Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2018/19

24. Vorlesung

Der Handlungsreisende

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Das Problem

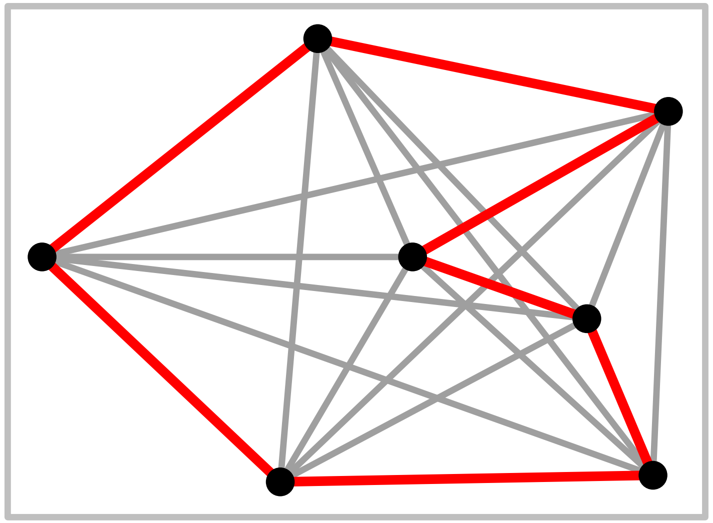
Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein HK besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$

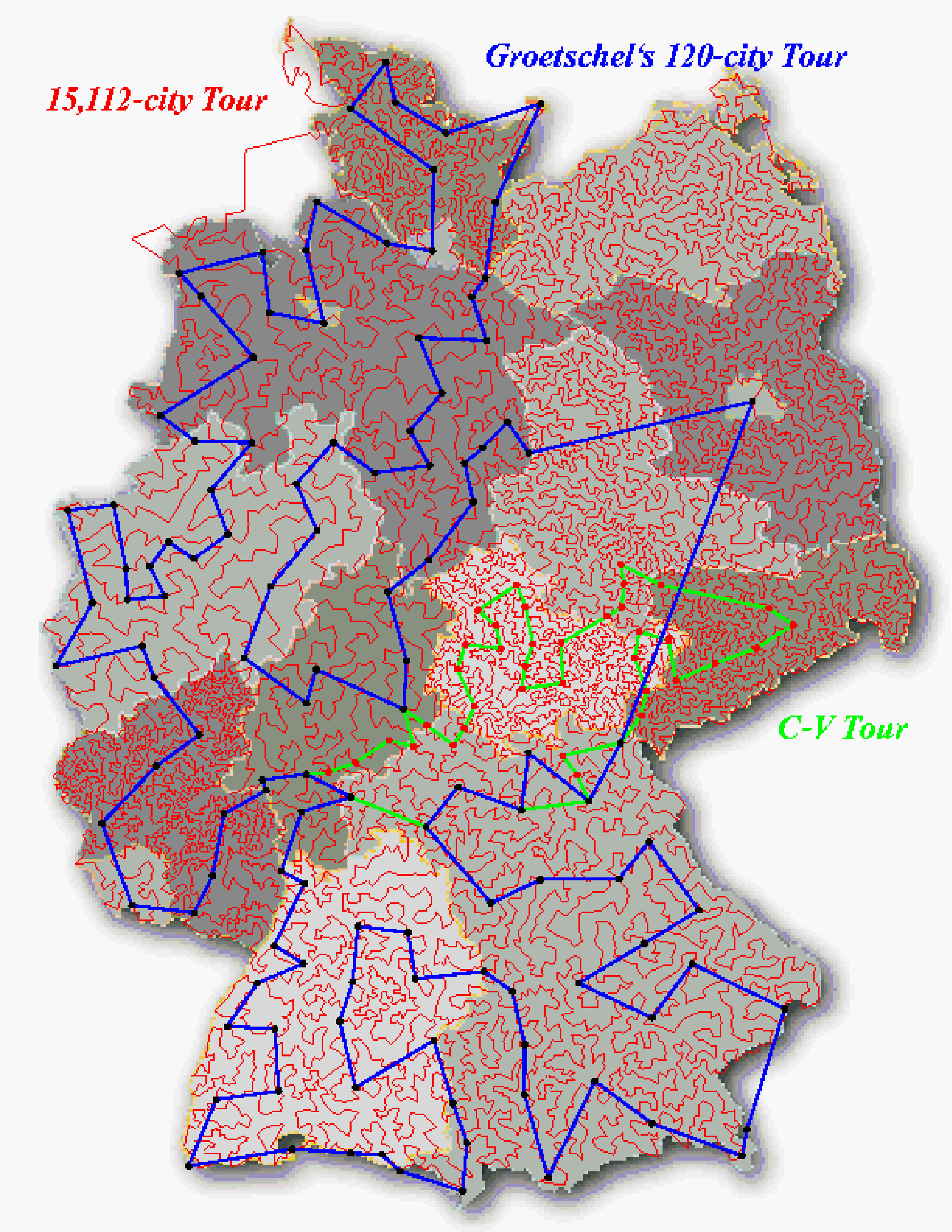


Problem.

