

Approximationsalgorithmen

1. Vorlesung

– Folien von Joachim Spoerhase –

Organisatorisches

Vorlesung: freitags, 10:15–11:45 Uhr, ÜR I

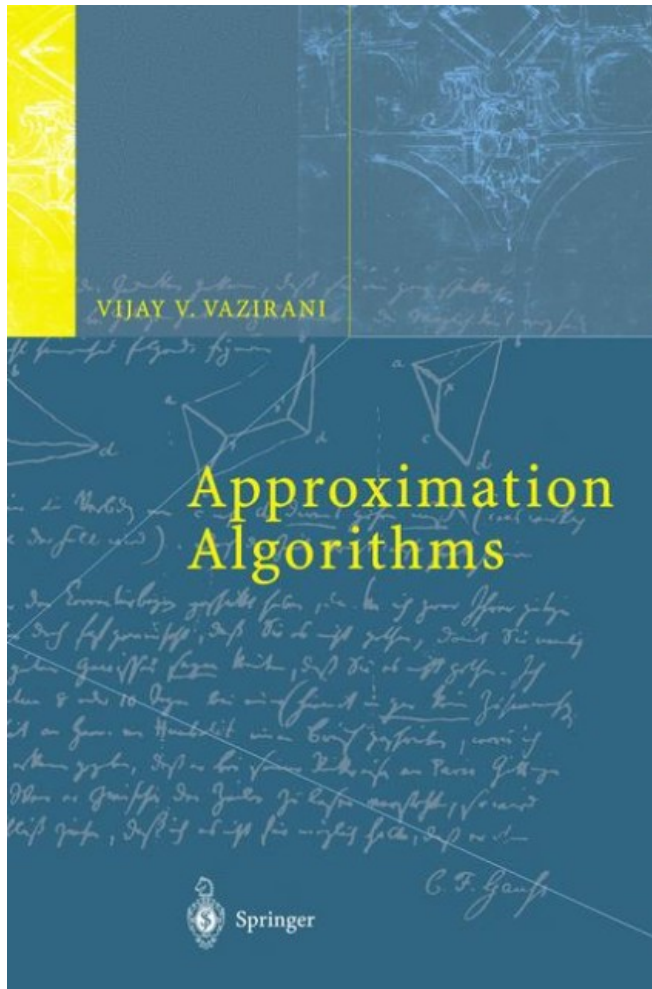
Übung: dienstags, 10:15–11:45 Uhr, SE I (ab nächste Woche!)

Vorlesung: (hoffentlich) interaktiv & „hands-on“

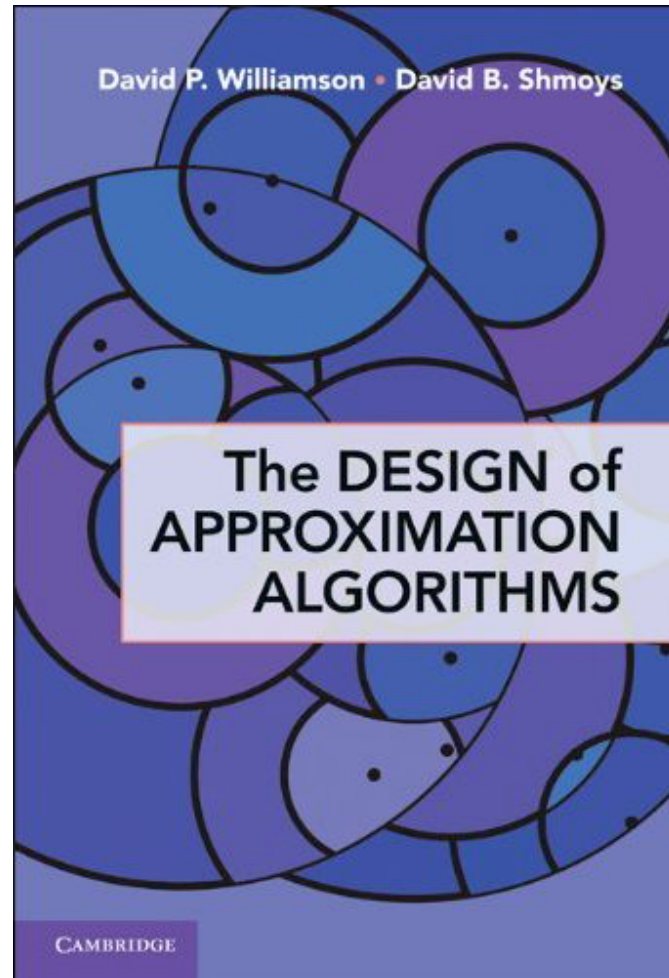
Achtung: Beweise werden wir oft an der Tafel entwickeln (nicht auf den Folien). Bitte Schreibzeug parat haben :-)

