Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2018/19
15. Vorlesung

## Augmentieren von Datenstrukturen

*Prof. Dr. Alexander Wolff* *Lehrstuhl für Informatik I*

# Plan

Wir kennen schon eine ganze Reihe von Datenstrukturen:

- doppelt verkettete Liste
- Stapel
- Hashtabelle
- Heap
- binärer Suchbaum

Allerdings gibt es viele Situationen, wo keine davon genau passt.

**Herangehensweise:** *Augmentieren* von Datenstrukturen,

d.h. wir verändern Datenstrukturen,
indem wir extra Information
hinzufügen und aufrechterhalten.

# Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – Liste

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   – Summe der Elemente (*sum*)
   – Anzahl der Elemente (*size*)

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?
   – konstanter Aufwand beim Einfügen und Löschen

4. Implementiere neue Operationen!

   getMean()
      **return** $sum/size$

Probieren Sie's!

Ähnlich für Standardabweichung $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}$.

# Neues Beispiel

Wir wollen das Auswahlproblem für dynamische Mengen lösen.

D.h. wir wollen zu jedem Zeitpunkt effizient

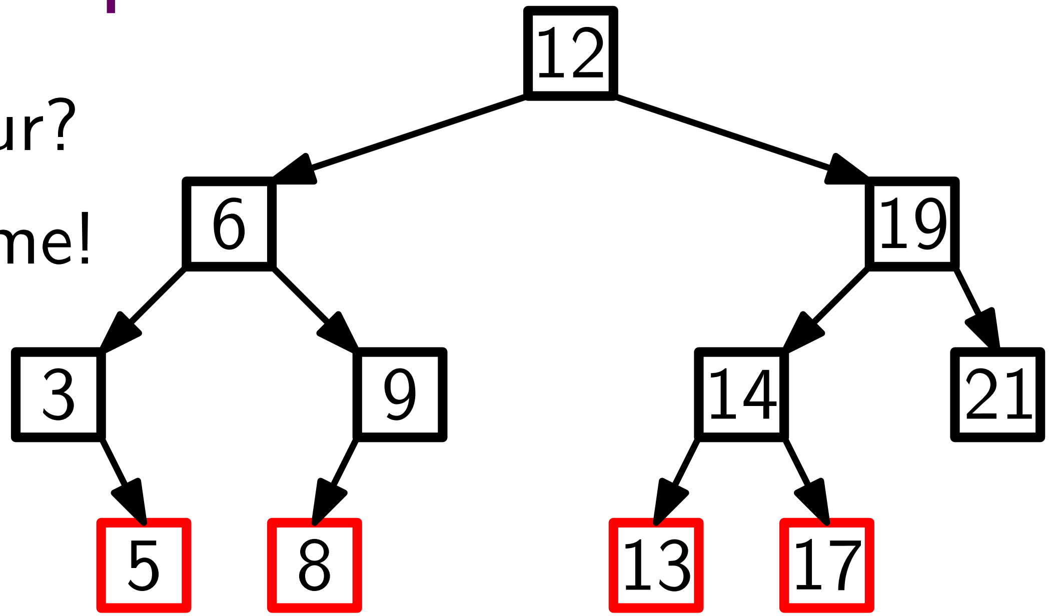
- das $i$.-kleinste Element (z.B. den Median): Elem Select(int $i$)
- den *Rang* eines Elements: int Rank(Elem $e$)

in einer dynamischen Menge bestimmen können.

**Fahrplan:**

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung?
4. Implementiere neue Operationen!

# Das dynamische Auswahlproblem




1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere neue Operationen!

