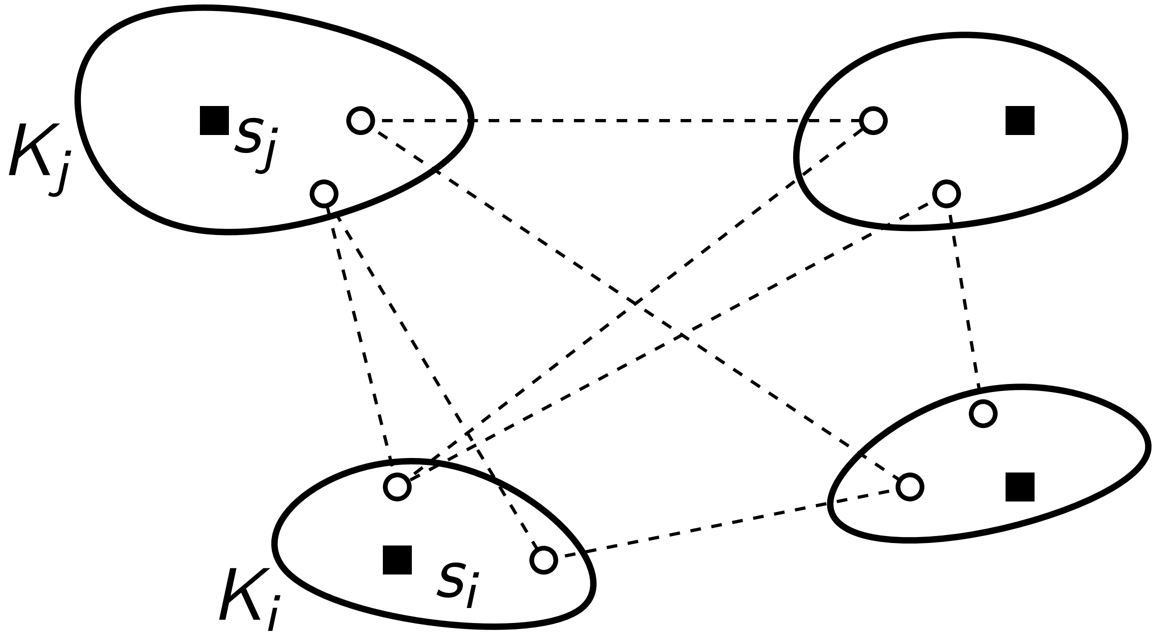
Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

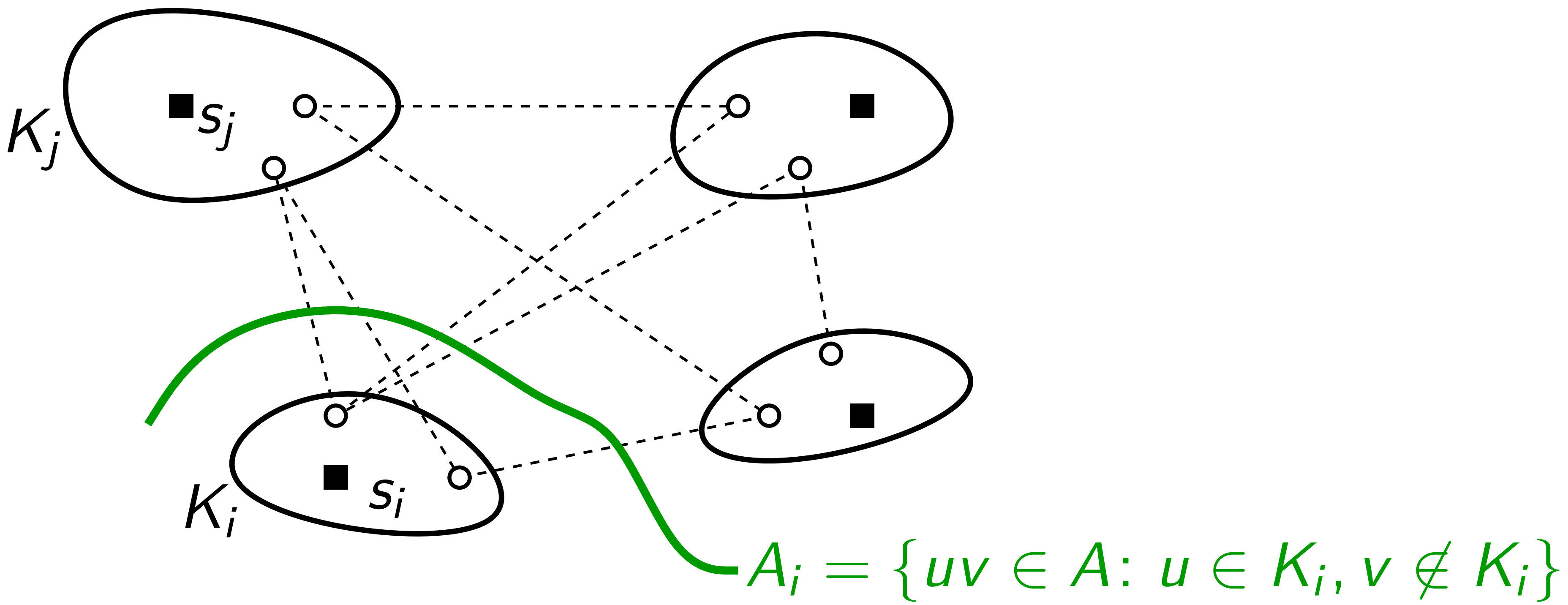
Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:



Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

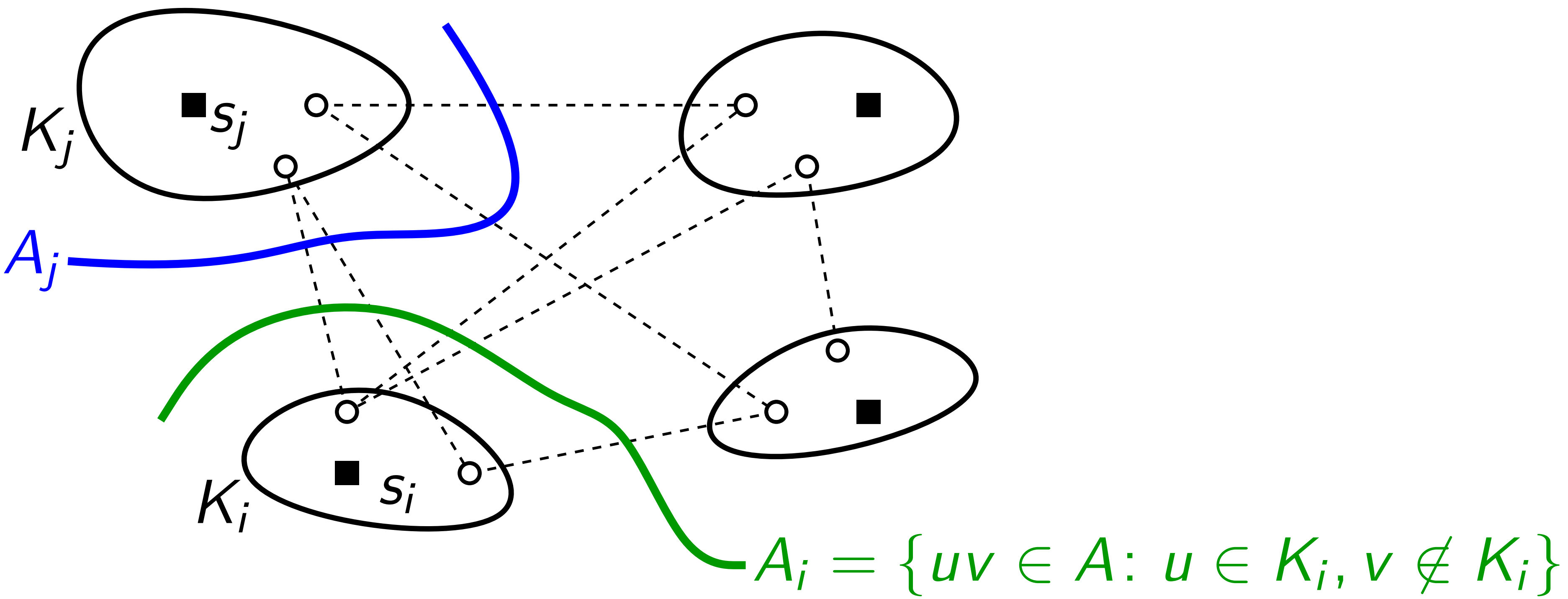
Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:



Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

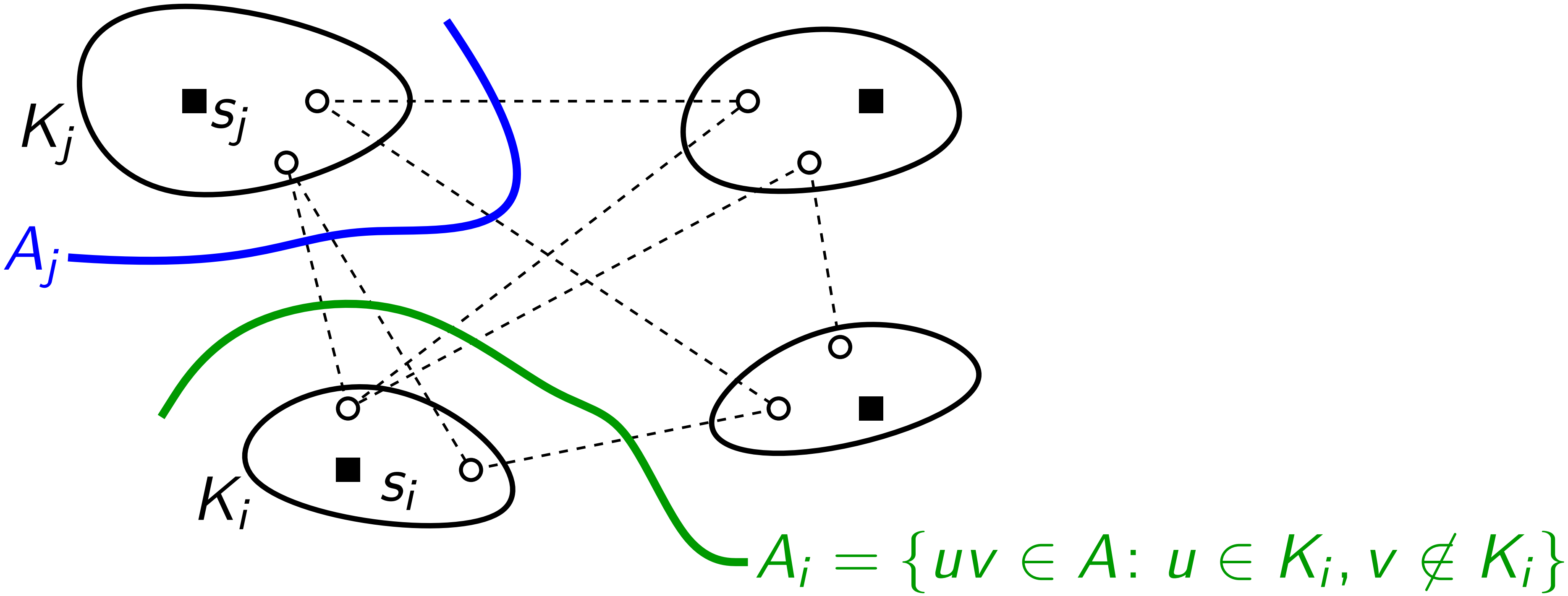
Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:



Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:

