Approximationsalgorithmen

1. Vorlesung

– Folien von Joachim Spoerhase –

Alexander Wolff Lehrstuhl für Informatik I WS 2018/19

Organisatorisches

Vorlesung:	freitags, 10:15–11:45 Uhr, ÜR I
Übung:	dienstags, 10:15–11:45 Uhr, SE I

Organisatorisches

Vorlesung: freitags, 10:15–11:45 Uhr, ÜR I
Übung: dienstags, 10:15–11:45 Uhr, SE I

Vorlesung: (hoffentlich) interaktiv & „hands-on“

Organisatorisches

Vorlesung: freitags, 10:15–11:45 Uhr, ÜR I
Übung: dienstags, 10:15–11:45 Uhr, SE I (ab nächste Woche!)

Vorlesung: (hoffentlich) interaktiv & „hands-on“

Achtung: Beweise werden wir oft an der Tafel entwickeln (nicht auf den Folien). Bitte Schreibzeug parat haben :-)

Organisatorisches

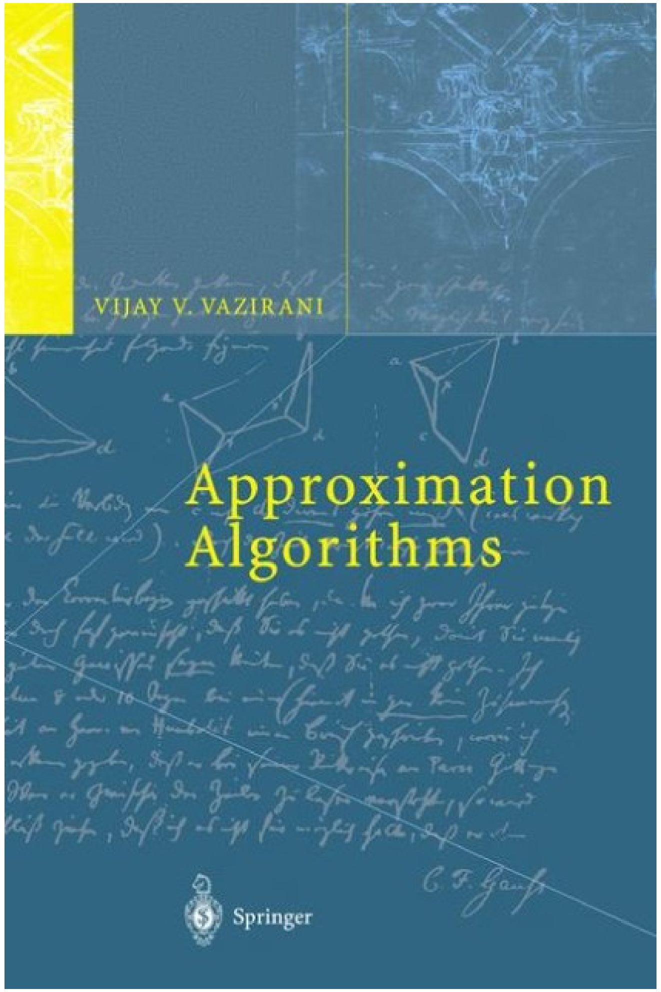
Vorlesung: freitags, 10:15–11:45 Uhr, ÜR I
Übung: dienstags, 10:15–11:45 Uhr, SE I (ab nächste Woche!)

Vorlesung: (hoffentlich) interaktiv & „hands-on“

Achtung: Beweise werden wir oft an der Tafel entwickeln (nicht auf den Folien). Bitte Schreibzeug parat haben :-)

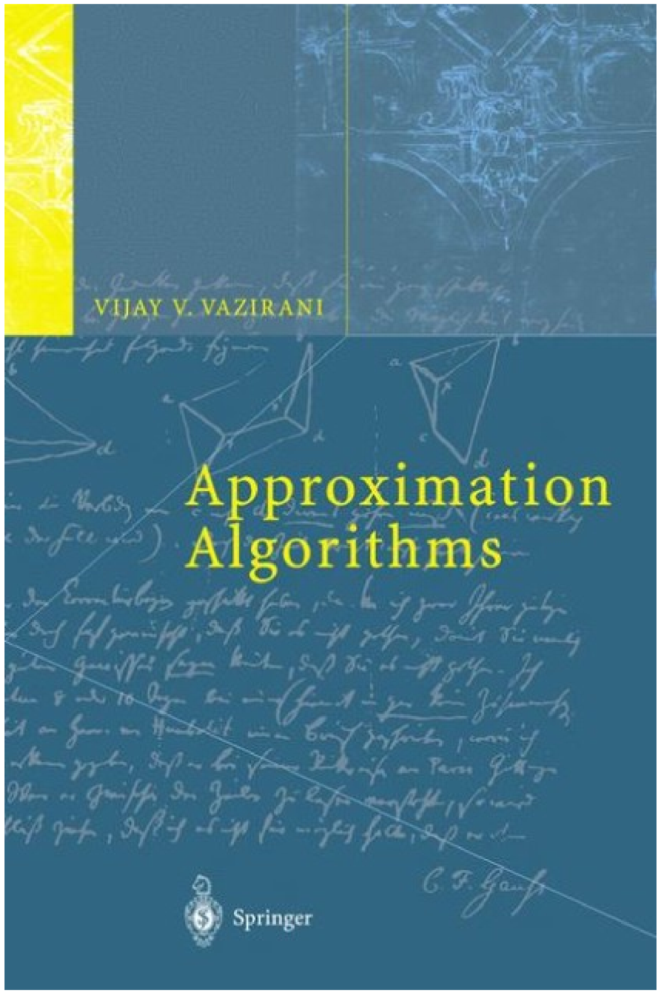
Bei Erreichen von 50% der Übungspunkte und einer bestandenen Prüfung gibt es einen Bonus in Höhe von 0,3 Notenpunkten.

