Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2018/19

13. Vorlesung

Binäre Suchbäume

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Zwischentest II: Do, 20. Dez, 8:30 – 10:00

- Zufallsexperimente, (Indikator-) Zufallsvariable, Erwartungswert
- (Randomisiertes) QuickSort
- Untere Schranke für WC-Laufzeit von vergleichsbasierten Sortierverfahren
- Linearzeit-Sortierverfahren
- Auswahlproblem (Median)
- Elementare Datenstrukturen
- Hashing
- Binäre Suchbäume

Anmeldung: ab sofort, aber nur bis zum **18.12.**

Dynamische Menge

verwaltet Elemente einer
sich ändernden Menge M

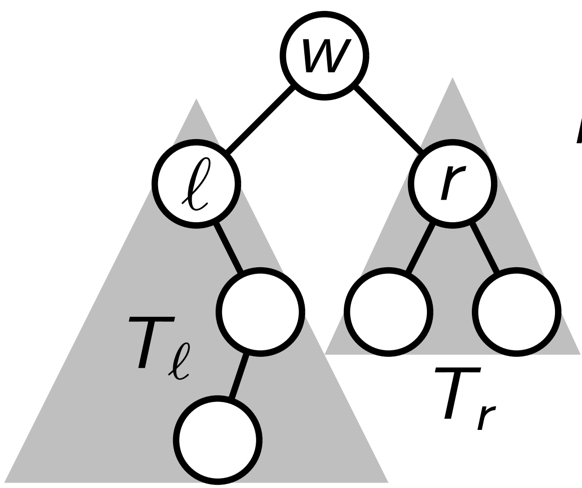
Abstrakter Datentyp	*Funktionalität*	
ptr Insert(key k, info i)	Änderungen	**Wörterbuch**
Delete(ptr x)	Änderungen	**Wörterbuch**
ptr Search(key k)	Anfragen	**Wörterbuch**
ptr Minimum()	Anfragen	
ptr Maximum()	Anfragen	
ptr Predecessor(ptr x)	Anfragen	
ptr Successor(ptr x)	Anfragen	

Implementierung: je nachdem...

Implementierung

*) *unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^{\star}$	$\Theta(1)^{\star}$	–	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



$$h(T) = \text{Höhe des Baums } T$$
$$= \text{Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{falls Baum} = \text{Blatt} \\ 1 + \max\{h(T_\ell), h(T_r)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$^{\oplus}$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Suche im sortierten Feld

2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27

Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte

Suche im sortierten Feld

2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27

Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq T(1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

Übung! $= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n+1) \rceil$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

