

Approximationsalgorithmen

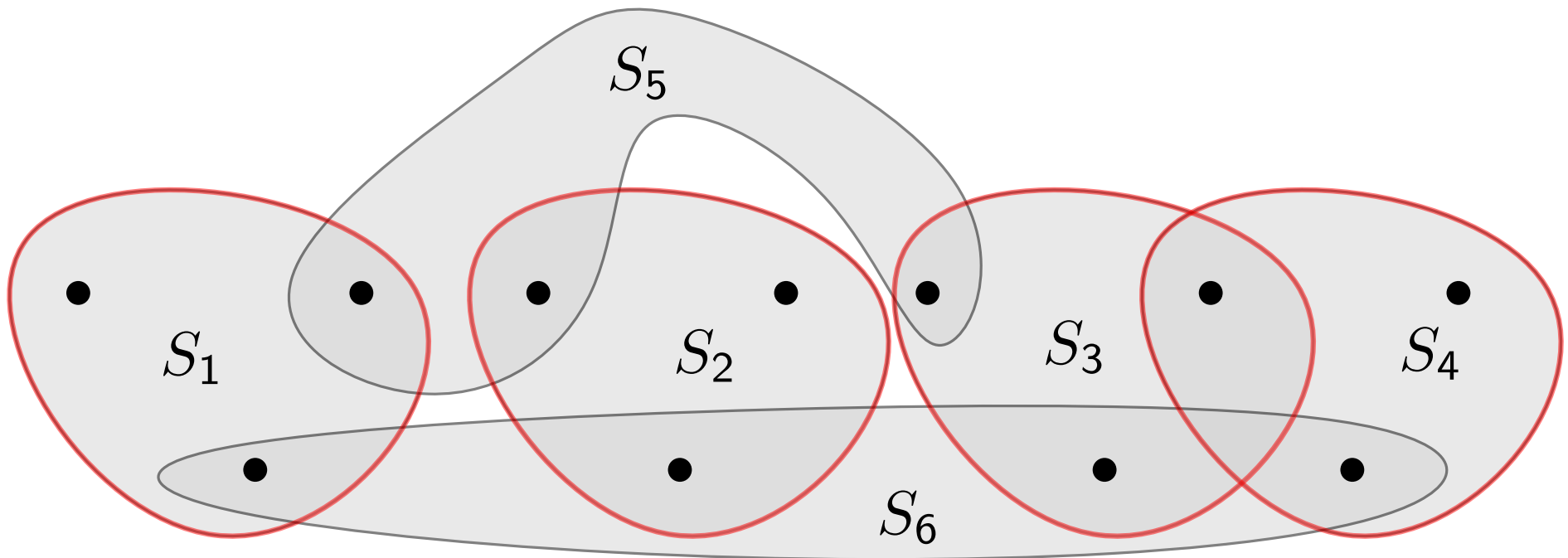
2. Vorlesung

– Folien von Joachim Spoerhase –

SETCOVER (card.)

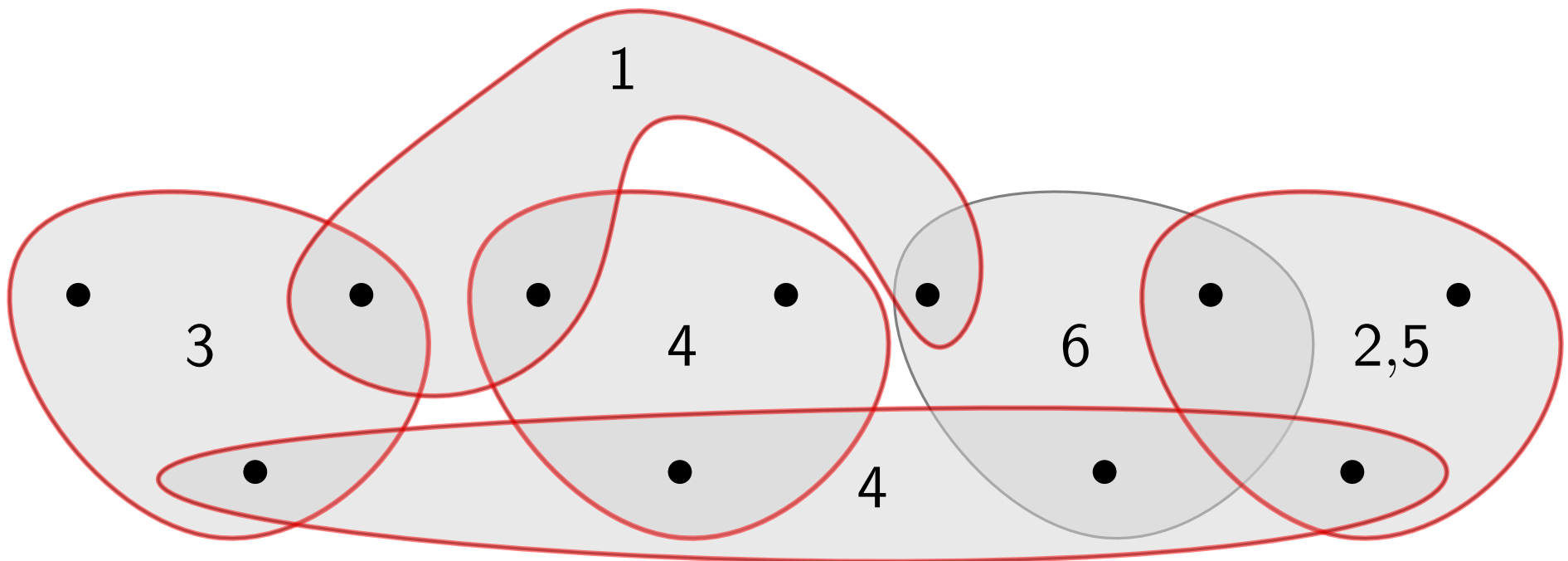
Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie \mathcal{S} von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität.