Bücher zur Vorlesung

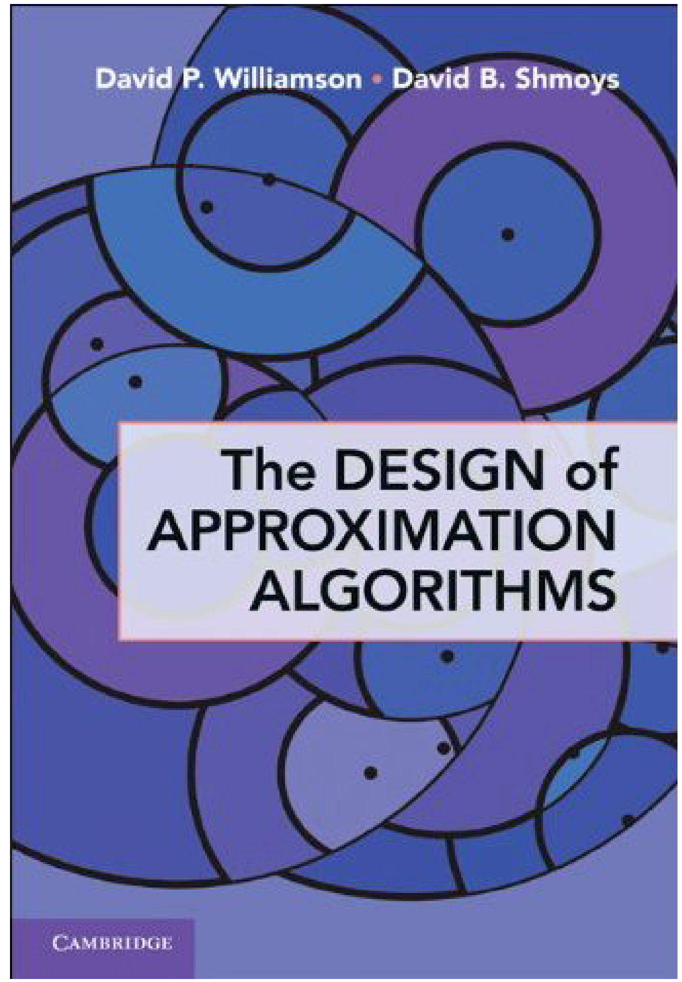


Vijay V. Vazirani:
Approximation Algorithms
Springer-Verlag, 2003.

Bücher zur Vorlesung



Vijay V. Vazirani:
Approximation Algorithms
Springer-Verlag, 2003.



D. P. Williamson & D. B. Shmoys:
The Design of Approximation Algorithms
Cambridge-Verlag, 2011.

Approximationsalgorithmen

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

– Bertrand Russell

Inhalt

Kombinatorische Algorithmen

- Einführung (Vertex Cover)
- Set Cover via Greedy
- Shortest Superstring via Red. auf SC
- Steinerbaum via MST
- Mehrwegeschnitt via Greedy
- k-Zentrum via param. Pruning
- Min-Deg-Spanning-Tree & lokale Suche
- Rucksackproblem via DP & Skalierung
- Euklidisches TSP via zuf. Quadtrees

LP-basierte Algorithmen

- Einführung in LP-Dualität
- Set Cover via LP-Runden
- Set Cover via Primal-Dual-Schema
- Maximum Satisfiability
- Scheduling und Extrempunktlösungen
- Steinerwald via Primal-Dual

Approximationsalgorithmen

- Viele Optimierungsprobleme sind NP-schwer (Paradebeispiel: Problem des Handlungsreisenden).

Approximationsalgorithmen

- Viele Optimierungsprobleme sind NP-schwer (Paradebeispiel: Problem des Handlungsreisenden).
- Also können optimale Lösungen nicht effizient bestimmt werden (außer P=NP).

Approximationsalgorithmen

- Viele Optimierungsprobleme sind NP-schwer (Paradebeispiel: Problem des Handlungsreisenden).
- Also können optimale Lösungen nicht effizient bestimmt werden (außer P=NP).
- Gute Näherungslösungen lassen sich jedoch häufig effizient ermitteln!

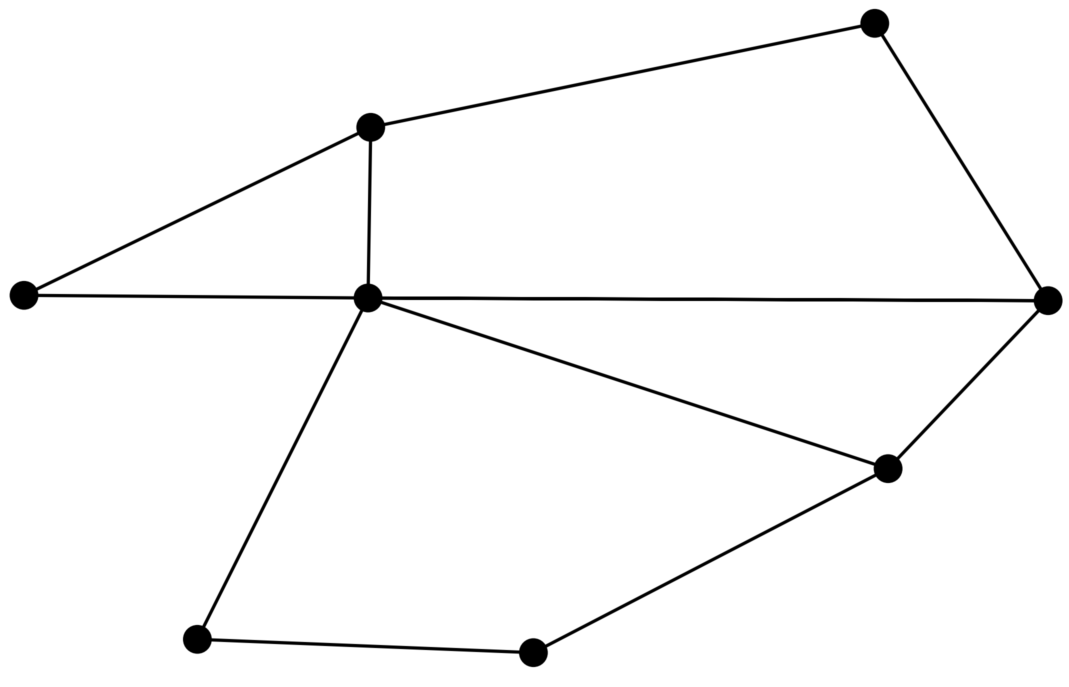
Approximationsalgorithmen

- Viele Optimierungsprobleme sind NP-schwer (Paradebeispiel: Problem des Handlungsreisenden).
- Also können optimale Lösungen nicht effizient bestimmt werden (außer P=NP).
- Gute Näherungslösungen lassen sich jedoch häufig effizient ermitteln!
- Wir studieren Techniken für Entwurf und Analyse von Approximationsalgorithmen anhand konkreter Optimierungsprobleme.

Vertex Cover (card.)