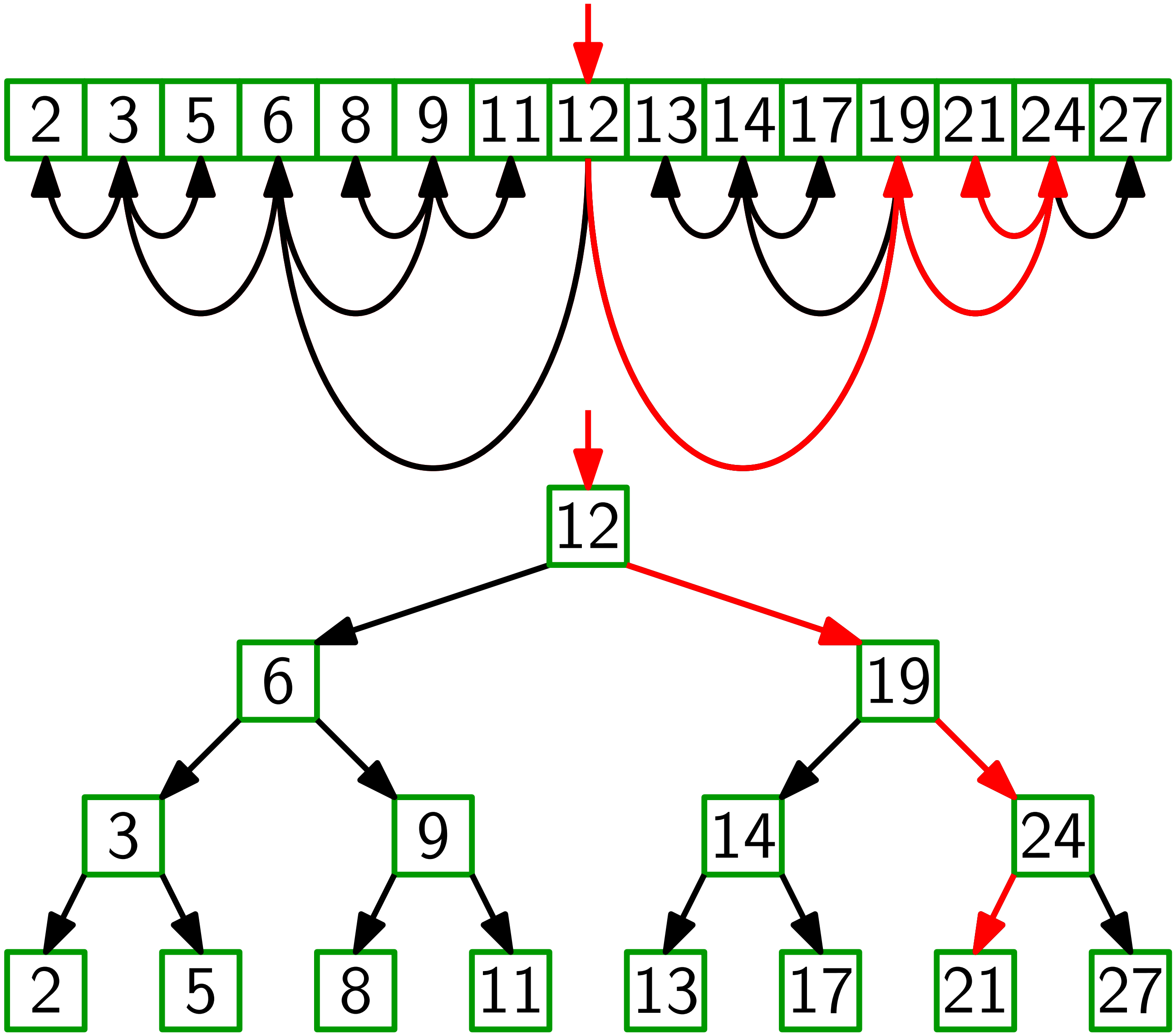
2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27

Suche 21!

	hier	*im Worst Case*		$\approx$ 1 Mio.
Lineare Suche:	13	n	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

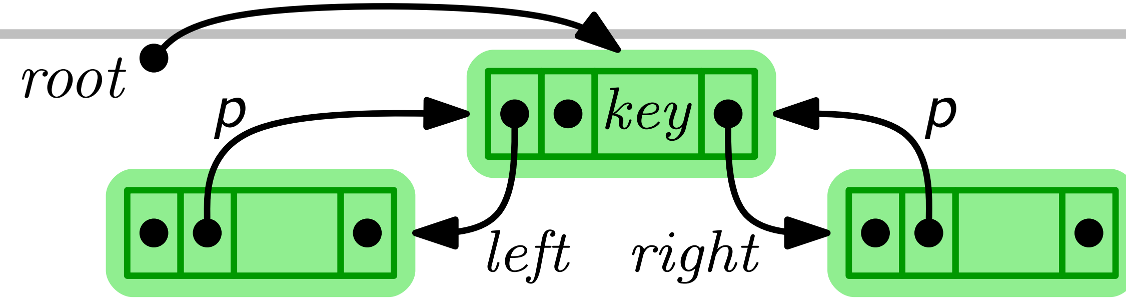


Suche 21!

