Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Approximationsalgorithmen

2. Vorlesung

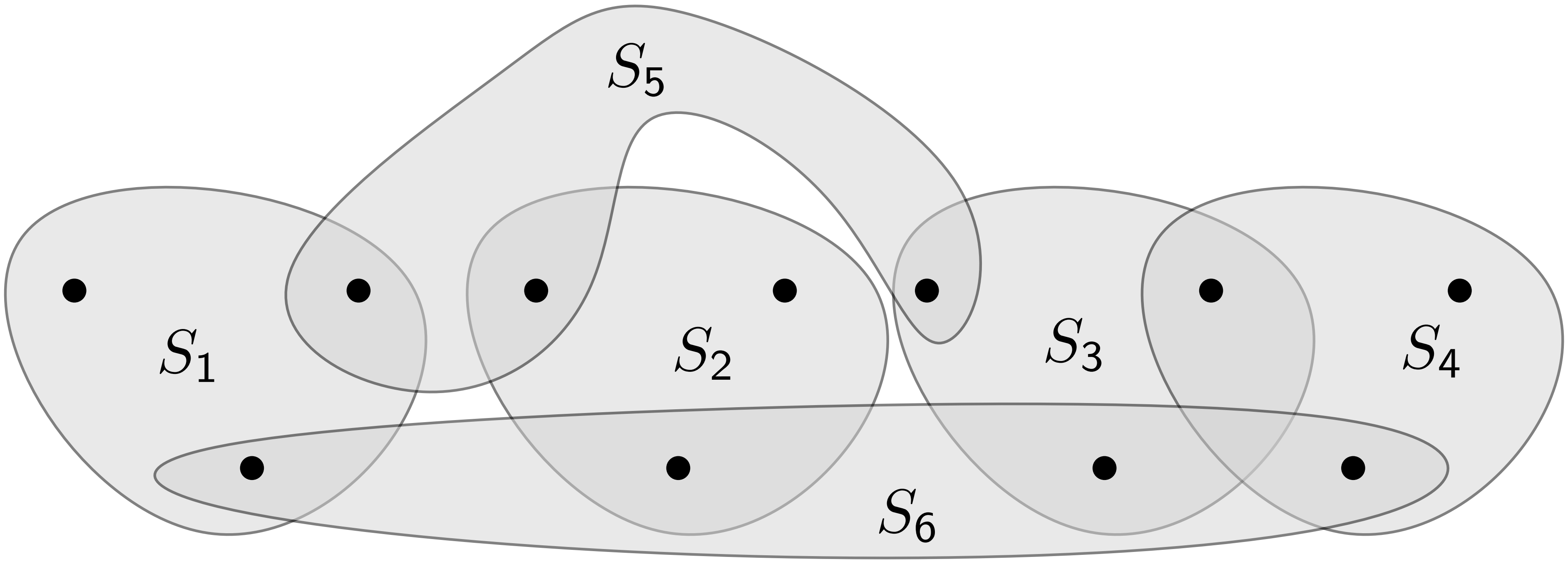
– Folien von Joachim Spoerhase –

Alexander Wolff Lehrstuhl für Informatik I WS 2018/19

SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

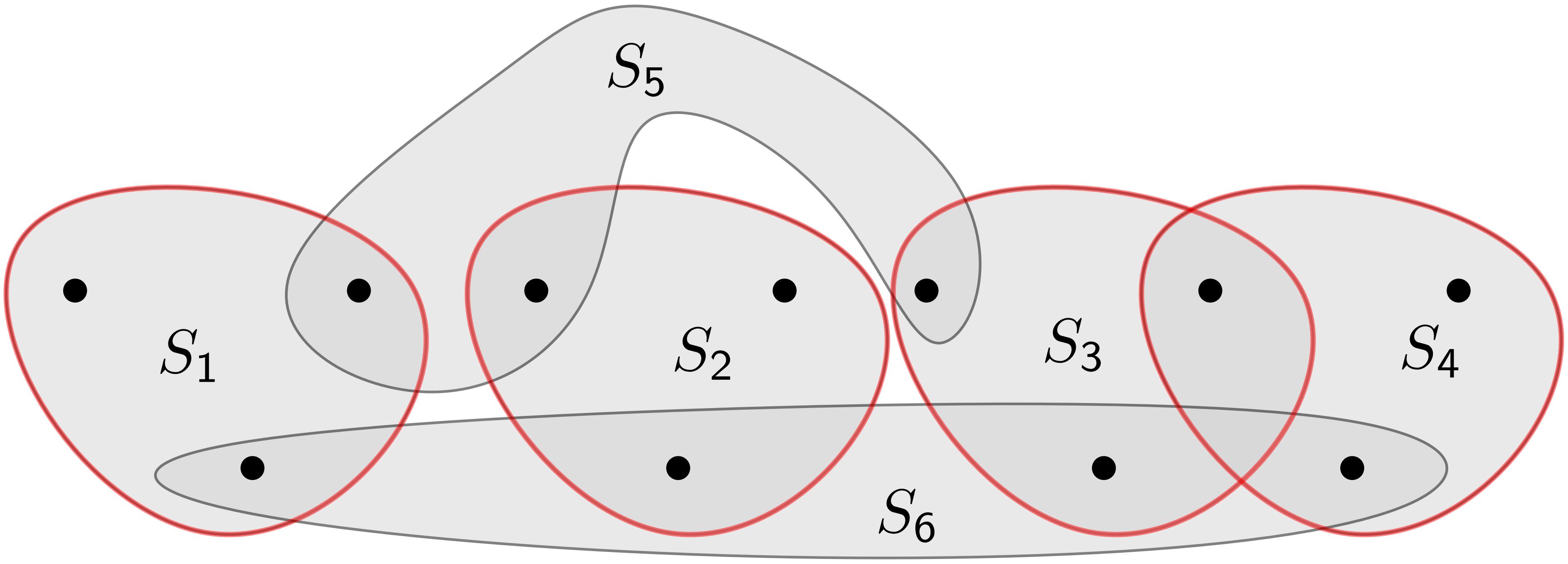
Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität.