Geg. Graph $G = (V, E)$

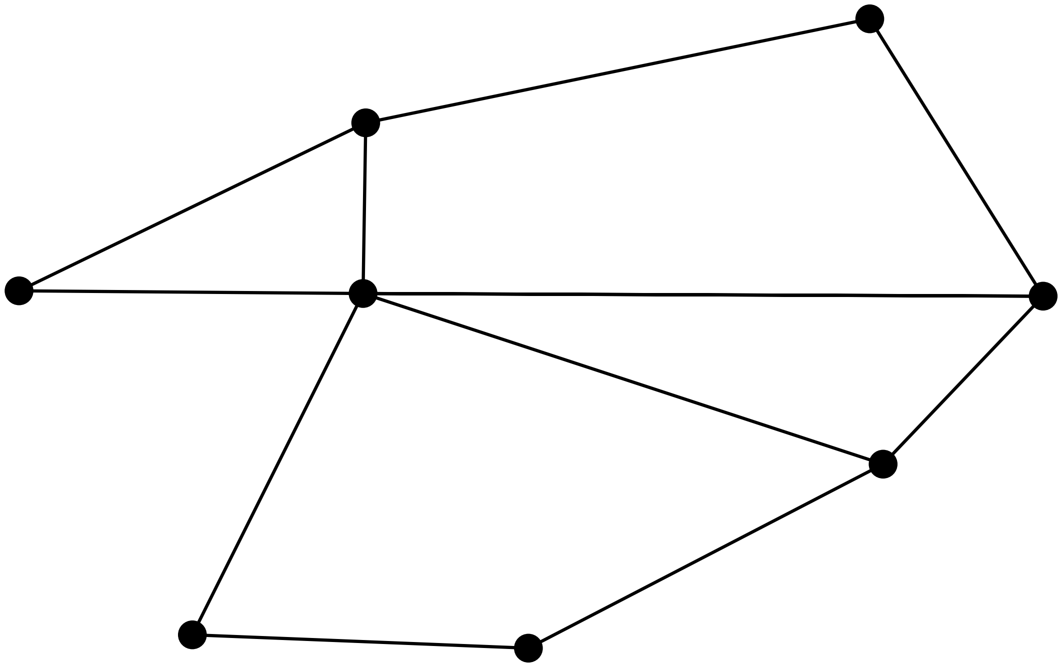
Ges.



Vertex Cover (card.)

Geg. Graph $G = (V, E)$

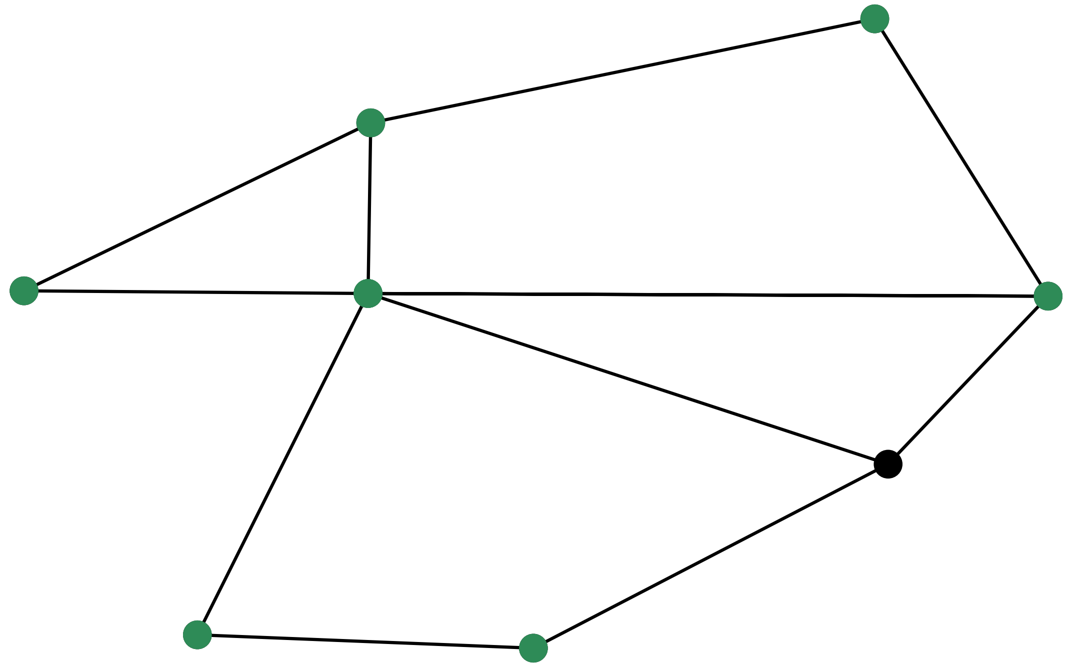
Ges. eine kleinste **Knotenüberdeckung**, d.h. eine kleinste Knotenmenge $V' \subseteq V$, die alle Kanten **überdeckt** (für alle Kanten $uv \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$)



Vertex Cover (card.)

Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. eine kleinste **Knotenüberdeckung**, d.h. eine kleinste Knotenmenge $V' \subseteq V$, die alle Kanten **überdeckt** (für alle Kanten $uv \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$)

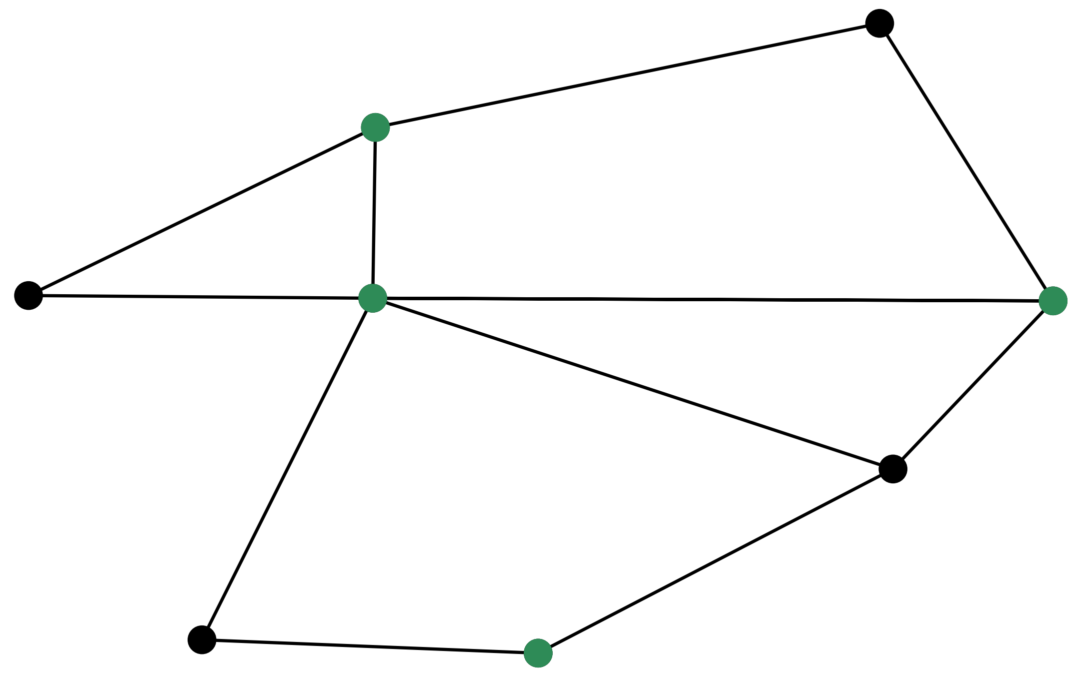


(irgend-) eine Knotenüberdeckung

VERTEX COVER (card.)

Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. eine kleinste **Knotenüberdeckung**, d.h. eine kleinste Knotenmenge $V' \subseteq V$, die alle Kanten **überdeckt** (für alle Kanten $uv \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$)

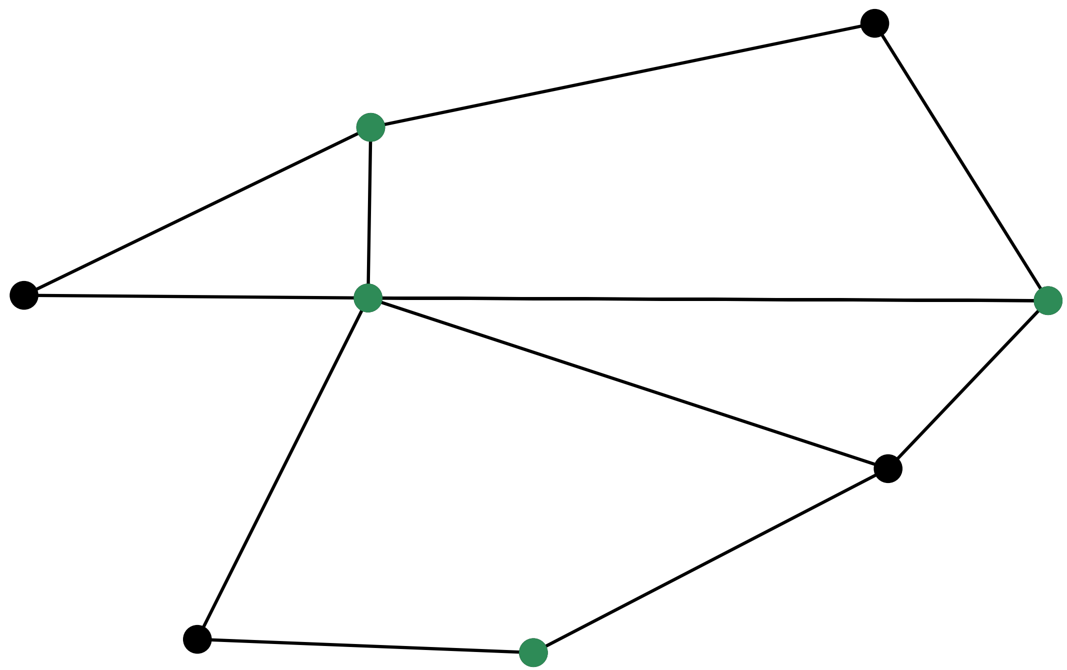


Optimum (OPT $= 4$)

Vertex Cover (card.)

Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. eine kleinste **Knotenüberdeckung**, d.h. eine kleinste Knotenmenge $V' \subseteq V$, die alle Kanten **überdeckt** (für alle Kanten $uv \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$)

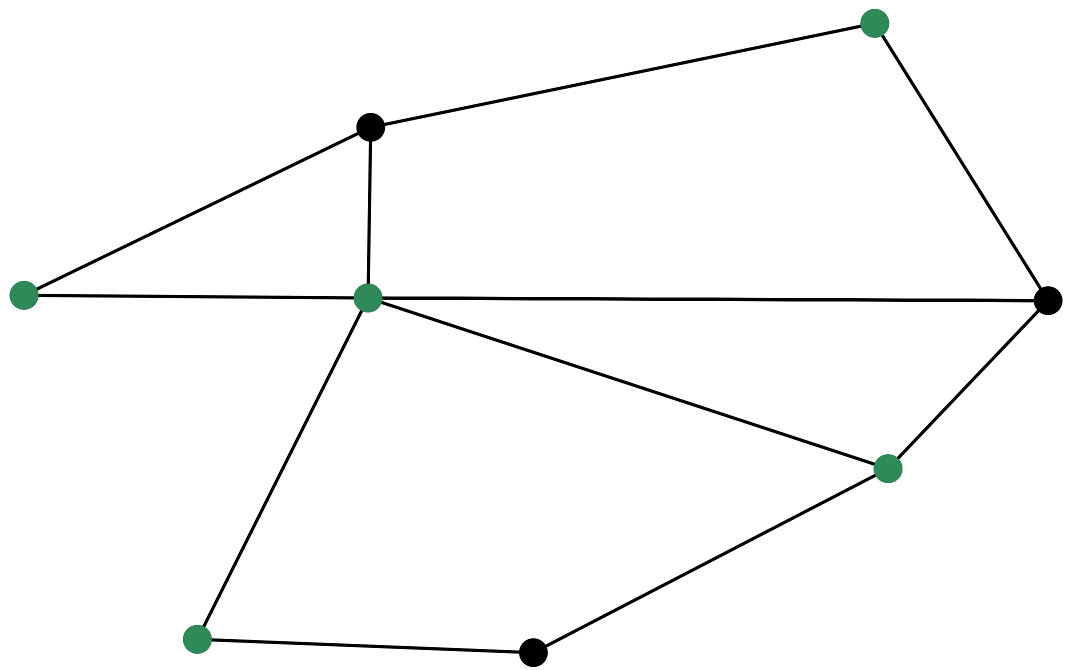


Optimum (OPT $= 4$) – aber i.A. NP-schwer zu berechnen :-(

Vertex Cover (card.)

Geg. Graph $G = (V, E)$

Ges. eine kleinste **Knotenüberdeckung**, d.h. eine kleinste Knotenmenge $V' \subseteq V$, die alle Kanten **überdeckt** (für alle Kanten $uv \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$)



„gute" Näherungslösung (5/4-Approximation)

NP-Optimierungsproblem

Ein NP-Optimierungsproblem Π ist gegeben durch

- eine Menge D_Π von **Instanzen** (die Größe einer Instanz $I \in D_\Pi$ bezeichnen wir mit $|I|$),
- für jede Instanz $I \in D_\Pi$ eine Menge $S_\Pi(I) \neq \emptyset$ **zulässiger Lösungen** für I, so dass
  - für jedes $s \in S_\Pi(I)$ ist $|s|$ polynomiell beschränkt in $|I|$ und
  - für jedes Paar (s, I) lässt sich effizient entscheiden, ob $s \in S_\Pi(I)$,
- eine effizient berechenbare **Zielfunktion** obj_Π, die jedem (I, s) mit $s \in S_\Pi(I)$ einen Wert $\mathrm{obj}_\Pi(I, s) \geq 0$ zuordnet.
- Π ist Minimierungs- oder Maximimierungsproblem.