Binärer Suchbaum

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft: Für jeden Knoten v gilt:
alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$
rechten $\geq$

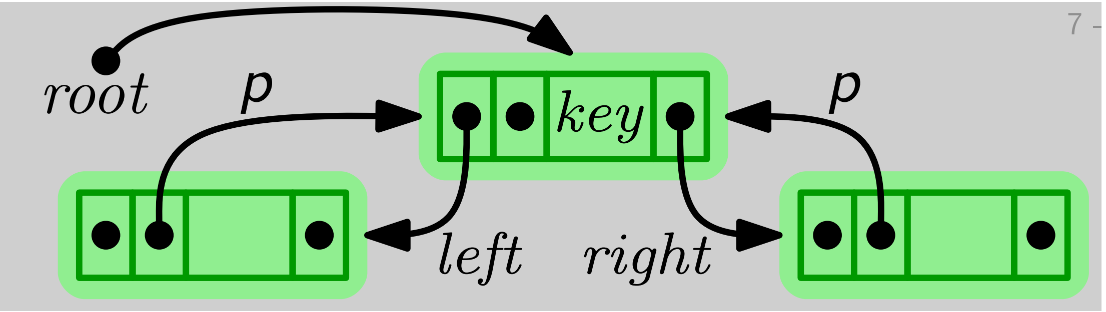
Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp	**Implementierung**		
BinSearchTree()	$root = nil$	Node(key k, Node par) $key = k$ $p = par$ $right = left = nil$ Node $root$	Node key key Node $left$ Node $right$ Node p
Node Search(key k)			
Node Insert(key k) Delete(Node x)			
Node Minimum() Node Maximum()			
Node Predecessor(Nd. x) Node Successor(Node x)			

To do!

Inorder-Traversierung



(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung:
1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

Code:

InorderTreeWalk(Node $x = root$)
  if $x \neq nil$ **then**
    InorderTreeWalk($x.left$)
    gib $x.key$ aus
    InorderTreeWalk($x.right$)

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.
Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.
Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.
T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. *[rekursive Def. der Höhe!]*
Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft $\Rightarrow$
Ausgabe (sortierte Schlüssel von T_{links}, dann $root.key$, dann sortierte Schlüssel von T_{rechts}) ist sortiert. ✓

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - \mathbf{1}$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n \;\; \mathbf{-1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\#\text{Kanten} = \#\text{Knoten} - 1 = n - 1$

Übung: zeig's mit Induktion!

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n \; \mathbf{-\,1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\#\text{Kanten} = \#\text{Knoten} - 1 = n - 1$