Bei Erreichen von 50% der Übungspunkte und einer bestandenen Prüfung gibt es einen Bonus in Höhe von 0,3 Notenpunkten.

Bücher zur Vorlesung



Vijay V. Vazirani:
Approximation Algorithms
Springer-Verlag, 2003.



D. P. Williamson & D. B. Shmoys:
The Design of Approximation Algorithms
Cambridge-Verlag, 2011.

Approximationsalgorithmen

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

– Bertrand Russell

Inhalt

Kombinatorische Algorithmen

- Einführung (Vertex Cover)
- Set Cover via Greedy
- Shortest Superstring via Red. auf SC
- Steinerbaum via MST
- Mehrwegeschnitt via Greedy
- k -Zentrum via param. Pruning
- Min-Deg-Spanning-Tree & lokale Suche
- Rucksackproblem via DP & Skalierung
- Euklidisches TSP via zuf. Quadrees

LP-basierte Algorithmen

- Einführung in LP-Dualität
- Set Cover via LP-Runden
- Set Cover via Primal-Dual-Schema
- Maximum Satisfiability
- Scheduling und Extrempunktlösungen
- Steinerwald via Primal-Dual

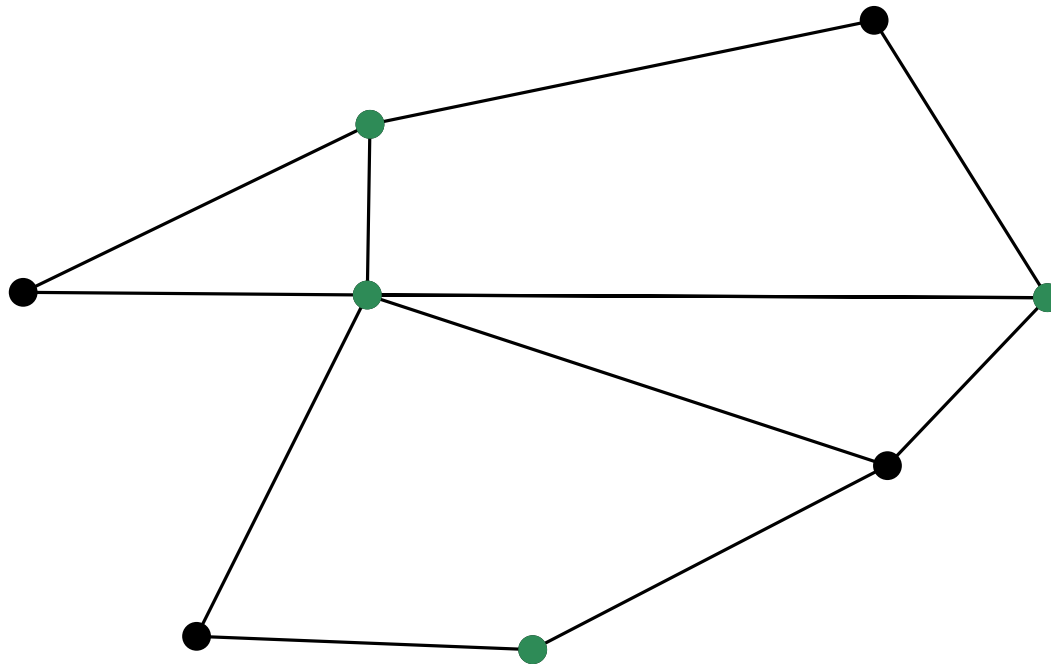
Approximationsalgorithmen

- Viele Optimierungsprobleme sind NP-schwer (Paradebeispiel: Problem des Handlungsreisenden).
- Also können optimale Lösungen nicht effizient bestimmt werden (außer $P=NP$).
- Gute Näherungslösungen lassen sich jedoch häufig effizient ermitteln!
- Wir studieren Techniken für Entwurf und Analyse von Approximationsalgorithmen anhand konkreter Optimierungsprobleme.

VERTEX COVER (card.)

Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. eine kleinste **Knotenüberdeckung**, d.h. eine kleinste Knotenmenge $V' \subseteq V$, die alle Kanten **überdeckt** (für alle Kanten $uv \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$)



Optimum (OPT = 4)

NP-Optimierungsproblem

Ein NP-Optimierungsproblem Π ist gegeben durch

- eine Menge D_Π von **Instanzen** (die Größe einer Instanz $I \in D_\Pi$ bezeichnen wir mit $|I|$),