$\textsc{Vertex Cover}$ als NP-Optimierungsproblem

Aufgabe: Bestimme die Werte für $\Pi = \textsc{Vertex Cover}$.

$D_\Pi =$

Für $I \in D_\Pi$ ist $\quad |I| =$

$S_\pi(I) =$

- Warum gilt für jedes $s \in S_\Pi(I)$, dass $|s| \in \mathrm{poly}(|I|)$?
- Wie lässt sich für ein Paar (s, I) effizient entscheiden, ob $s \in S_\Pi(I)$?

$\mathrm{obj}_\Pi(I, s) =$

Π is M.....imierungsproblem.

Optimum, optimaler Zielfunktionswert

Sei Π ein Minimierungsproblem und $I \in D_\Pi$ eine Instanz für Π. Eine zulässige Lösung $s^* \in S_\Pi(I)$ heißt **Optimum**, wenn $\mathrm{obj}_\Pi(I, s^*)$ minimal unter allen zulässigen Lösungen für I ist.

Optimum, optimaler Zielfunktionswert

Sei Π ein Minimierungsproblem und $I \in D_\Pi$ eine Instanz für Π. Eine zulässige Lösung $s^* \in S_\Pi(I)$ heißt **Optimum**, wenn $\mathrm{obj}_\Pi(I, s^*)$ minimal unter allen zulässigen Lösungen für I ist.

Sei Π ein Maximierungsproblem und $I \in D_\Pi$ eine Instanz für Π. Eine zulässige Lösung $s^* \in S_\Pi(I)$ heißt **Optimum**, wenn $\mathrm{obj}_\Pi(I, s^*)$ maximal unter allen zulässigen Lösungen für I ist.

Optimum, optimaler Zielfunktionswert

Sei Π ein Minimierungsproblem und $I \in D_\Pi$ eine Instanz für Π. Eine zulässige Lösung $s^* \in S_\Pi(I)$ heißt **Optimum**, wenn $\text{obj}_\Pi(I, s^*)$ minimal unter allen zulässigen Lösungen für I ist.

Sei Π ein Maximierungsproblem und $I \in D_\Pi$ eine Instanz für Π. Eine zulässige Lösung $s^* \in S_\Pi(I)$ heißt **Optimum**, wenn $\text{obj}_\Pi(I, s^*)$ maximal unter allen zulässigen Lösungen für I ist.

Der optimale Zielfunktionswert $\text{obj}_\Pi(I, s^*)$ wird auch mit $\text{OPT}_\Pi(I)$ oder kurz OPT bezeichnet.

Approximationsalgorithmus

Sei Π ein Minimierungsproblem und $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Ein Faktor-α-Approximationsalgorithmus für Π ist ein effizienter Algorithmus, der für **jede** Instanz $I \in D_\Pi$ eine Lösung $s \in S_\Pi(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\mathsf{obj}_\Pi(I, s)}{\mathsf{OPT}_\Pi(I)} \leq \alpha\,.$$

Approximationsalgorithmus

$\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

Sei Π ein Minimierungsproblem und $\cancel{\alpha \in \mathbb{Q}^+}$. Ein Faktor-$\alpha$-Approximationsalgorithmus für Π ist ein effizienter Algorithmus, der für **jede** Instanz $I \in D_\Pi$ eine Lösung $s \in S_\Pi(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\mathsf{obj}_\Pi(I, s)}{\mathsf{OPT}_\Pi(I)} \leq \cancel{\alpha}. \quad \alpha(|I|)$$

Approximationsalgorithmus

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~ Maximierungsproblem und ~~$\alpha \in \mathbb{Q}^+$~~ $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Ein Faktor-$\alpha$-Approximationsalgorithmus für Π ist ein effizienter Algorithmus, der für **jede** Instanz $I \in D_\Pi$ eine Lösung $s \in S_\Pi(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\mathsf{obj}_\Pi(I,s)}{\mathsf{OPT}_\Pi(I)} \overset{\geq}{\cancel{\leq}} \cancel{\alpha}\ \alpha(|I|) .$$

Approximationsalg. für Vertex Cover

Ideen?

Approximationsalg. für Vertex Cover

Ideen?

- Kanten-Greedy
- Knoten-Greedy (siehe ÜA)
- nicht verkleinerbare Knotenüberdeckungen

Approximationsalg. für Vertex Cover

Ideen?

- Kanten-Greedy
- Knoten-Greedy (siehe ÜA)
- nicht verkleinerbare Knotenüberdeckungen

Abschätzung?

Approximationsalg. für Vertex Cover

Ideen?

- Kanten-Greedy
- Knoten-Greedy (siehe ÜA)
- nicht verkleinerbare Knotenüberdeckungen

Abschätzung?

Problem: Wie können wir $\mathrm{obj}_{\Pi}(I, s)/\mathrm{OPT}$ abschätzen – wenn OPT schwer zu berechnen ist?

Approximationsalg. für Vertex Cover

Ideen?

- Kanten-Greedy
- Knoten-Greedy (siehe ÜA)
- nicht verkleinerbare Knotenüberdeckungen

Abschätzung?

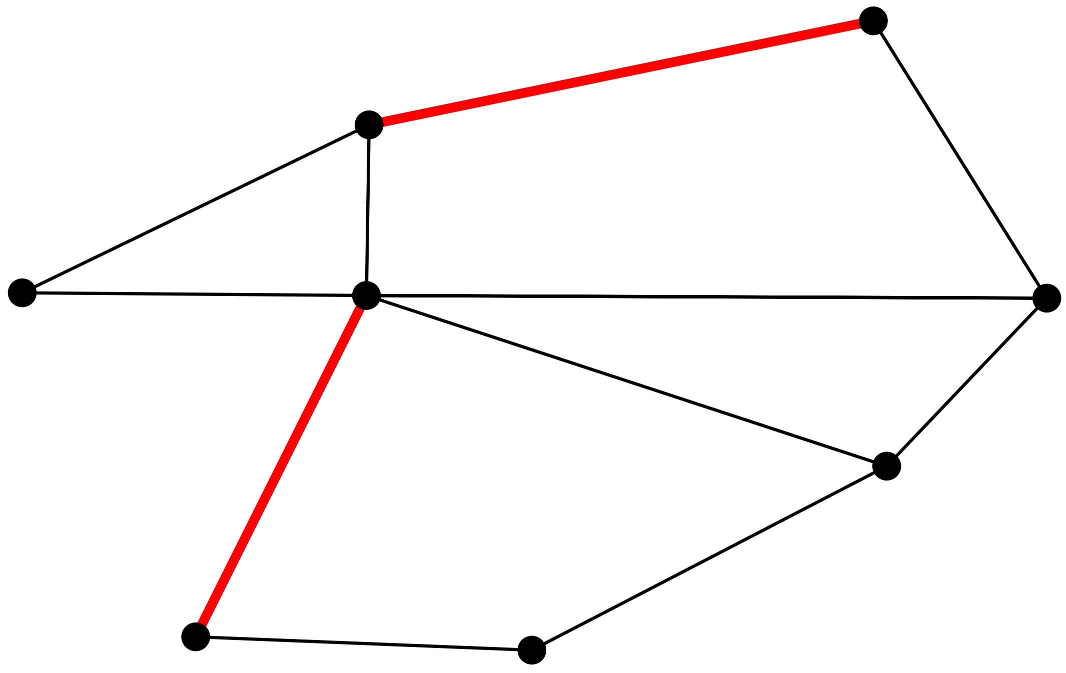
Problem: Wie können wir $\mathrm{obj}_\Pi(I, s)/\mathrm{OPT}$ abschätzen – wenn OPT schwer zu berechnen ist?