$\Rightarrow T(n) = c_1 \cdot (n-1) + c_2 \cdot n \in O(n)$.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
      InorderTreeWalk(x.left)
      gib x.key aus
      InorderTreeWalk(x.right)
```

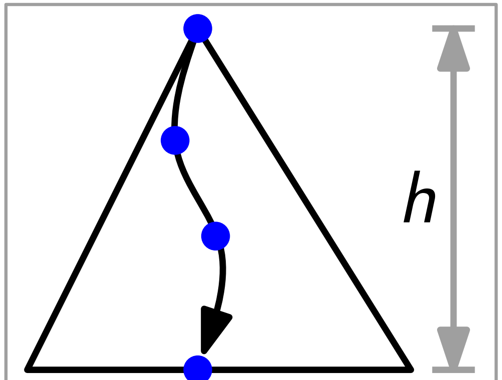
Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

Node Search(key k, Node $x = root$)

- **if** $x == nil$ **or** $x.key == k$ **then**
  - **return** x
- **if** $k < x.key$ **then**
  - **return** Search($k, x.left$)
- **else** **return** Search($k, x.right$)



Laufzeit: $O(h)$

iterativ

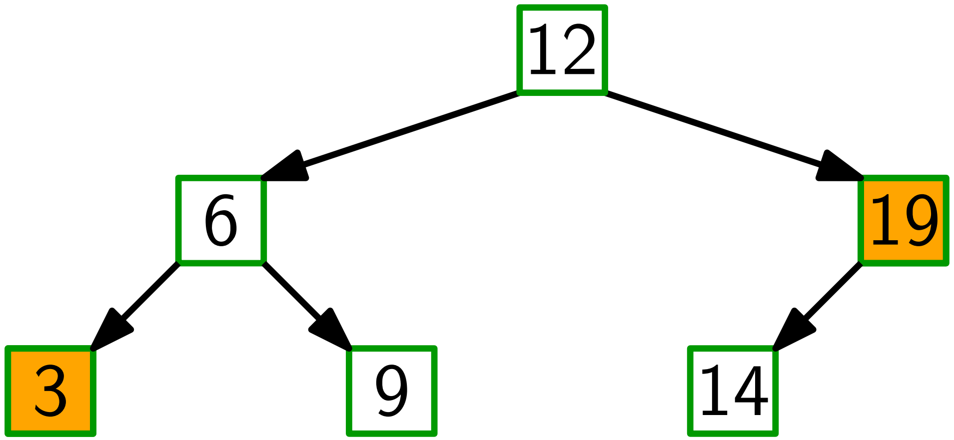
- **while** $x \neq nil$ **and** $x.key \neq k$ **do**
  - **if** $k < x.key$ **then**
    - $x = x.left$
  - **else** $x = x.right$
- **return** x

Laufzeit: $O(h)$

Trotzdem schneller, da keine Verwaltung der rekursiven Methodenaufrufe.

Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binäre-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



Antwort: Min steht ganz links, Max ganz rechts!

Aufgabe: Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

Node Minimum(Node $x = root$) — *iterativ!*

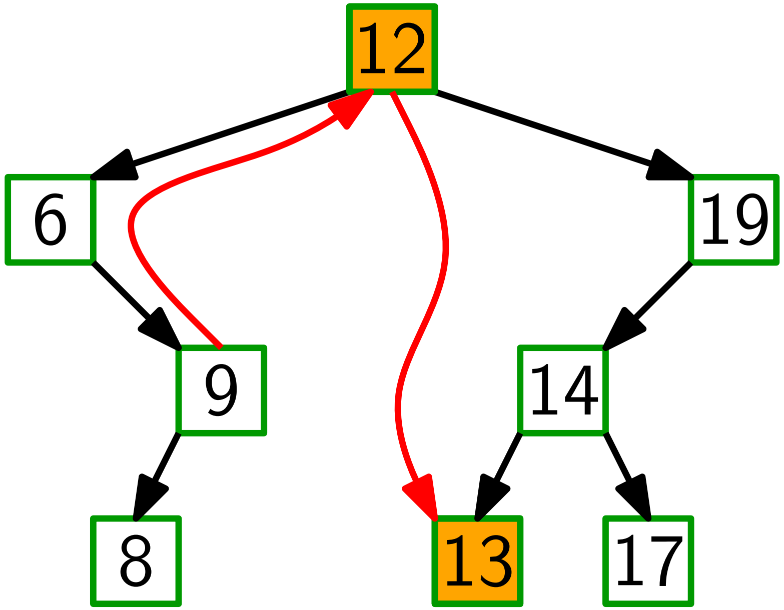
if $x == nil$ **then return** nil
while $x.left \neq nil$ **do**
  $x = x.left$
return x

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Nachfolger(19) $:= nil$

Nachfolger(12) $=$?

Nachfolger(9) $=$?

$13 ==$ Minimum(„$12.right$“)

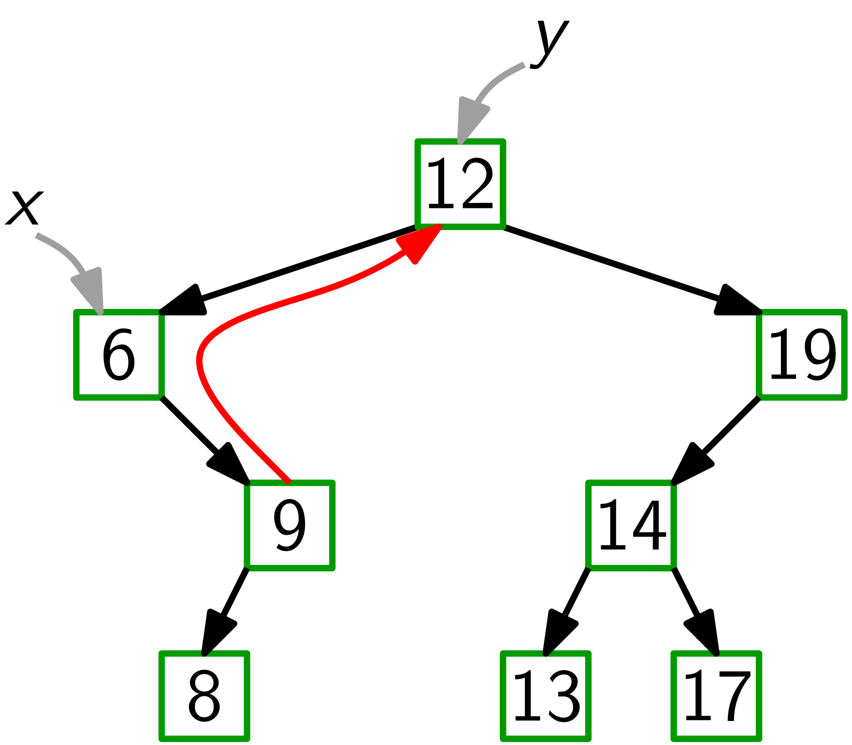
9 hat kein rechtes Kind; $9 ==$ Maximum(„$12.left$“)

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.

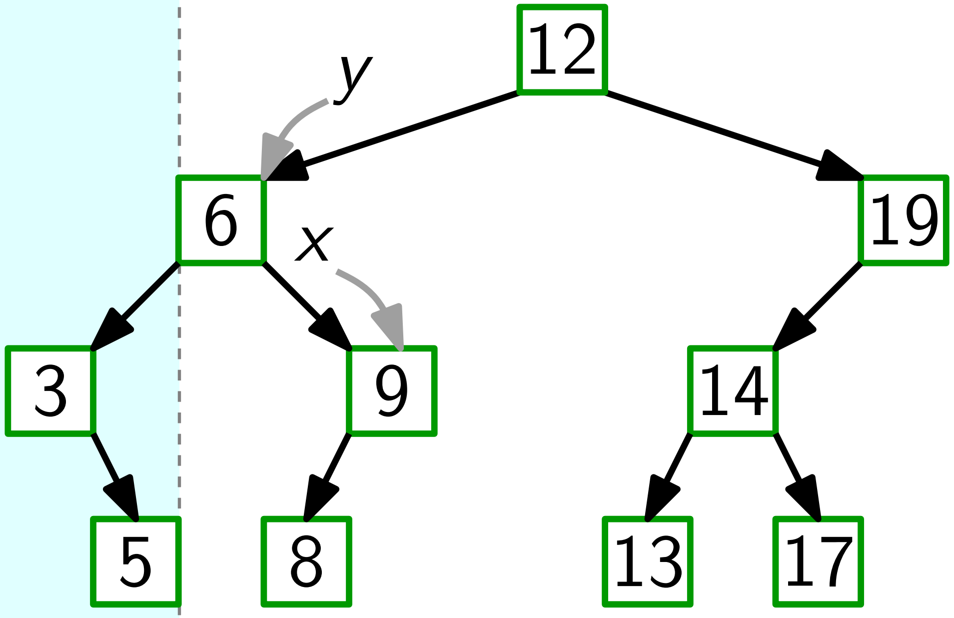


Tipp: Probieren Sie auch z.B. Successor("19")!