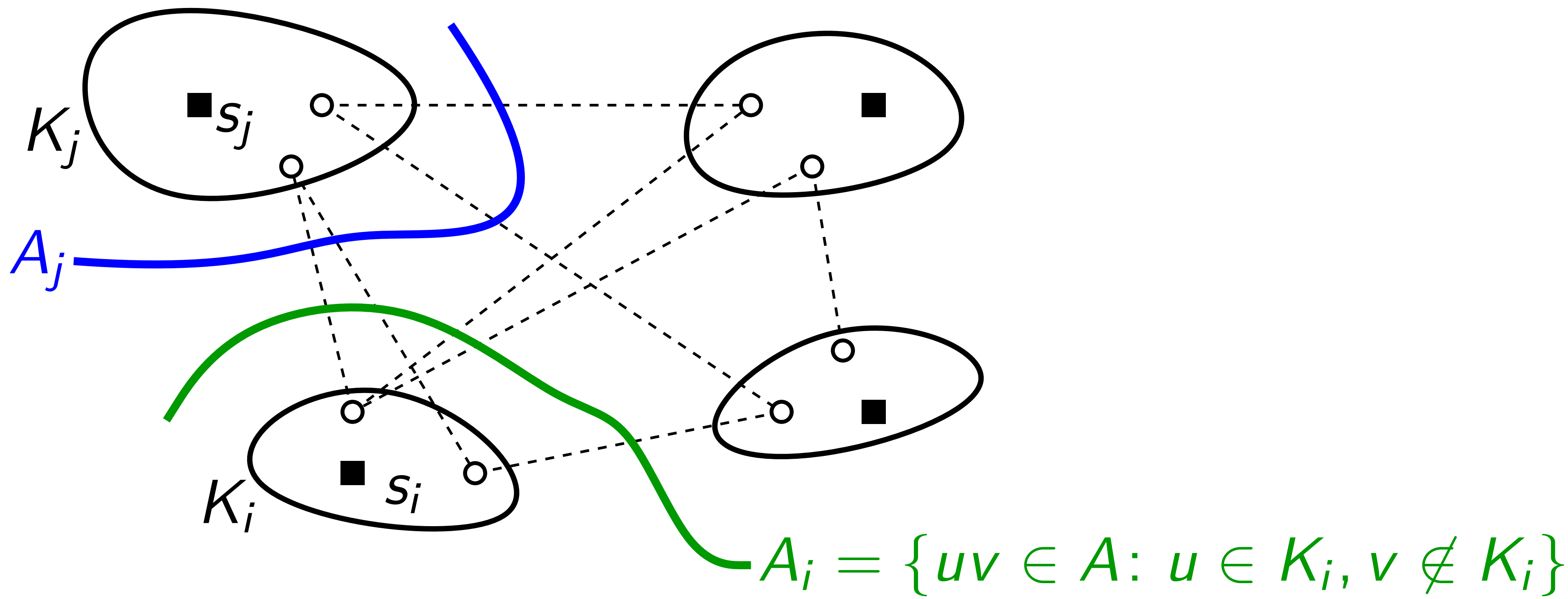


Beobachtung. $A =$

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:

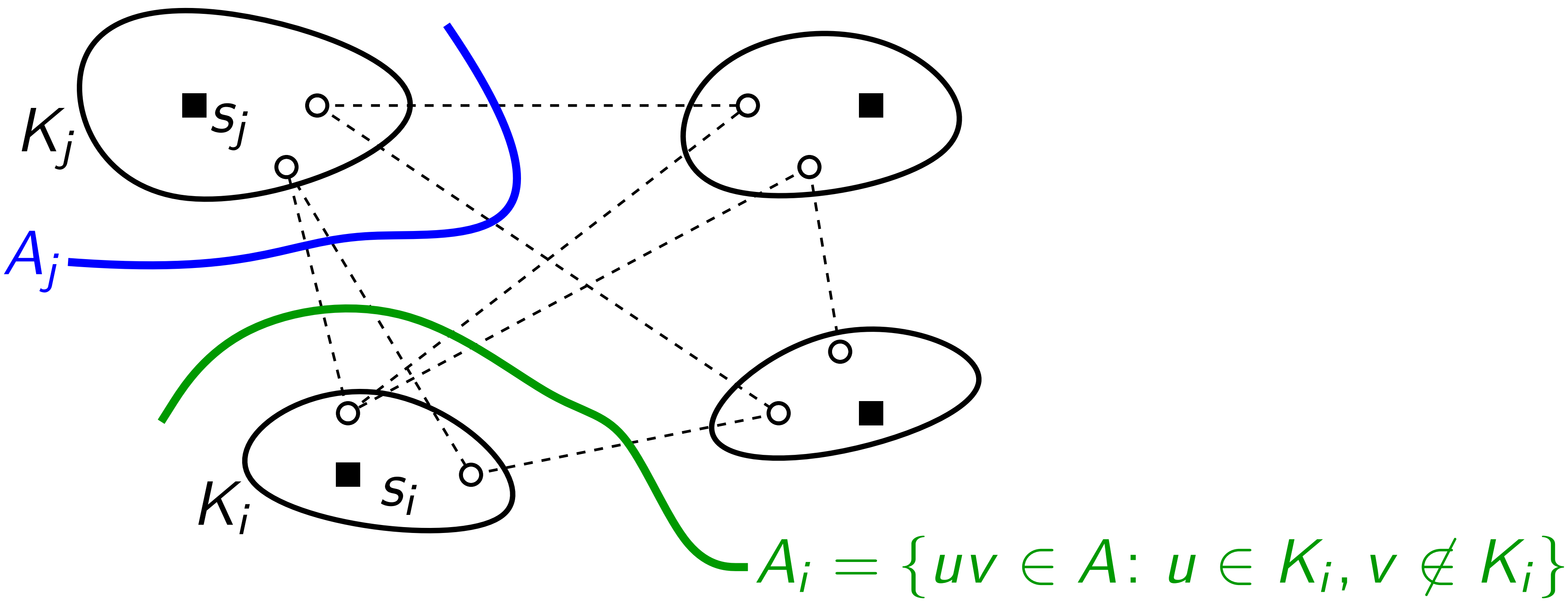


Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:

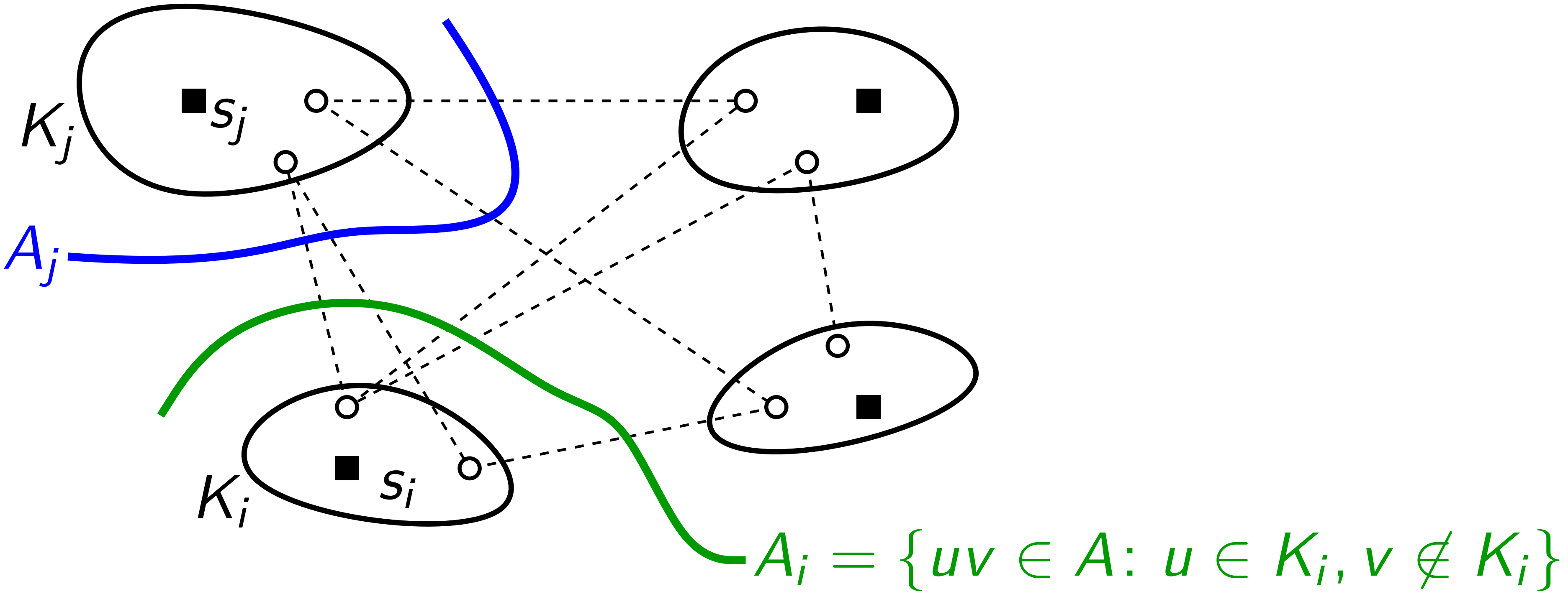


Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ und $c(A) =$

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:

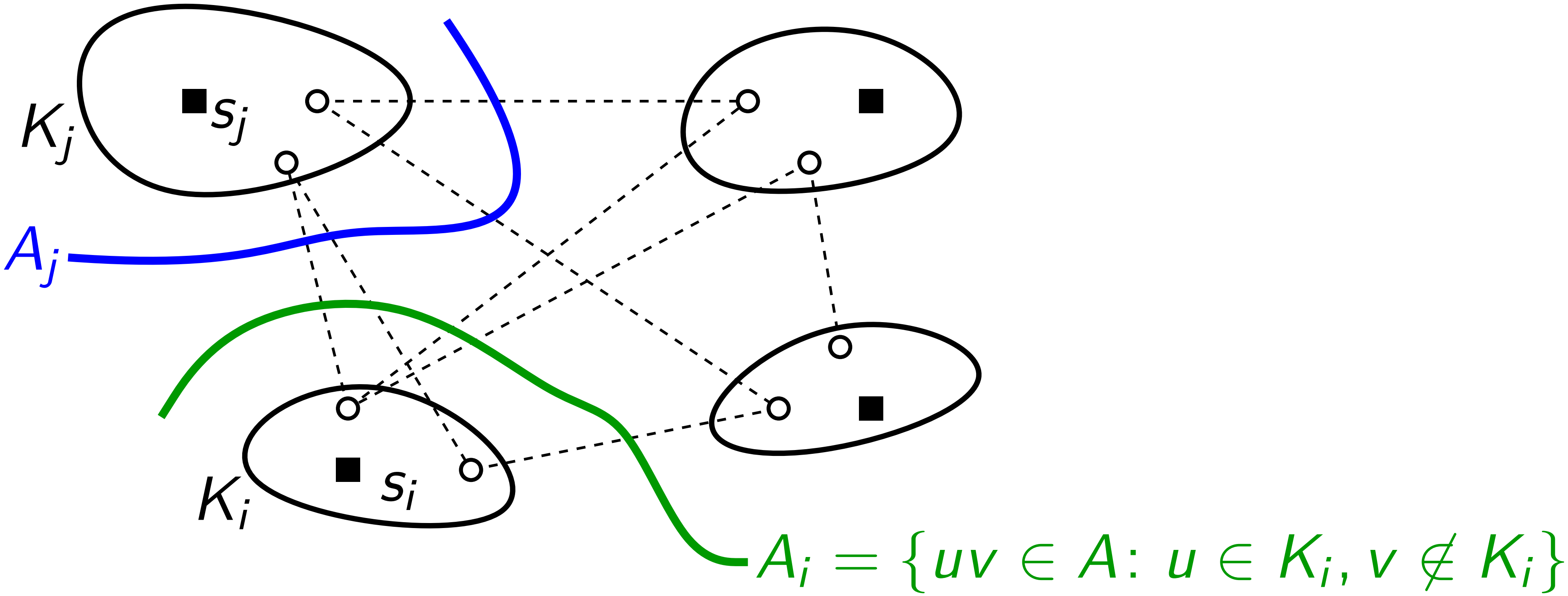


Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ und $c(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(A_i)$

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:



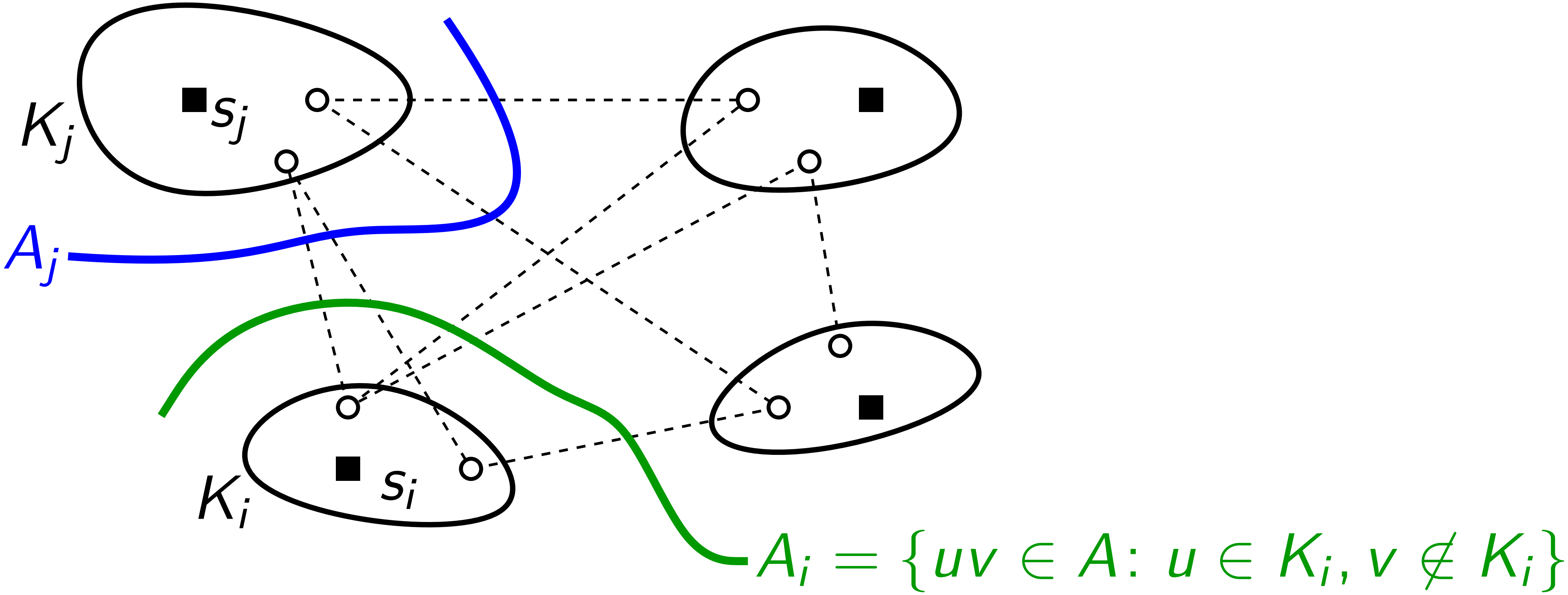
Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ und $c(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(A_i)$

$\Rightarrow$ OPT$= c(A) \geq$

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:



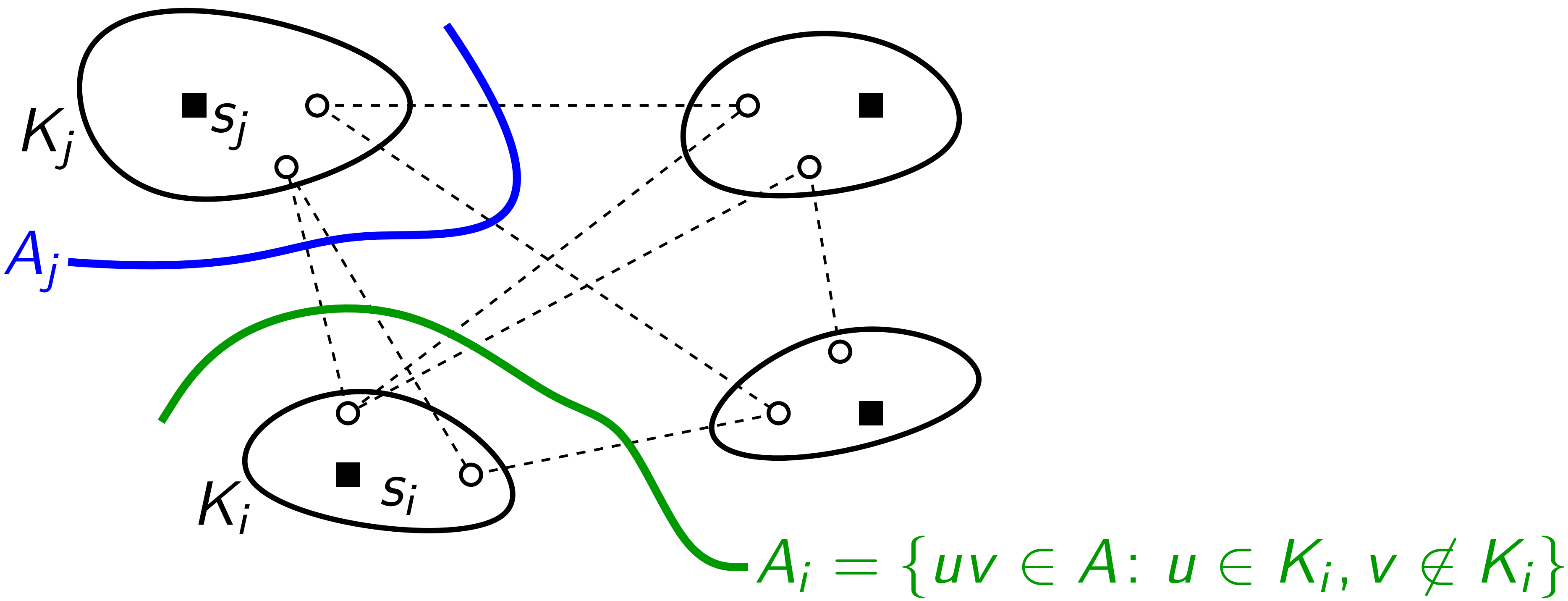
Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ und $c(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(A_i)$

$\Rightarrow \mathrm{OPT} = c(A) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(C_i) \geq$

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:



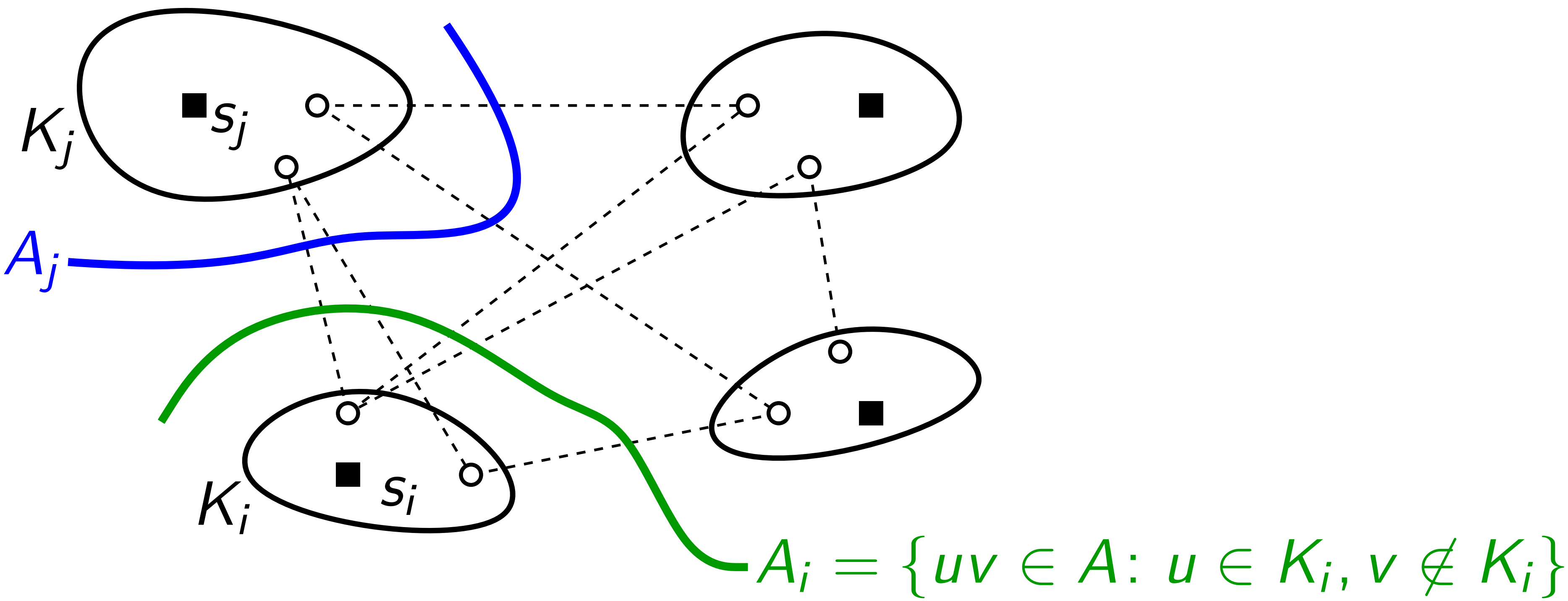
Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ und $c(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(A_i)$

$\Rightarrow \mathrm{OPT} = c(A) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(C_i) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{k-1} c(C).$

Approximationsgüte

Satz. Obiger Algorithmus hat Approximationsgüte $2 - 2/k$.

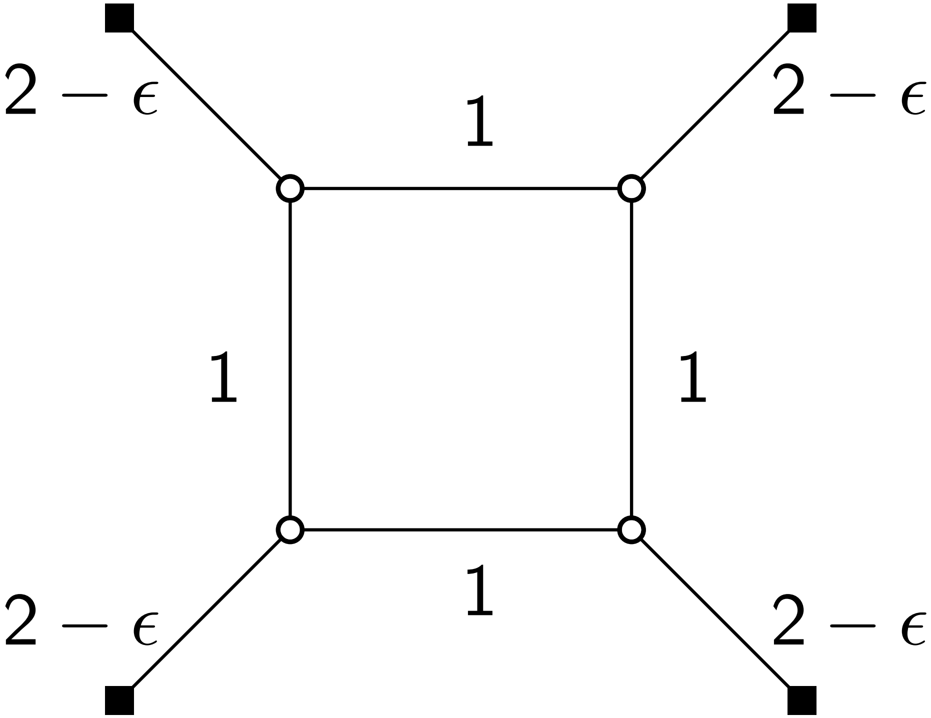
Betrachte optimalen Mehrwegeschnitt A:



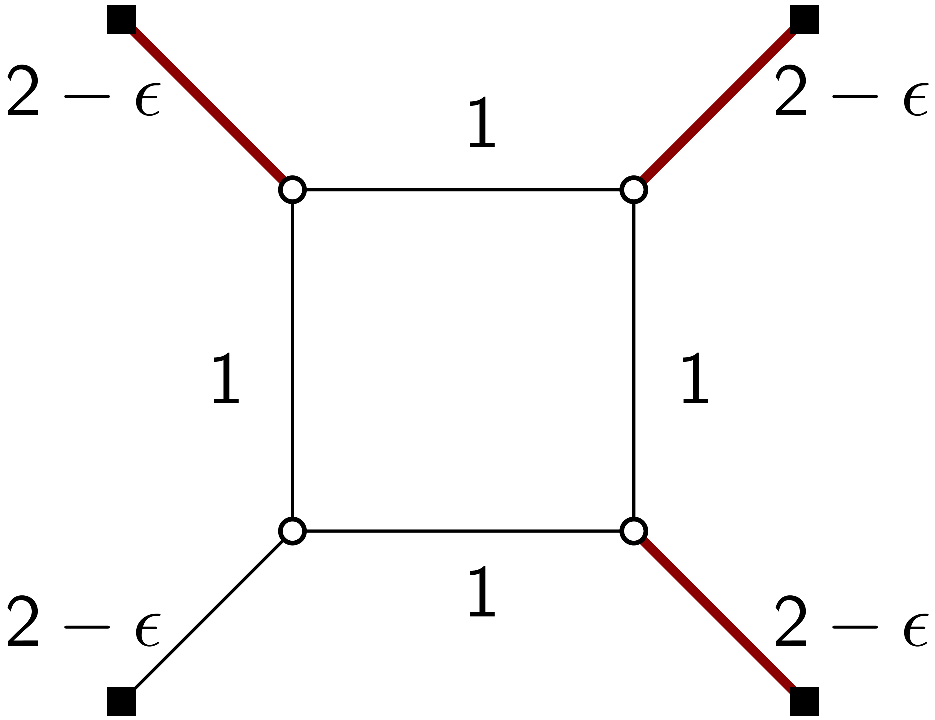
Beobachtung. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ und $c(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(A_i)$

$\Rightarrow \mathrm{OPT} = c(A) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} c(C_i) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{k-1} \overbrace{c(C)}^{\mathrm{ALG}}$.