Vorgehen: Finde „gute“ untere Schranke $U \leq \mathrm{OPT}$ für OPT und vergleiche diese mit der Approximation.

$$\frac{\mathrm{obj}_\Pi(I, s)}{\mathrm{OPT}} \leq \frac{\mathrm{obj}_\Pi(I, s)}{U}$$

Untere Schranke durch Matchings

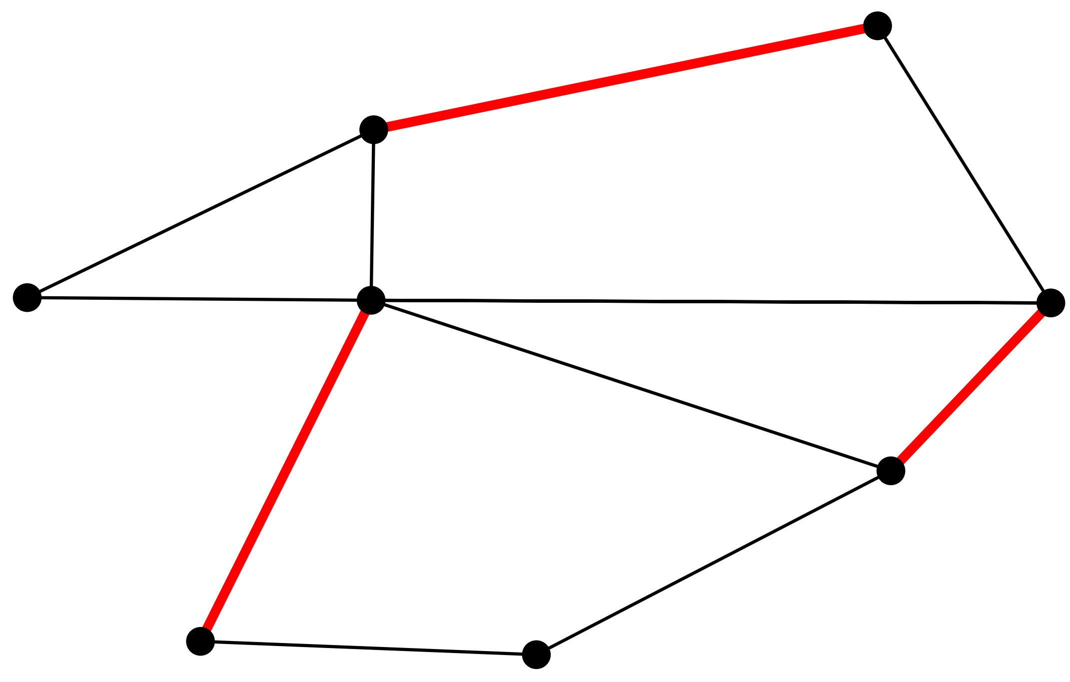
Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.