```
Node Successor(Node x)
  if x.right ≠ nil then
    return Minimum(x.right)
  y = x.p
  while y ≠ nil and x == y.right do
    x = y
    y = y.p
  return y
```

Einfügen

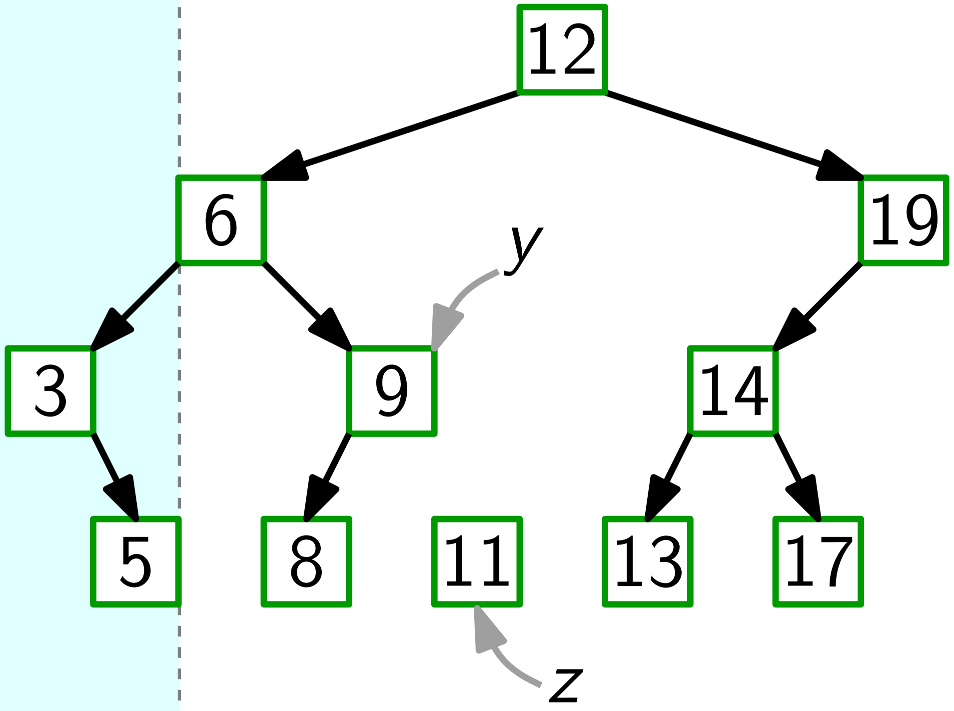
Node Insert(key k)
  $y = nil$
  $x = root$
  while $x \neq nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
      $x = x.left$
    else $x = x.right$



Insert(11)

Einfügen

Node Insert(key k)
  $y = nil$
  $x = root$
  while $x \neq nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