SETCOVER (allgemein)

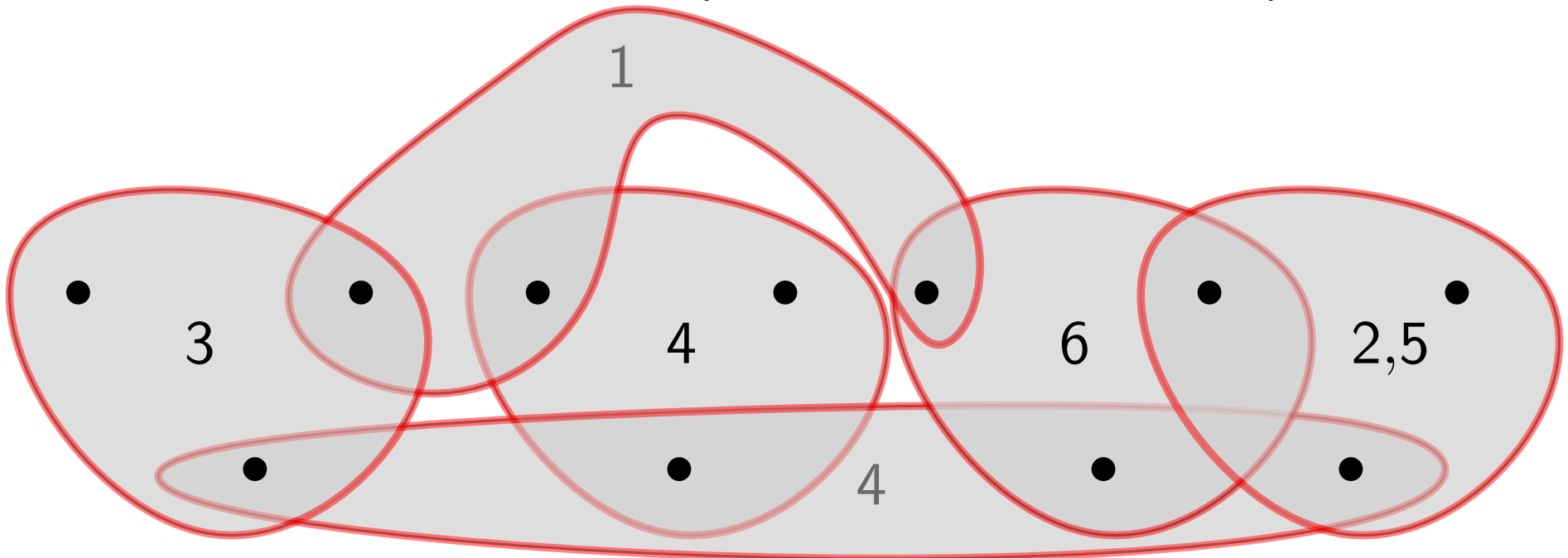
- Jede Menge $S \in \mathcal{S}$ hat nun positive Kosten $c(S)$.
- Gesucht ist eine Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit minimalen Gesamtkosten $c(\mathcal{S}') := \sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S)$.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Beobachtung: Gesamtkosten der Lösung = $\sum_{e \in U} \text{preis}(e)$

Greedy-Idee: Wähle in jedem Schritt Menge mit geringstem Elementpreis („effizienteste“ Menge).



Greedy für SETCOVER

GreedySetCover(U, \mathcal{S}, c)

$C \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$

while $C \neq U$ **do**

$S \leftarrow$ Menge aus \mathcal{S} , die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert

foreach $u \in S \setminus C$ **do**

$\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$

$C \leftarrow C \cup S$

$\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \{S\}$

return \mathcal{S}'

// Überdeckung von U

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor- H_k -Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in \mathcal{S} und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien u_1, \dots, u_l die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(l - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^l \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_l$.

Scharfes Beispiel

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor- H_k -Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in \mathcal{S} und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