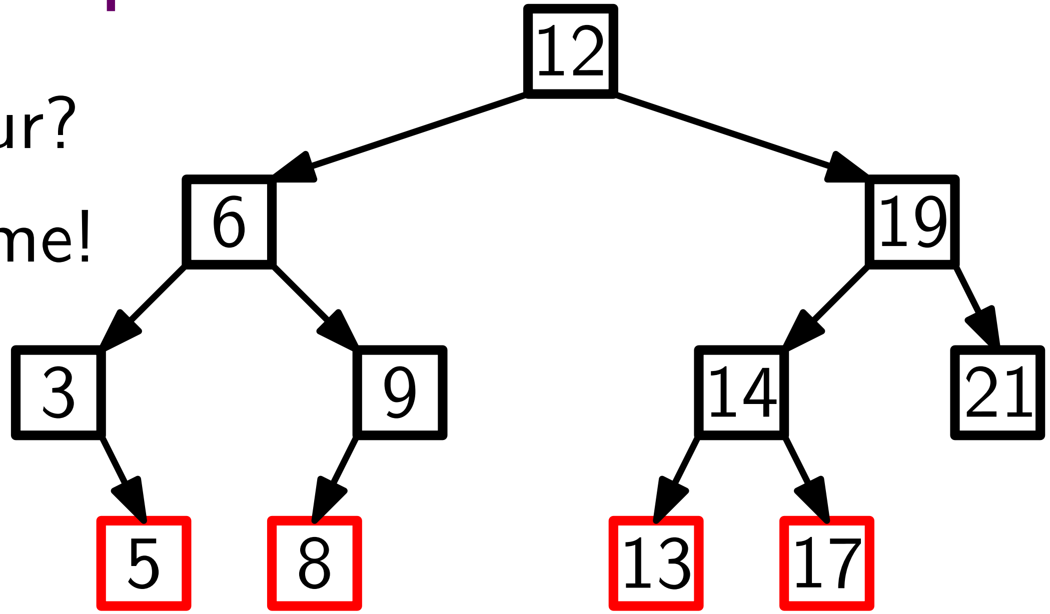
Select(int $i$):

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node $v$):

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

# Das dynamische Auswahlproblem




1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich?

Select(int $i$): $O(i \cdot h)$

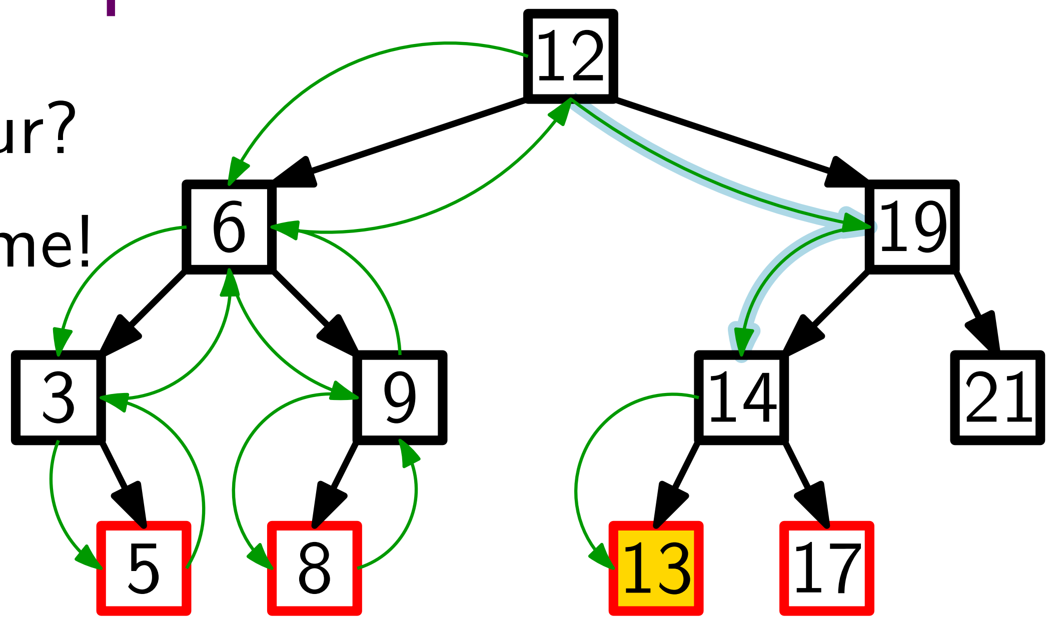
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node $v$): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

# Das dynamische Auswahlproblem

Select(7)




1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit?