SetCover (card.)

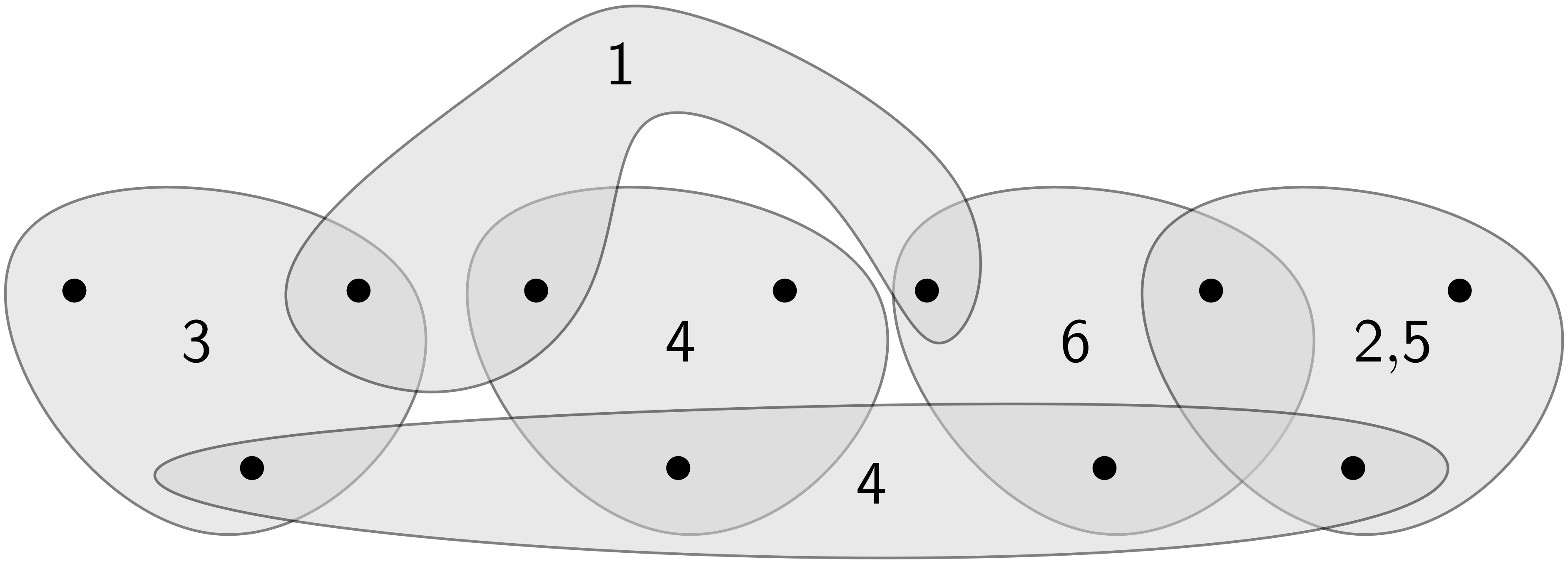
Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität.