- für jede Instanz $I \in D_\Pi$ eine Menge $S_\Pi(I) \neq \emptyset$ **zulässiger Lösungen** für I , so dass
 - für jedes $s \in S_\Pi(I)$ ist $|s|$ polynomiell beschränkt in $|I|$ und
 - für jedes Paar (s, I) lässt sich effizient entscheiden, ob $s \in S_\Pi(I)$,
- eine effizient berechenbare **Zielfunktion** obj_Π , die jedem (I, s) mit $s \in S_\Pi(I)$ einen Wert $\text{obj}_\Pi(I, s) \geq 0$ zuordnet.
- Π ist Minimierungs- oder Maximimierungsproblem.

VERTEX COVER als NP-Optimierungsproblem

Aufgabe: Bestimme die Werte für $\Pi = \text{VERTEX COVER}$.

$D_{\Pi} =$

Für $I \in D_{\Pi}$ ist $|I| =$

$S_{\Pi}(I) =$

- Warum gilt für jedes $s \in S_{\Pi}(I)$, dass $|s| \in \text{poly}(|I|)$?
- Wie lässt sich für ein Paar (s, I) effizient entscheiden, ob $s \in S_{\Pi}(I)$?

$\text{obj}_{\Pi}(I, s) =$

Π is M.....imierungsproblem.

Optimum, optimaler Zielfunktionswert

Sei Π ein **Minimierungsproblem** und $I \in D_\Pi$ eine Instanz für Π .
Eine zulässige Lösung $s^* \in S_\Pi(I)$ heißt **Optimum**, wenn $\text{obj}_\Pi(I, s^*)$ **minimal** unter allen zulässigen Lösungen für I ist.

Sei Π ein **Maximierungsproblem** und $I \in D_\Pi$ eine Instanz für Π .
Eine zulässige Lösung $s^* \in S_\Pi(I)$ heißt **Optimum**, wenn $\text{obj}_\Pi(I, s^*)$ **maximal** unter allen zulässigen Lösungen für I ist.

Der optimale Zielfunktionswert $\text{obj}_\Pi(I, s^*)$ wird auch mit $\text{OPT}_\Pi(I)$ oder kurz OPT bezeichnet.

Approximationsalgorithmus

Maximierungsproblem $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~ und ~~$\alpha \in \mathbb{Q}^+$~~ . Ein

Faktor- α -Approximationsalgorithmus für Π ist ein effizienter Algorithmus, der für **jede** Instanz $I \in D_\Pi$ eine Lösung $s \in S_\Pi(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{obj}_\Pi(I, s)}{\text{OPT}_\Pi(I)} \stackrel{\geq}{\leq} \alpha \cdot \alpha(|I|)$$

Approximationsalg. für VERTEX COVER

Ideen?