Untere Schranke durch Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

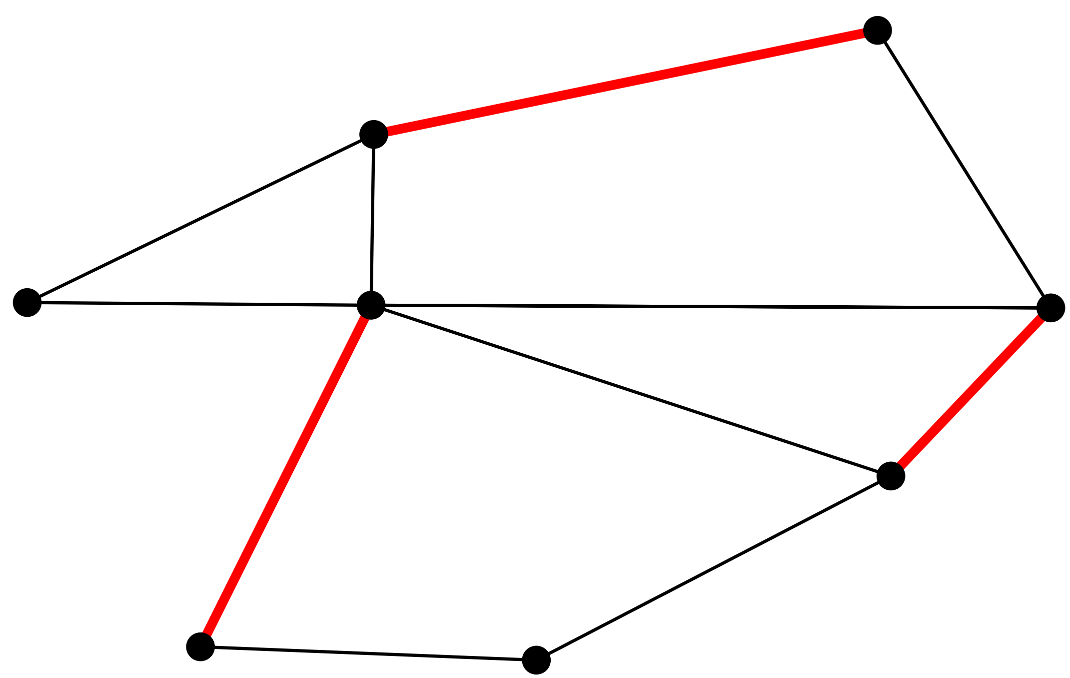


Untere Schranke durch Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

OPT ≥ 3

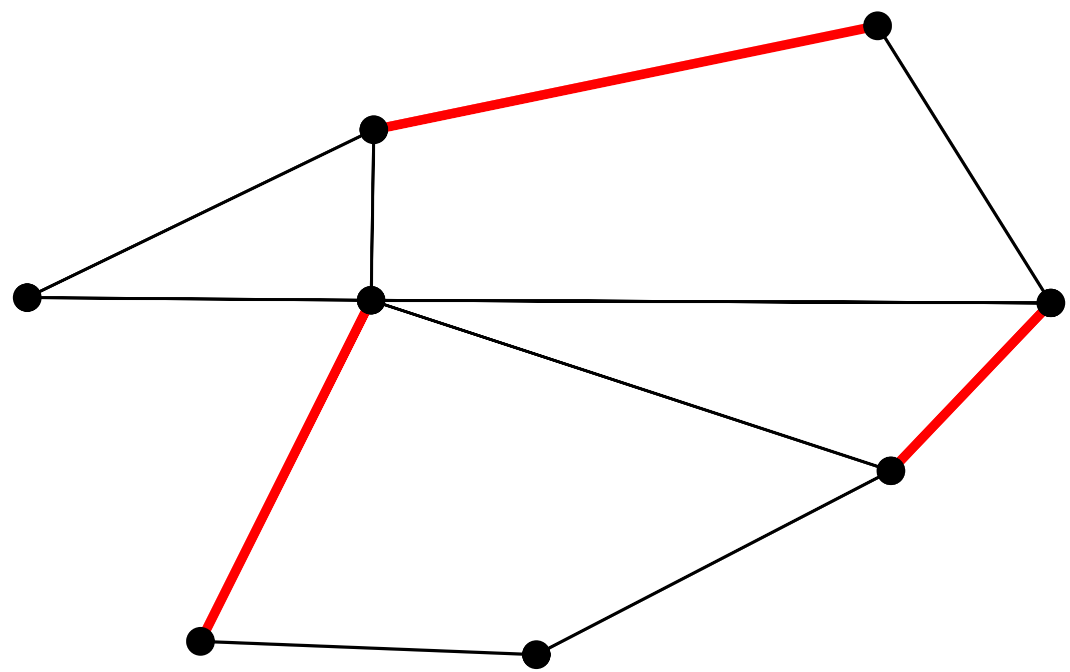


Untere Schranke durch Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

OPT $\geq \cancel{3}$ $|M|$



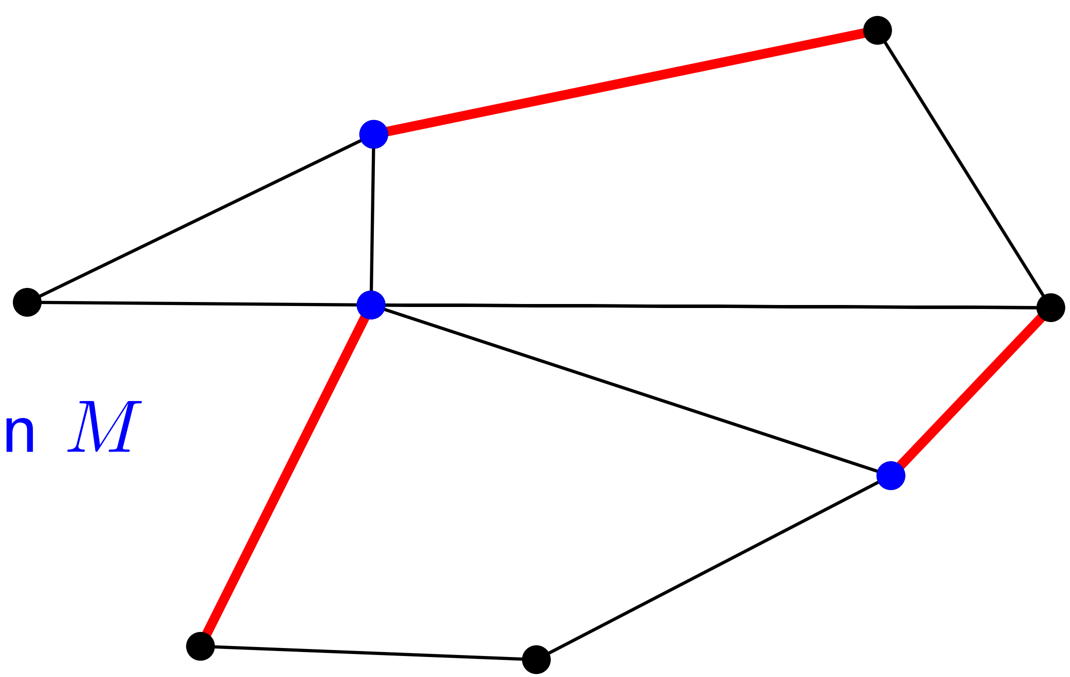
Untere Schranke durch Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

OPT $\geq \overset{|M|}{\cancel{3}}$

Knotenüberdeckung von M



Untere Schranke durch Matchings

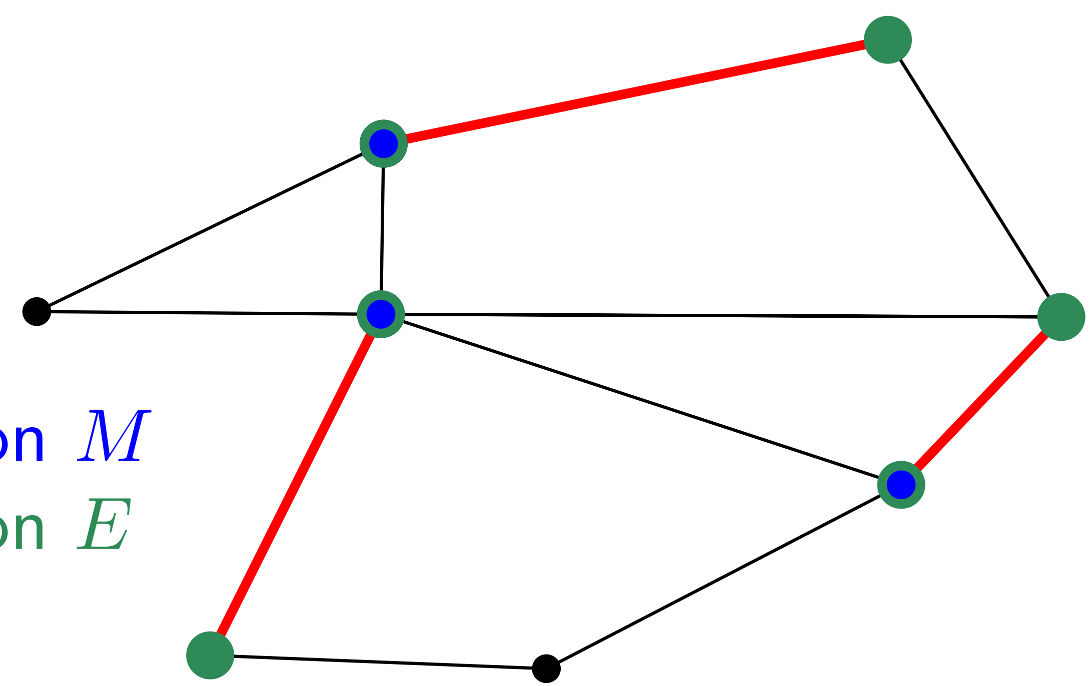
Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