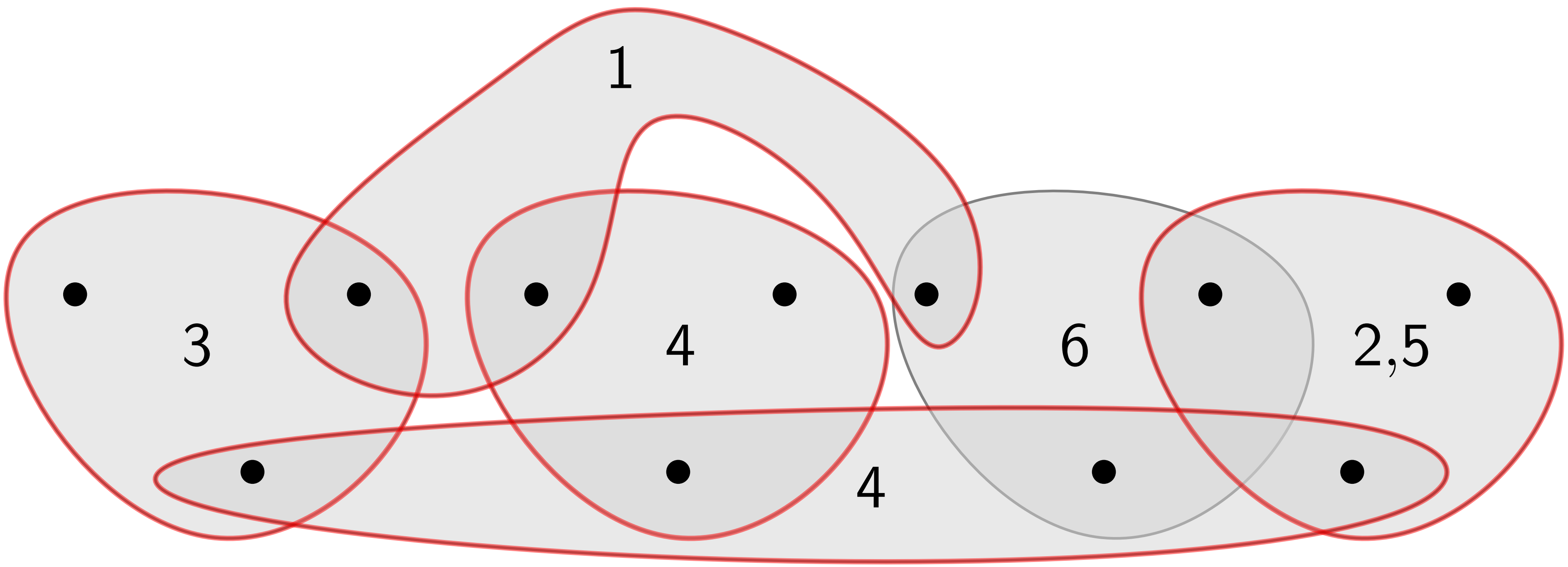
SetCover (allgemein)

- Jede Menge $S \in \mathcal{S}$ hat nun positive Kosten $c(S)$.
- Gesucht ist eine Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit minimalen Gesamtkosten $c(\mathcal{S}') := \sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S)$.

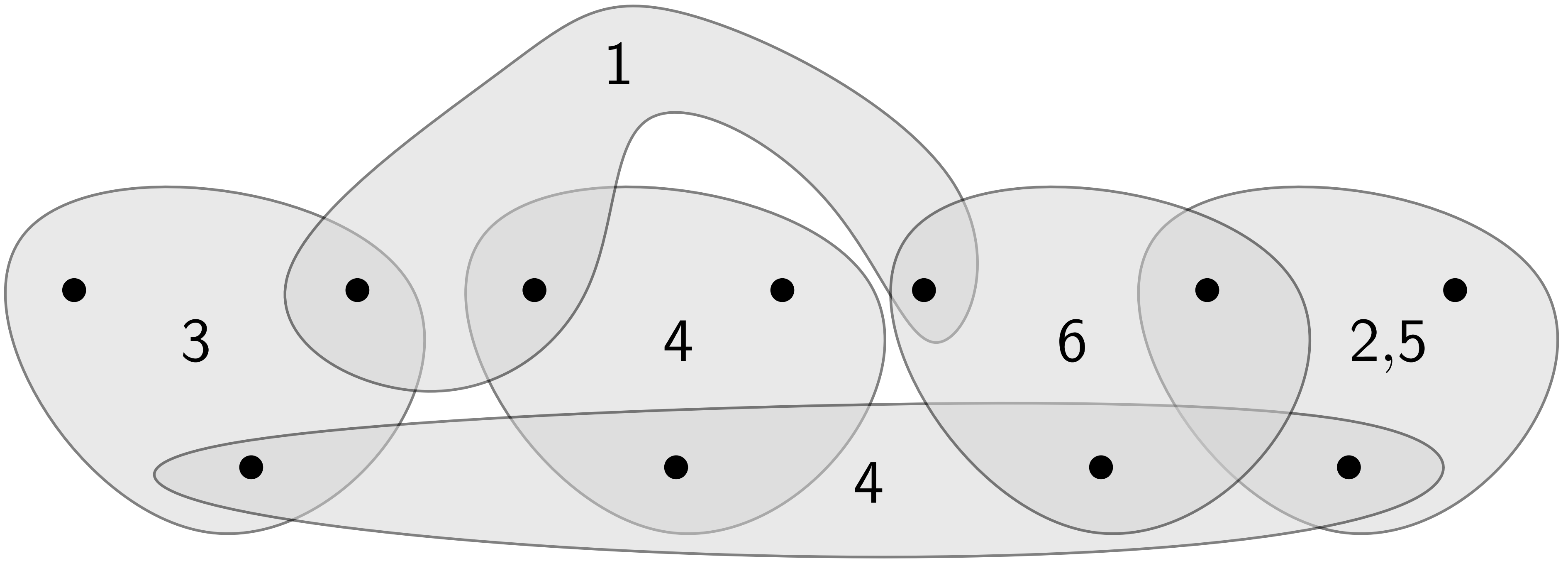


SetCover (allgemein)