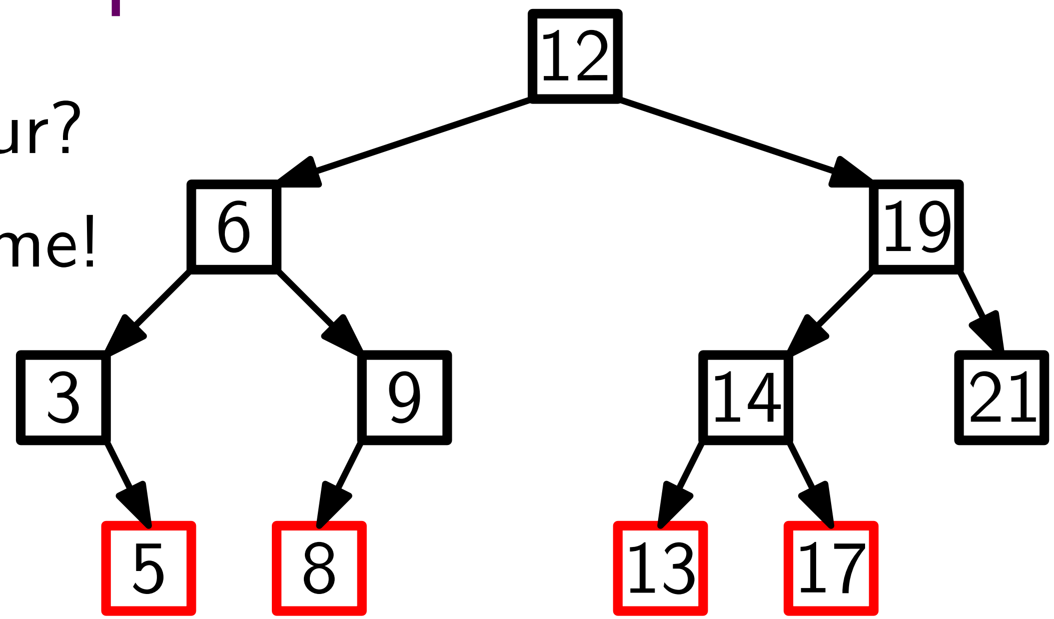
Select(int $i$): $O(\boxed{i} + h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node $v$): $O(rank + h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

# Das dynamische Auswahlproblem

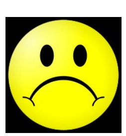



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

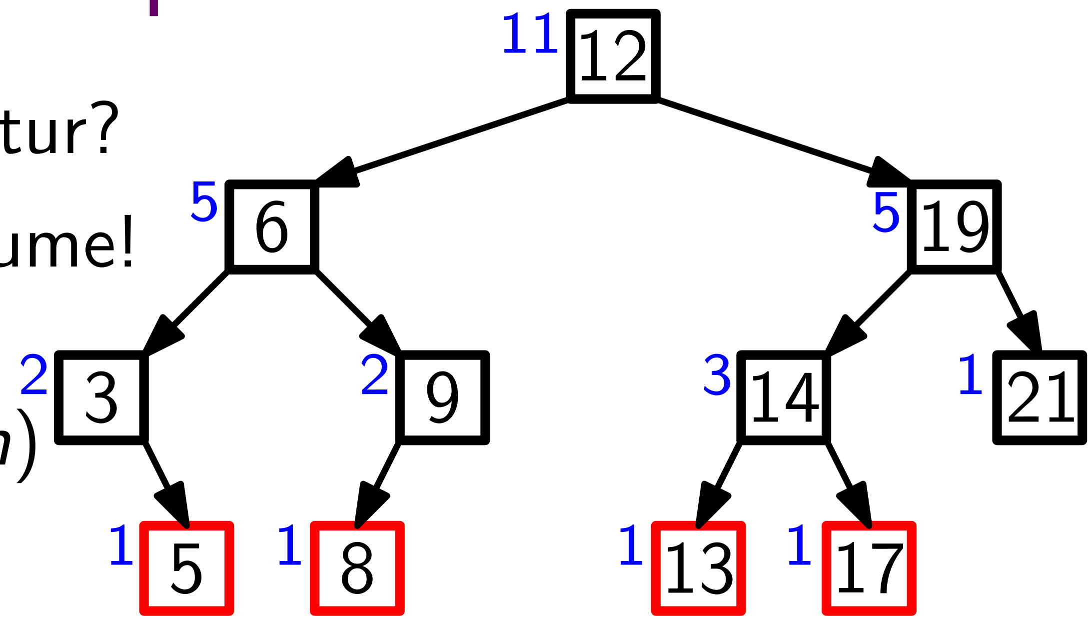
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit?
   Select(int $i$): $O(i + h)$ Rank(Node $v$): $O(\mathit{rank} + h)$