- TSP ist NP-schwer
- und schwer zu approximieren.

Etwas Geschichte

Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein.
Von einem alten Commis-Voyageur
[1832]

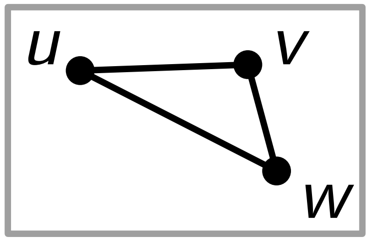


Rekord I:
optimale 120-Städte-Tour
[Groetschel, 1977]

Rekord II:
optimale 15.112-Städte-Tour
[Applegate, Bixby, Chvátal, Cook 2001]

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

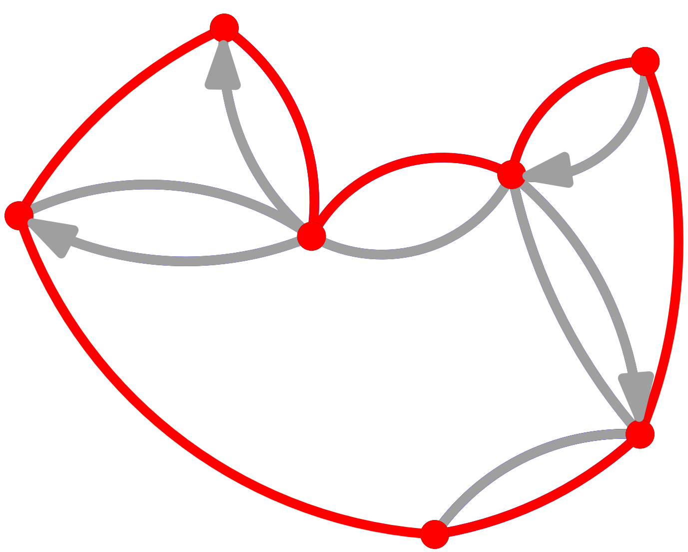


Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

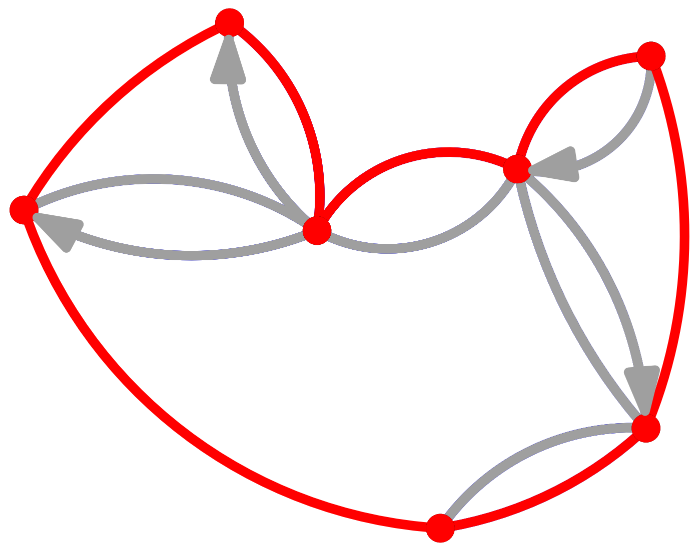
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Die „Kunst“ der unteren Schranke: $c(\text{min. Spannbaum}) \leq c(\text{TSP-Tour})$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:
  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur" $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher: $O(n)$ für die aktuelle Permutation.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \dots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1, 4, \underset{i}{3}, 6, \underset{j}{5}, 2 \rangle \longrightarrow \langle 1, 4, \underset{i}{5}, 6, \underset{j}{3}, \underset{n}{2} \rangle \longrightarrow \langle 1, 4, \underset{i}{5}, 2, 3, \underset{n}{6} \rangle$$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n) \rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Exakte Berechnung: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
$\mathrm{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\boxed{\mathrm{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)}$$

Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$\boxed{\mathrm{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \mathrm{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{OPT} = \min_{k \neq 1} \mathrm{OPT}[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)}$$

Index des letzten Knotens vor v_1

Der Algorithmus von Held-Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer opt. Lsg. (hier: bot.-up)!*

HeldKarp$\big($Knotenmenge V, Abstände $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}\big)$

for $i = 2$ **to** n **do**
- $\mathrm{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
- **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
  - **foreach** $v_i \in W$ **do**
    - $\mathrm{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \mathrm{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} \mathrm{OPT}[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $\mathrm{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O\big(n^2 \cdot 2^n\big)$ **Speicher:** $O\big(n \cdot 2^n\big)$

Vergleich

	Brute Force	Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.