- Jede Menge $S \in \mathcal{S}$ hat nun positive Kosten $c(S)$.
- Gesucht ist eine Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit minimalen Gesamtkosten $c(\mathcal{S}') := \sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S)$.

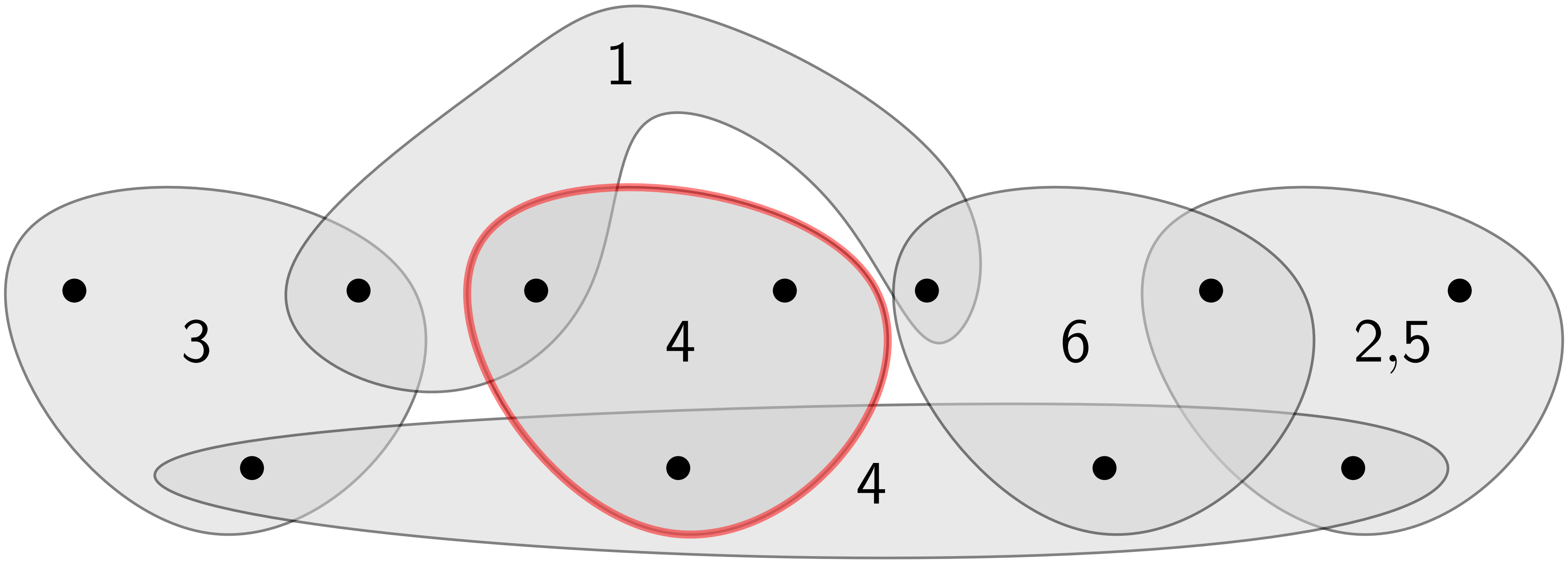


Iteratives „Einkaufen“ von Elementen



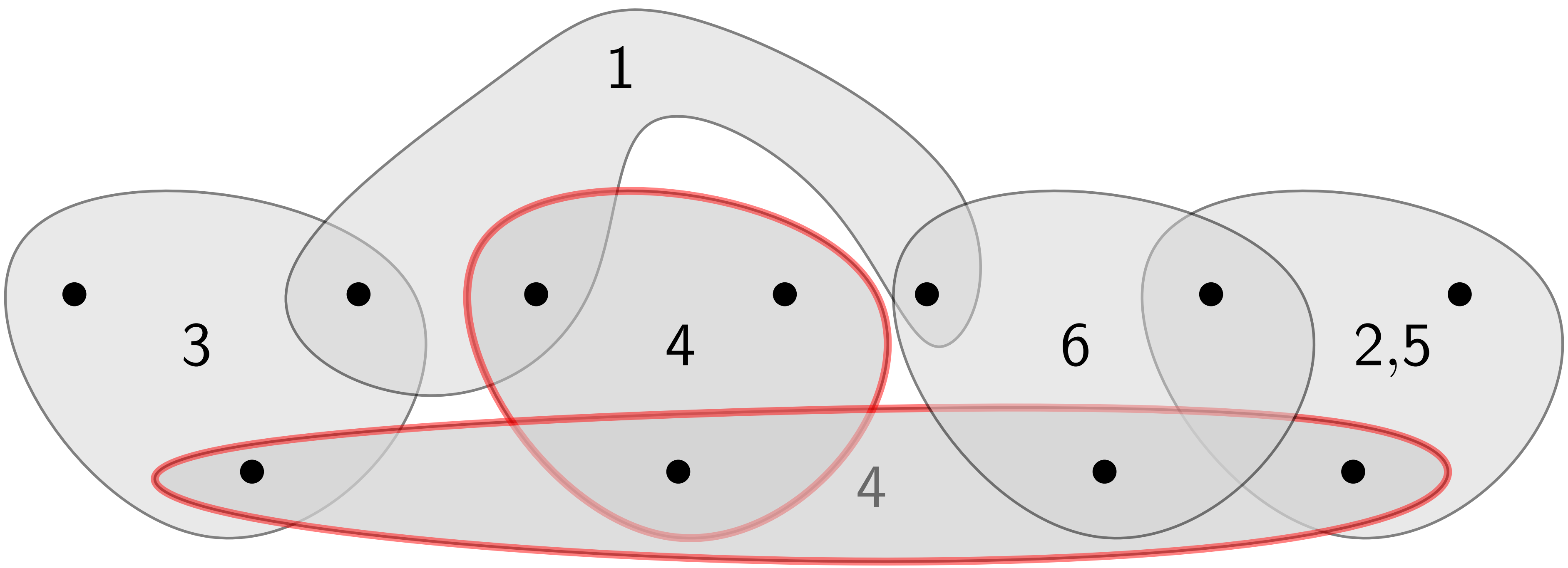
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Kaufe 3 Elemente zum Gesamtpreis 4 $\rightsquigarrow$ Elementpreis $4/3$