*Problem:* Wenn $i \in \Theta(n)$ – z.B. beim Median –,
dann ist die Laufzeit linear (wie im statischen Fall!).



# Das dynamische Auswahlproblem




1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   – Größen der Teilbäume: für jeden Knoten $v$, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int $i$): $O(h)$

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node $v$): $O(h)$

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

# Korrektheit von Rank()

**Invariante:** Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist $r$ der $\underbrace{\text{Rang von } v \text{ im Teilbaum mit Wurzel } u}_{u\text{-Rang von } v}$.

*1.) Initialisierung*

Vor 1. Iteration gilt $u = v \Rightarrow u\text{-Rang}(v) = v.\mathit{left}.\mathit{size} + 1$. ✓

Rank(Node $v$):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.\mathit{nil}.\mathit{size} = 0$)

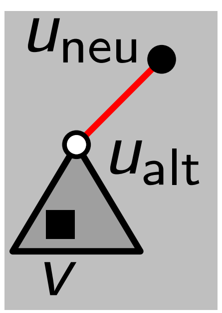
# Korrektheit von Rank()

**Invariante:** Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist $r$ der $\underbrace{\text{Rang von } v \text{ im Teilbaum mit Wurzel } u}_{u\text{-Rang von } v}$.

*1.) Initialisierung* ✓

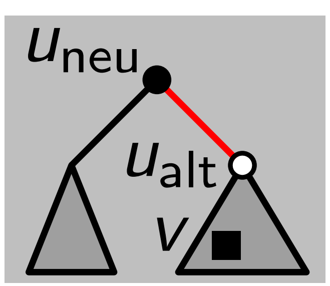
*2.) Aufrechterhaltung* ✓

Annahme: Inv. galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Inv. gilt dann auch am Ende der aktuellen Iter.




1. Fall: $u$ war linkes Kind.
   $\Rightarrow$ $u$-Rang von $v$ bleibt gleich.

2. Fall: $u$ war rechtes Kind.
   $\Rightarrow$ $u$-Rang von $v$ erhöht sich um Größe des li. Teilbaums von $u$ plus 1 (für $u$ selbst).