      $x = x.left$
    else $x = x.right$
  $z =$ new Node(k, y)



Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

$y = x$

if $k < x.key$ **then**

$x = x.left$

else $x = x.right$

$z =$ new Node(k, y)

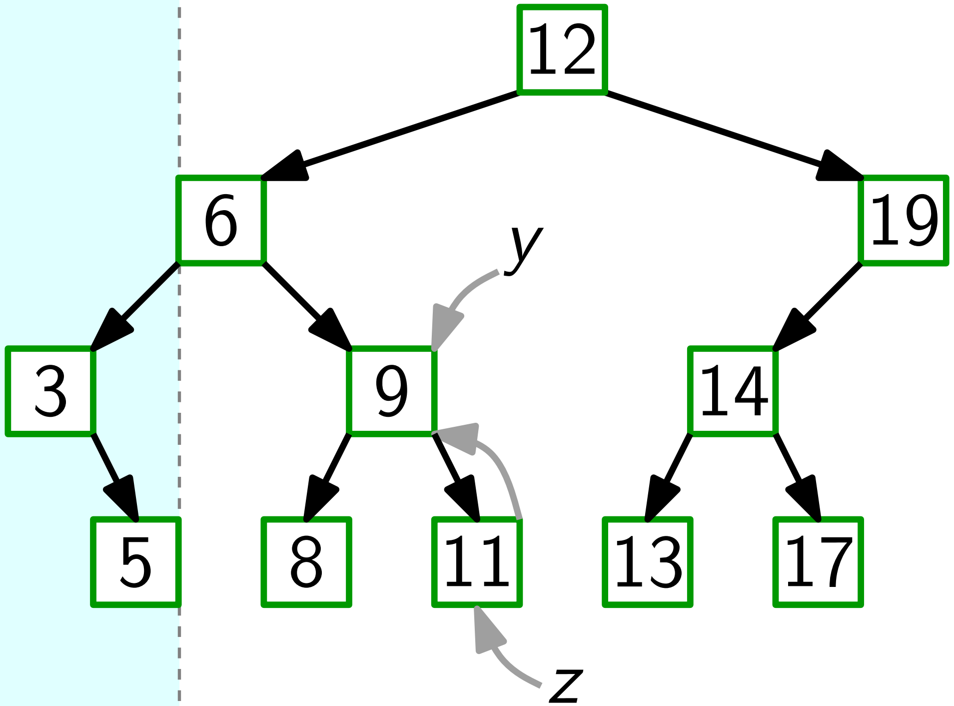
if $y == nil$ **then** $root = z$

else

if $k < y.key$ **then** $y.left = z$

else $y.right = z$

return z



Insert(11)

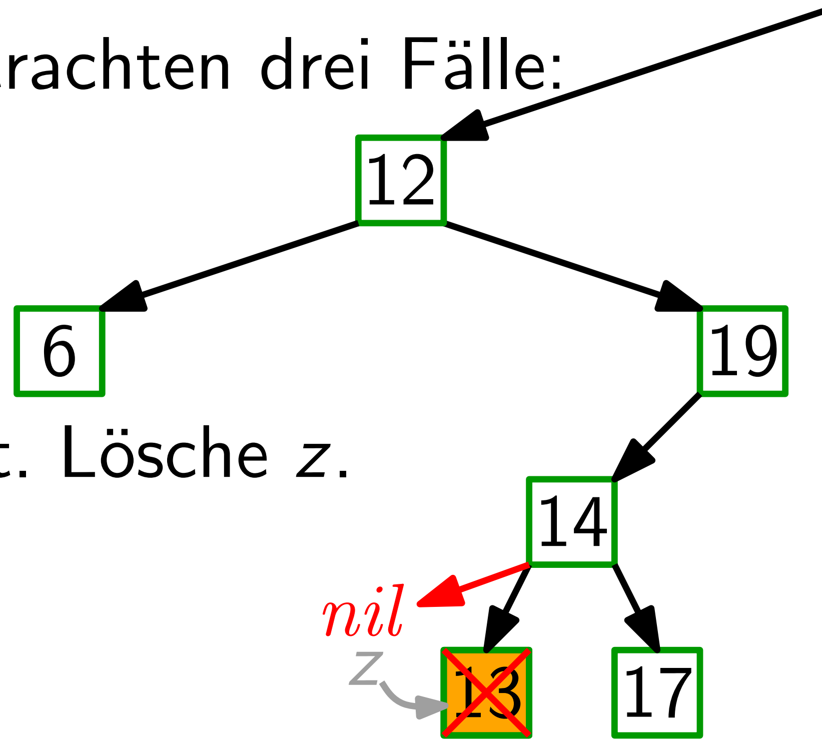
$x == nil$

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.\mathit{left} = \mathit{nil}$; sonst umgekehrt. Lösche z.