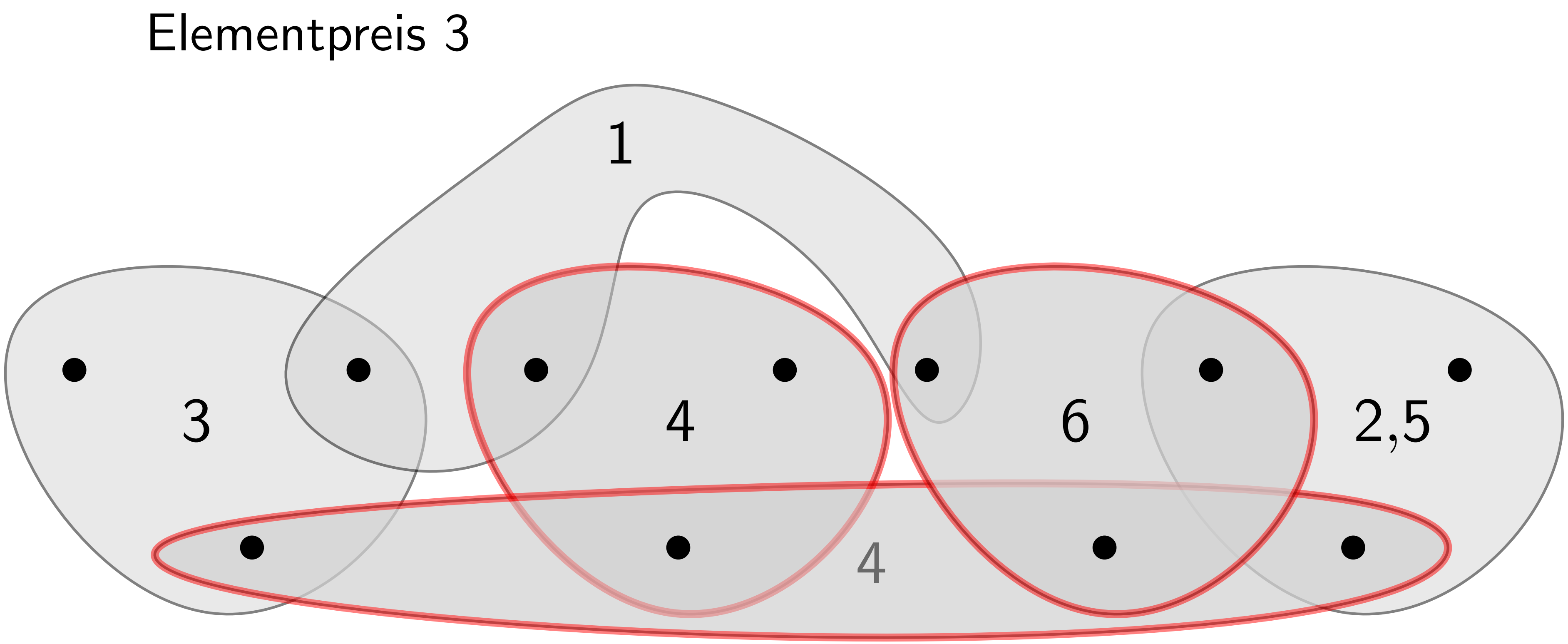


Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

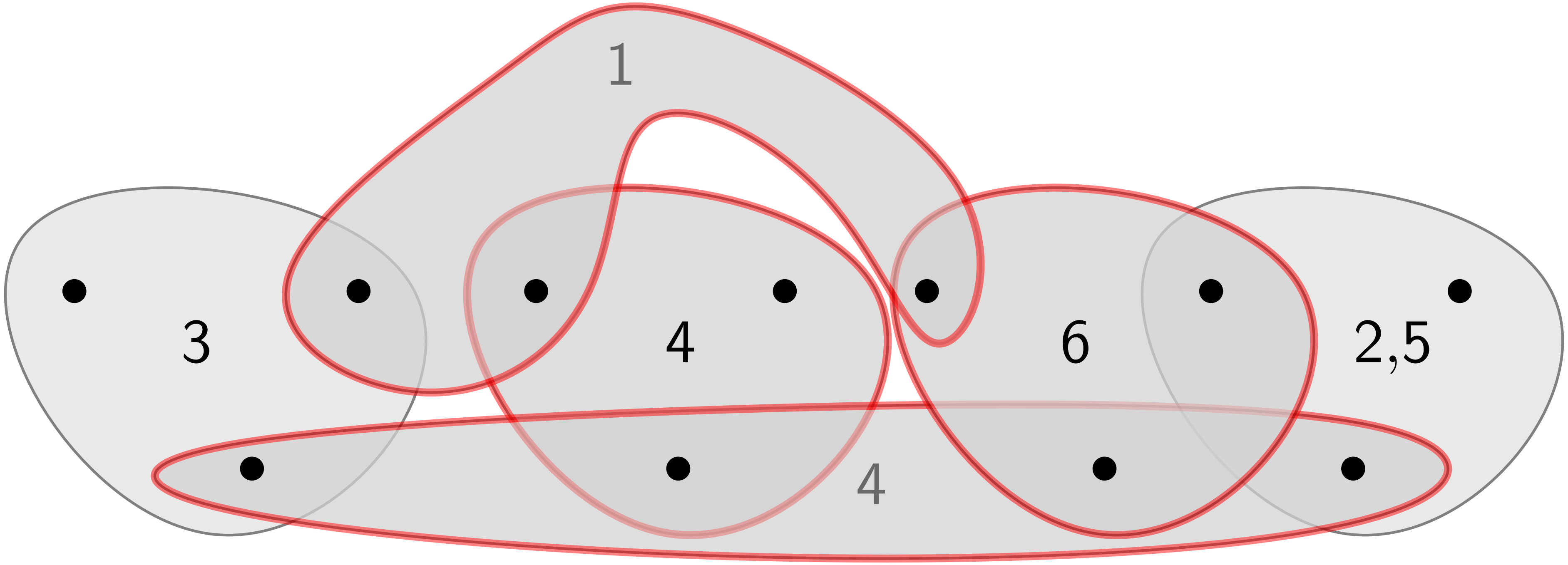
Kaufe 3 **weitere** Elemente zum Preis von je 4/3