Rank(Node $v$):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r      (vorausgesetzt, dass T.nil.size = 0)
```

# Korrektheit von Rank()

**Invariante:** Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist $r$ der $\underbrace{\text{Rang von } v \text{ im Teilbaum mit Wurzel } u}_{u\text{-Rang von } v}$.

*1.) Initialisierung* ✓

*2.) Aufrechterhaltung* ✓

*3.) Terminierung* ✓

Bei Schleifenabbruch: $u = root$.
$\Rightarrow r = u\text{-Rang}(v) = \text{Rang}(v)$.

**Zusammenfassung:**

Die Methode Rank() liefert wie gewünscht den Rang des übergebenen Knotens.

Rank(Node $v$):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

# 3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

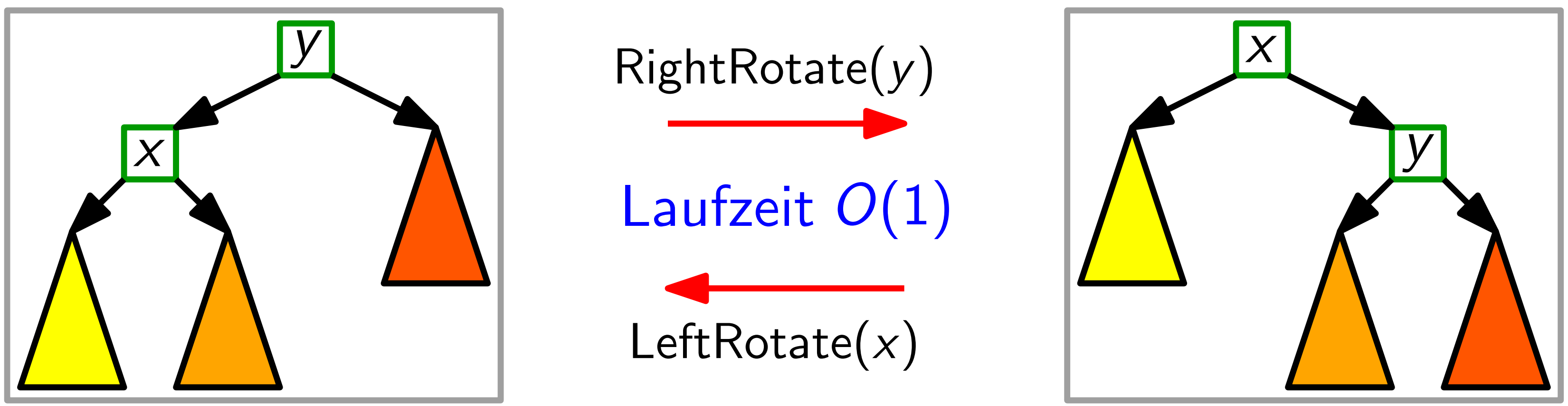
zusätzliche Laufzeit fürs Einfügen: $O(h)$

**Phase I**: Suche der Stelle, wo der neue Knoten $z$ eingefügt wird.

Laufzeit $O(h)$

*Für alle Knoten $v$ auf dem Weg von der Wurzel zu $z$:*
Erhöhe $v.size$ um 1.

**Phase II** (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in $\leq 2$ *Rotationen*:




Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node $y$) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

[RBDelete() kann man analog „upgraden“.]

# Ergebnis

**Satz.** Das dynamische Auswahlproblem kann man so lösen, dass Select() und Rank() sowie alle gewöhnlichen Operationen für dynamische Mengen in einer Menge von $n$ Elementen in $O(\log n)$ Zeit laufen.

# Verallgemeinerung

**Satz.** Sei $f$ Knotenattribut eines R-S-Baums mit $n$ Knoten.

Falls für jeden Knoten $v$ gilt:

$f(v)$ lässt sich aus Information in $v$, $v.\mathit{left}$, $v.\mathit{right}$ (inklusive $f(v.\mathit{left})$ und $f(v.\mathit{right})$) berechnen.

$$\Downarrow$$

Dann kann man beim Einfügen und Löschen einzelner Knoten den Wert von $f$ in allen Knoten aufrechterhalten, ohne die asymptotischen Laufzeit $O(\log n)$ der Update-Operationen zu verändern.

*Beweisidee.* Im Prinzip wie im Spezialfall $f \equiv \mathit{size}$.

Allerdings ist es im Prinzip möglich, dass sich die Veränderungen von einem gewissen veränderten Knoten bis in die Wurzel hochpropagieren. [Details Kapitel 14.2, CLRS]

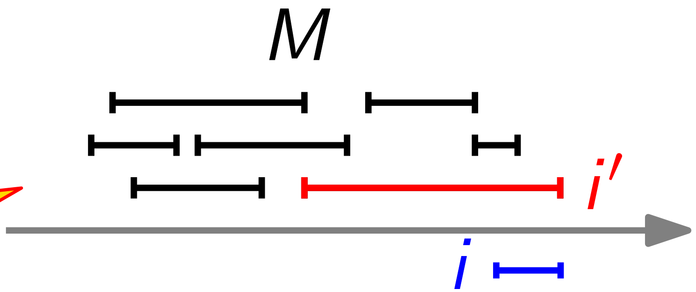
# Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

## Intervall-Baum

verwaltet eine Menge $M$ von Intervallen und bietet Operationen:

- Element Insert(Interval $i$)
- Delete(Element $e$)
- Element Search(Interval $i$)


liefert ein Element mit Interval $i' \in M$ mit $i \cap i' \neq \emptyset$, falls ein solches existiert, sonst $nil$.

Bitte lesen Sie's und stellen Sie Fragen...