Scharfes Beispiel

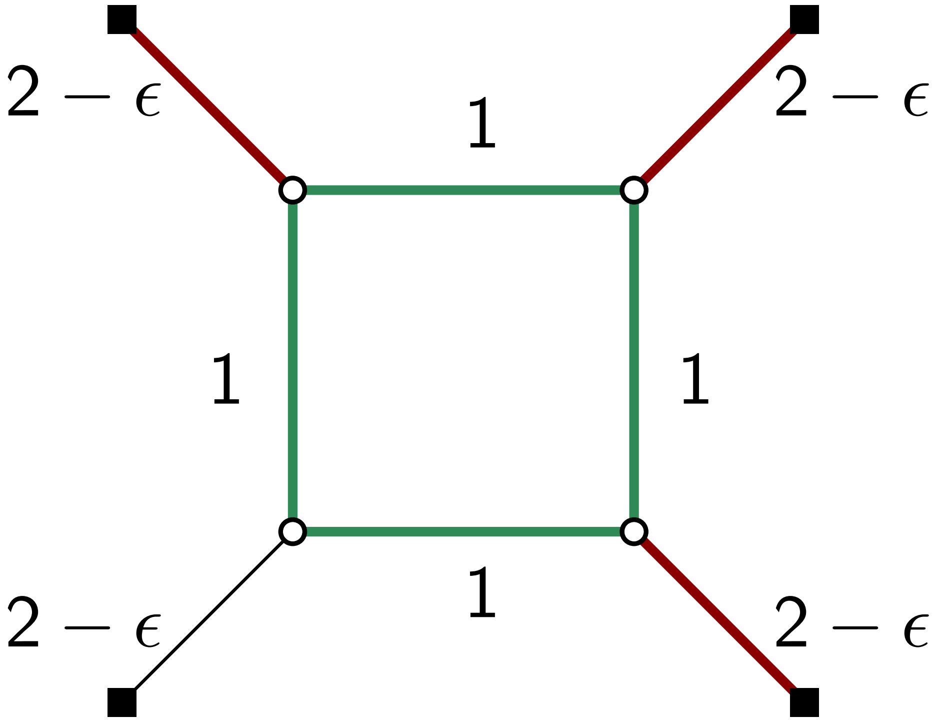


Scharfes Beispiel



$\mathsf{ALG} = (k-1)(2-\epsilon)$

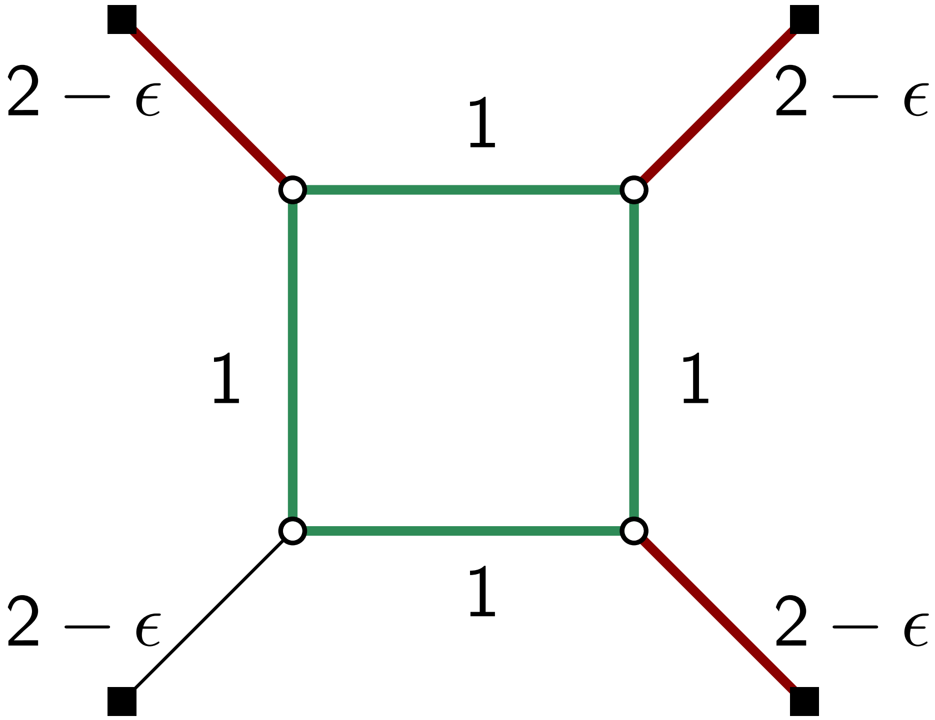
Scharfes Beispiel



$\text{ALG} = (k-1)(2-\epsilon)$

$\text{OPT} = k$

Scharfes Beispiel

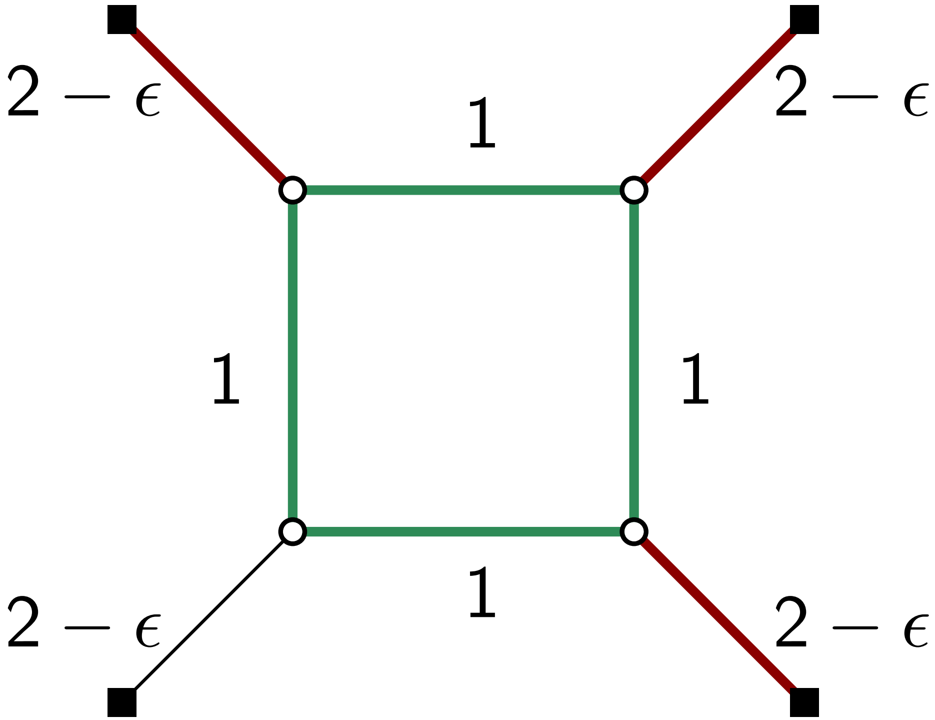


$\text{ALG} = (k-1)(2-\epsilon)$

$\text{OPT} = k$

$\text{ALG}/\text{OPT} = (k-1)(2-\epsilon)/k$

Scharfes Beispiel



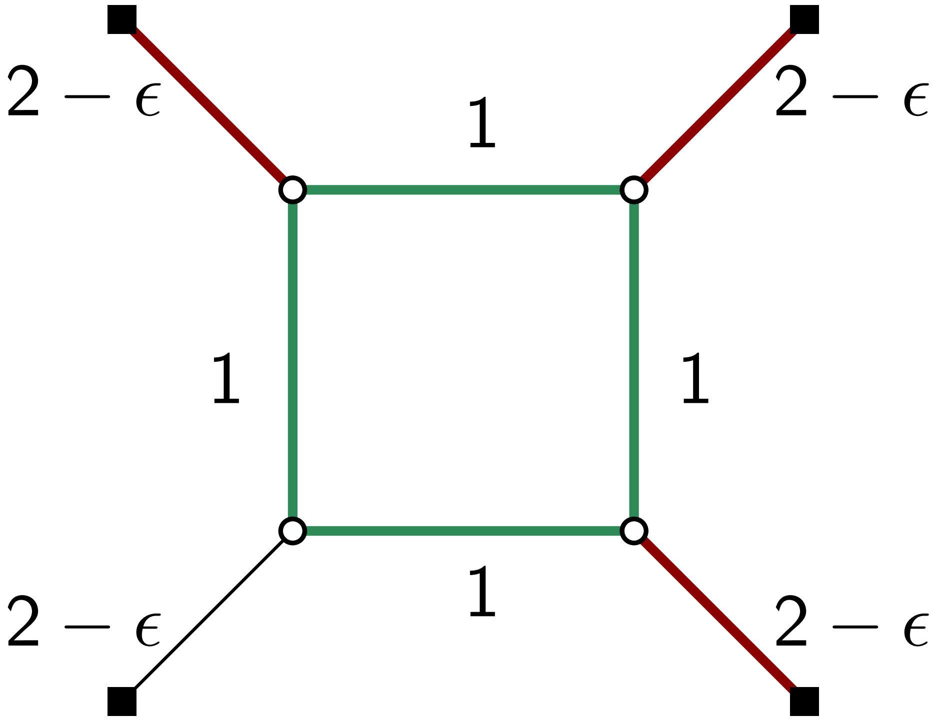
$\text{ALG} = (k-1)(2-\epsilon)$

$\text{OPT} = k$

$\text{ALG}/\text{OPT} = (k-1)(2-\epsilon)/k$

$\epsilon \rightarrow 0$

Scharfes Beispiel



$\text{ALG} = (k-1)(2-\epsilon)$

$\text{OPT} = k$

$\text{ALG}/\text{OPT} = (k-1)(2-\epsilon)/k \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 2 - 2/k$

Übungen (in der Vorlesung?)

- Formulieren Sie SetCover als ganzzahliges lineares Programm (ILP)!

Übungen (in der Vorlesung?)

- Formulieren Sie SetCover als ganzzahliges lineares Programm (ILP)!
- Formulieren Sie MehrwegeSchnitt als ILP.

Übungen (in der Vorlesung?)

- Formulieren Sie SetCover als ganzzahliges lineares Programm (ILP)!

- Formulieren Sie MehrwegeSchnitt als ILP.

  Tipp 1: Verwenden Sie eine 0-1-Variable $x_{v,i}$