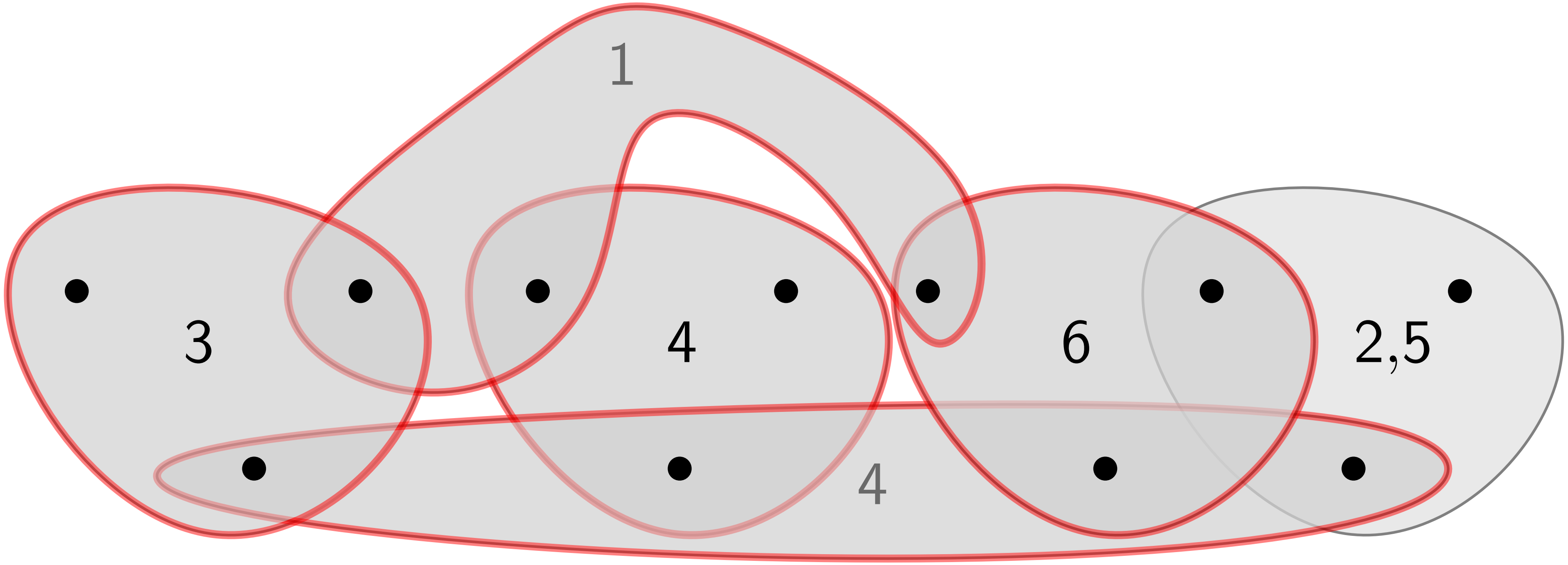
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