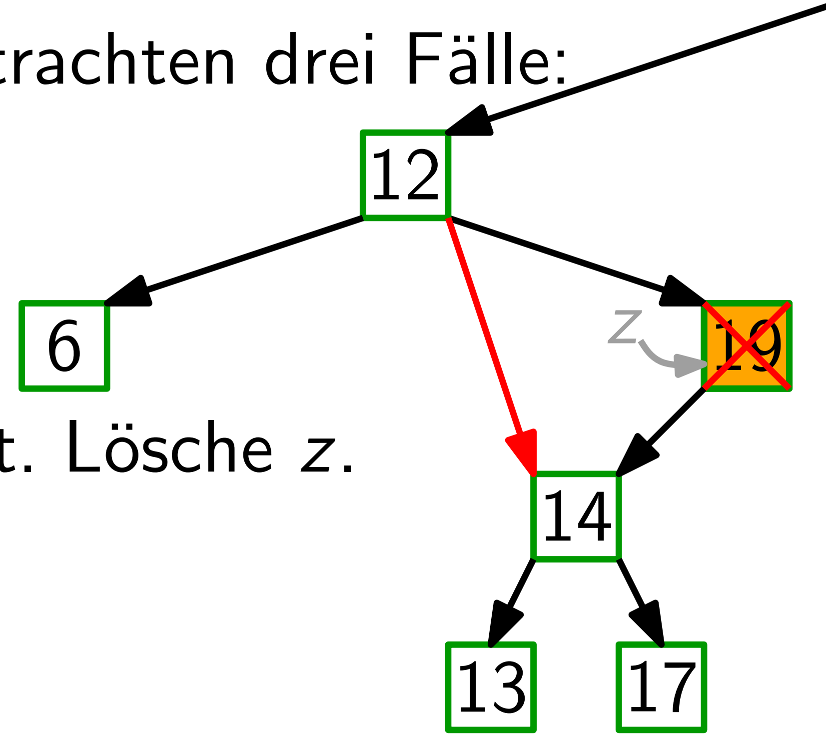


2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

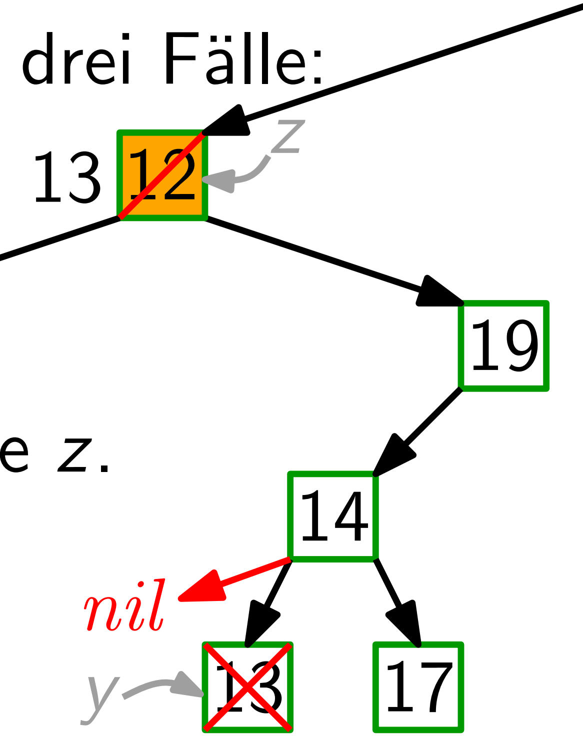
2. z hat ein Kind x.

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.\mathit{left} = \mathit{nil}$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y = \text{Successor}(z)$ und $z.\mathit{key} = y.\mathit{key}$. Lösche y. (Fall 1 oder 2!)

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren* $\Rightarrow$ $h \in O(\log n)$