- Kanten-Greedy
- Knoten-Greedy (siehe ÜA)
- nicht verkleinerbare Knotenüberdeckungen

Abschätzung?

Problem: Wie können wir $\text{obj}_\Pi(I, s)/\text{OPT}$ abschätzen – wenn OPT schwer zu berechnen ist?

Vorgehen: Finde „gute“ untere Schranke $U \leq \text{OPT}$ für OPT und vergleiche diese mit der Approximation.

$$\frac{\text{obj}_\Pi(I, s)}{\text{OPT}} \leq \frac{\text{obj}_\Pi(I, s)}{U}$$

Untere Schranke durch Matchings

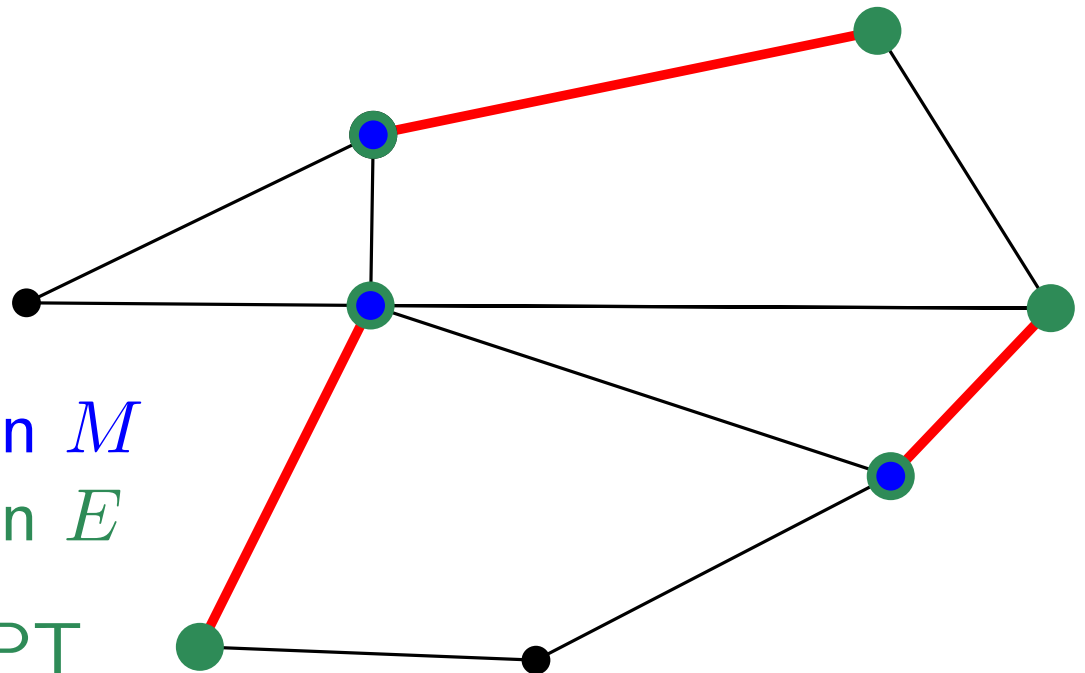
Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

$$\text{OPT} \geq \frac{|M|}{2}$$

Knotenüberdeckung von M
Knotenüberdeckung von E

$$\text{ALG} = 2 \cdot |M| \leq 2 \cdot \text{OPT}$$



Approximationsalg. für VERTEX COVER

Algorithmus Knotenüberdeckung(G)

$M \leftarrow \emptyset$

foreach $e \in E(G)$ **do**

if e nicht adjazent zu Kante in M **then**
 $M \leftarrow M \cup \{e\}$

return $\{u, v \mid uv \in M\}$

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-2-Approximationsalgorithmus für VERTEX COVER.