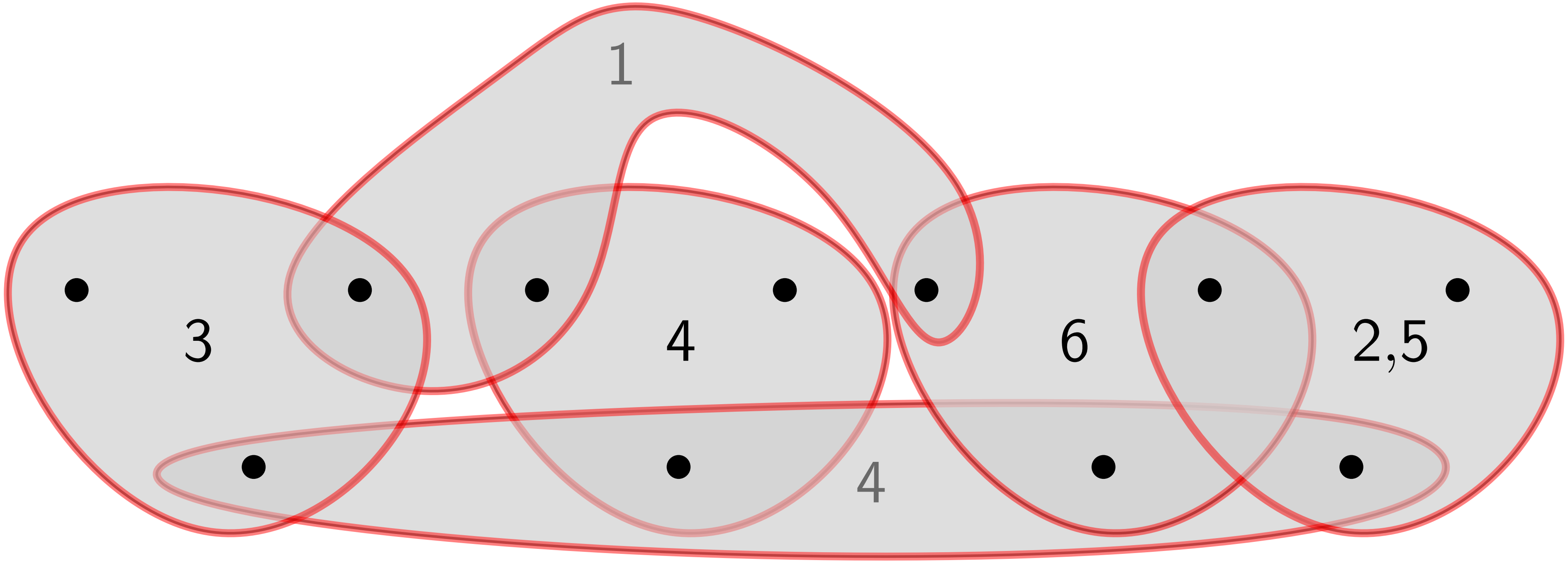


Iteratives „Einkaufen“ von Elementen



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

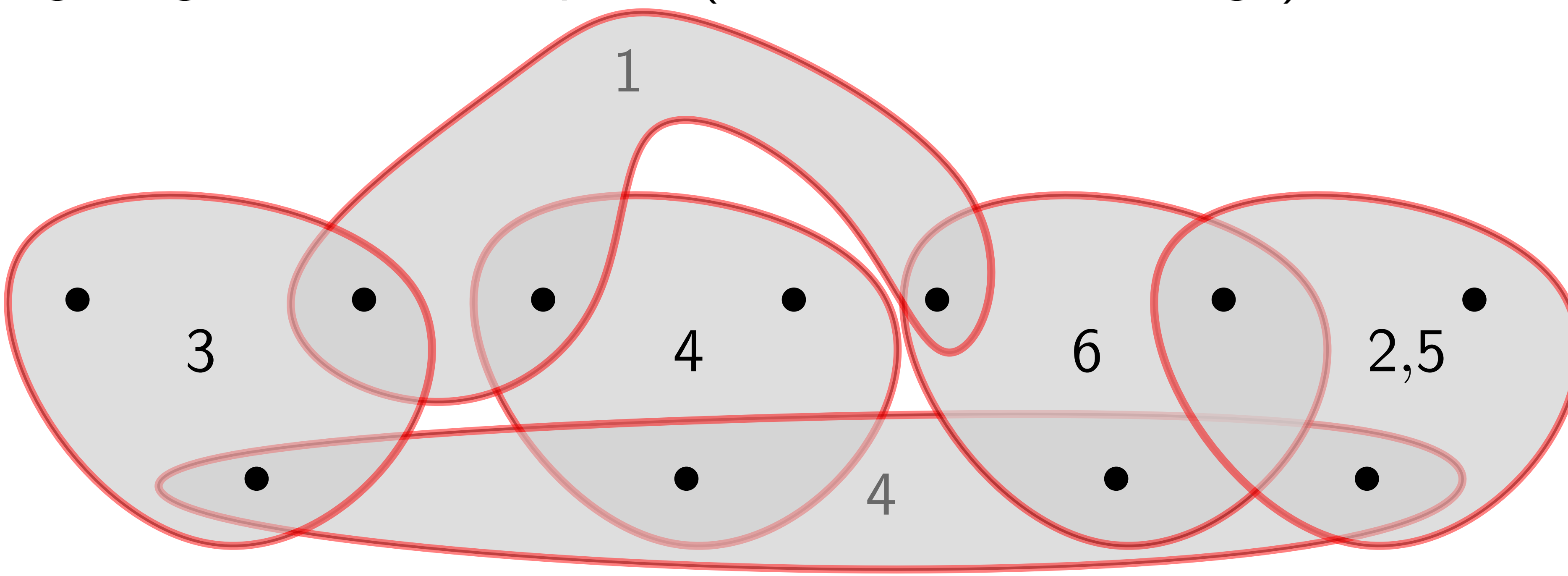
Beobachtung: Gesamtkosten der Lösung $= \sum_{e \in U} \text{preis}(e)$



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Beobachtung: Gesamtkosten der Lösung $= \sum_{e \in U} \text{preis}(e)$

Greedy-Idee: Wähle in jedem Schritt Menge mit geringstem Elementpreis („effizienteste“ Menge).



Greedy für SetCover

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$
$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$
while $C \neq U$ **do**
  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert
  foreach $u \in S \setminus C$ **do**
    preis(u) $\leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$
  $C \leftarrow C \cup S$
  $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \{S\}$
return $\mathcal{S}'$ `// Überdeckung von` U

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_l$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden.