  für jeden Knoten $v \in V$ und jedes $i \in \{1, \dots, k\}$.

Übungen (in der Vorlesung?)

- Formulieren Sie SetCover als ganzzahliges lineares Programm (ILP)!

- Formulieren Sie MehrwegeSchnitt als ILP.

  Tipp 1: Verwenden Sie eine 0-1-Variable $x_{v,i}$
  für jeden Knoten $v \in V$ und jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$.
  $x_{v,i} = 1$ soll bedeuten, dass ...

Übungen (in der Vorlesung?)

- Formulieren Sie SetCover als ganzzahliges lineares Programm (ILP)!

- Formulieren Sie MehrwegeSchnitt als ILP.

  Tipp 1: Verwenden Sie eine 0-1-Variable $x_{v,i}$
  für jeden Knoten $v \in V$ und jedes $i \in \{1, \dots, k\}$.
  $x_{v,i} = 1$ soll bedeuten, dass ...
  ... v in der Zusammenhangskomp. K_i von s_i liegt.

Übungen (in der Vorlesung?)

- Formulieren Sie SetCover als ganzzahliges lineares Programm (ILP)!

- Formulieren Sie MehrwegeSchnitt als ILP.

  Tipp 1: Verwenden Sie eine 0-1-Variable $x_{v,i}$ für jeden Knoten $v \in V$ und jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$.
  $x_{v,i} = 1$ soll bedeuten, dass ...
  ... v in der Zusammenhangskomp. K_i von s_i liegt.

  Tipp 2: Probieren Sie's erst mit $|\cdot|$, obwohl das *keine* lineare Funktion ist.