$\text{OPT} \geq \cancel{3}$ $|M|$

Knotenüberdeckung von M

Knotenüberdeckung von E

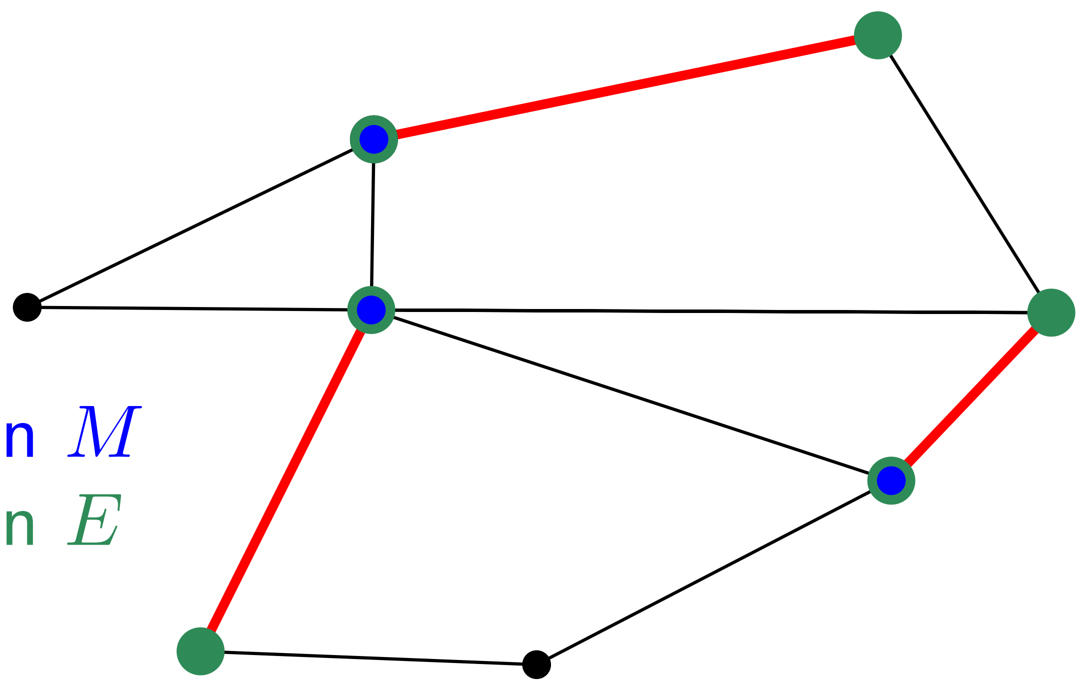


Untere Schranke durch Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

$\mathrm{OPT} \geq \overset{|M|}{\cancel{3}}$



Knotenüberdeckung von M

Knotenüberdeckung von E

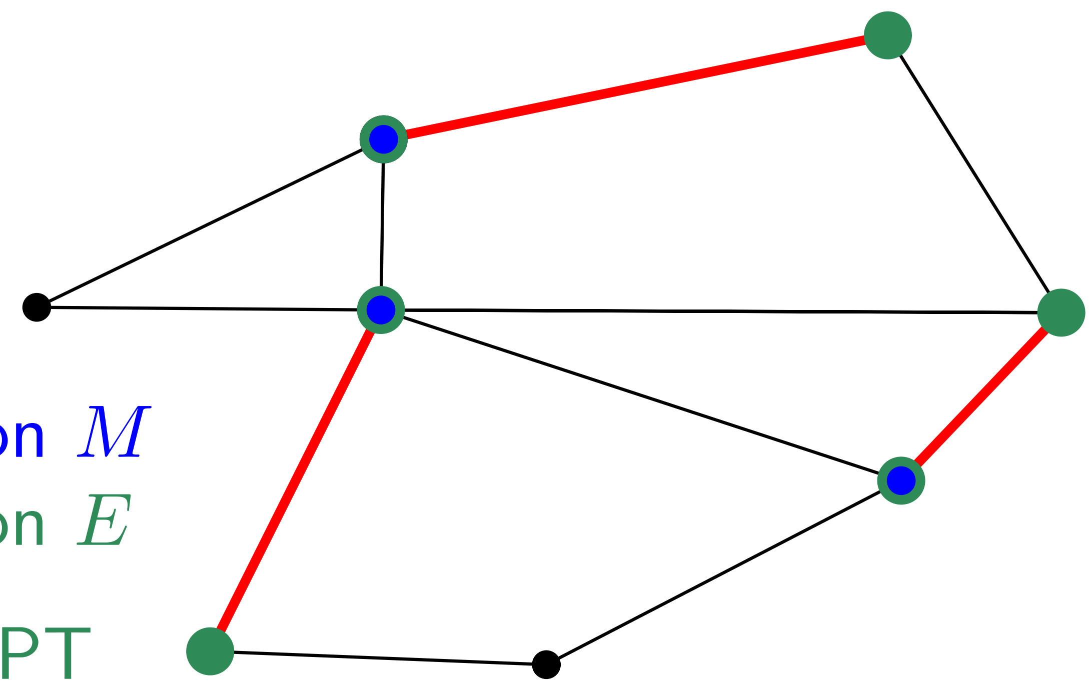
$\mathrm{ALG} = 2 \cdot |M| \leq$

Untere Schranke durch Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Matching**, wenn keine zwei Kanten aus M adjazent sind.

M heißt **nicht erweiterbar**, wenn es kein Matching M' mit $M' \supsetneq M$ für G gibt.

$\text{OPT} \geq \overset{|M|}{\cancel{3}}$



Knotenüberdeckung von M

Knotenüberdeckung von E

$\text{ALG} = 2 \cdot |M| \leq 2 \cdot \text{OPT}$

Approximationsalg. für Vertex Cover

Algorithmus Knotenüberdeckung(G)

$M \leftarrow \emptyset$

foreach $e \in E(G)$ **do**

  if e nicht adjazent zu Kante in M **then**

    $M \leftarrow M \cup \{e\}$

return $\{\, u, v \mid uv \in M \,\}$

Approximationsalg. für Vertex Cover

Algorithmus Knotenüberdeckung(G)

$M \leftarrow \emptyset$

foreach $e \in E(G)$ **do**

  if e nicht adjazent zu Kante in M **then**

    $M \leftarrow M \cup \{e\}$

return $\{\, u, v \mid uv \in M \,\}$

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Vertex Cover.