Dann gilt $\mathrm{preis}(u_j) \leq c(S)/(l - j + 1)$.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg.
Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$
und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_l$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft") werden.
Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(l - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{l} \text{preis}(u_i) \leq$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_l$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden.
Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(l - j + 1)$.

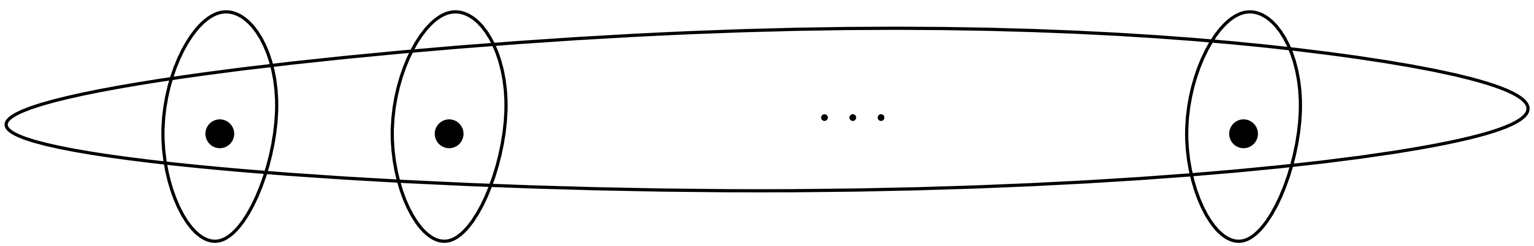
Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{l} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_l$.

Scharfes Beispiel

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Scharfes Beispiel

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



Scharfes Beispiel

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.