Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2018/19
6. Vorlesung

Prioritäten setzen

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Heute: Wir „bauen“ eine Datenstruktur

Datenstruktur:

Konzept, mit dem man Daten speichert und anordnet, so dass man sie schnell finden und ändern kann.

Abstrakter Datentyp

beschreibt die „Schnittstelle“ einer Datenstruktur – welche Operationen werden unterstützt?

Implementierung

wie wird die gewünschte Funktionalität realisiert:
– wie sind die Daten gespeichert (Feld, Liste, ...)?
– welche Algorithmen implementieren die Operationen?

Anwendung: Prozesssteuerung

Anwendung: steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

Anforderung:
- Prozesse (mit ihrer Priorität) einfügen
- Prozess mit höchster Priorität finden/löschen
- Priorität von Prozessen erhöhen

↓ *modelliere*

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge M,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge M,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Operation	*Funktionalität*
Insert(element x)	$M = M \cup \{x\}$
element FindMax()	liefere $x \in M$ mit $x.key = \max\{y.key \mid y \in M\}$
element ExtractMax()	$x =$ FindMax(); $M = M \setminus \{x\}$; liefere x
IncreaseKey (element x, priorität p)	$x.key = p$

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

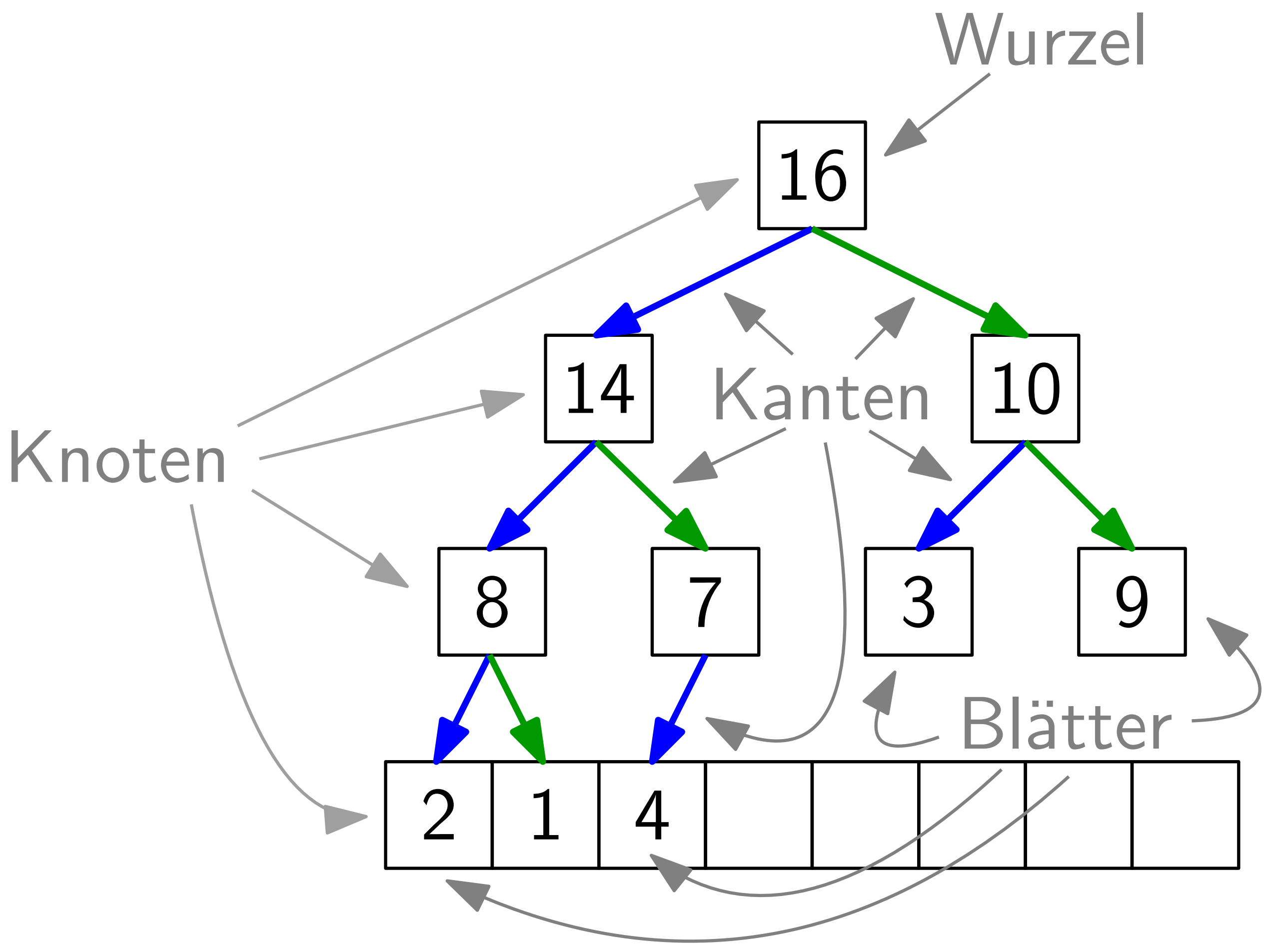
	Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
W-C-Laufzeiten meiner Implement.*	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
heute: Implementierung als Heap (Haufen)	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

Das ist exponentiell besser!

* – Daten werden in einem Feld gespeichert.
– Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
– Maximum wird immer aufrechterhalten.
– Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Achtung: Das Feld bekommt bei einer naiven Implementierung durch ExtractMin im Laufe der Zeit Lücken. Wie kann man das verhindern, ohne Elemente zu verschieben?

Bäume, gut gepackt

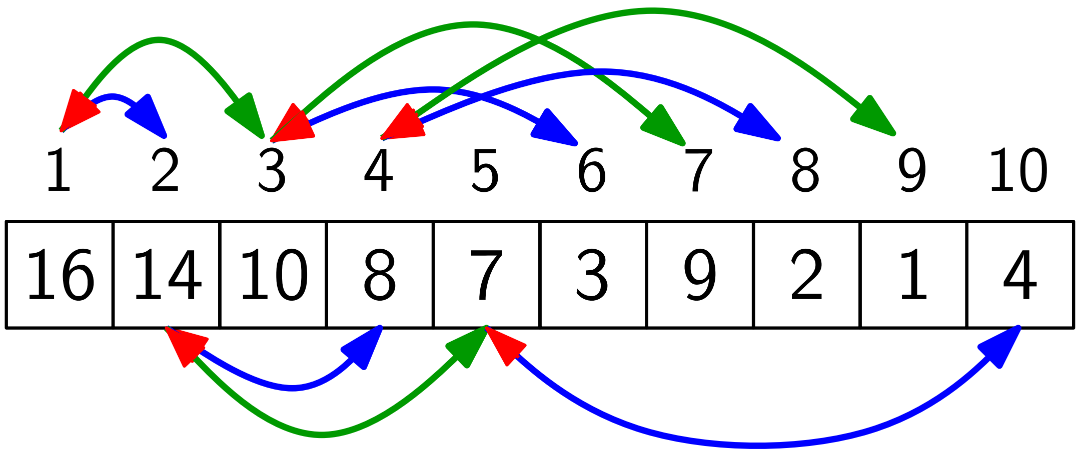


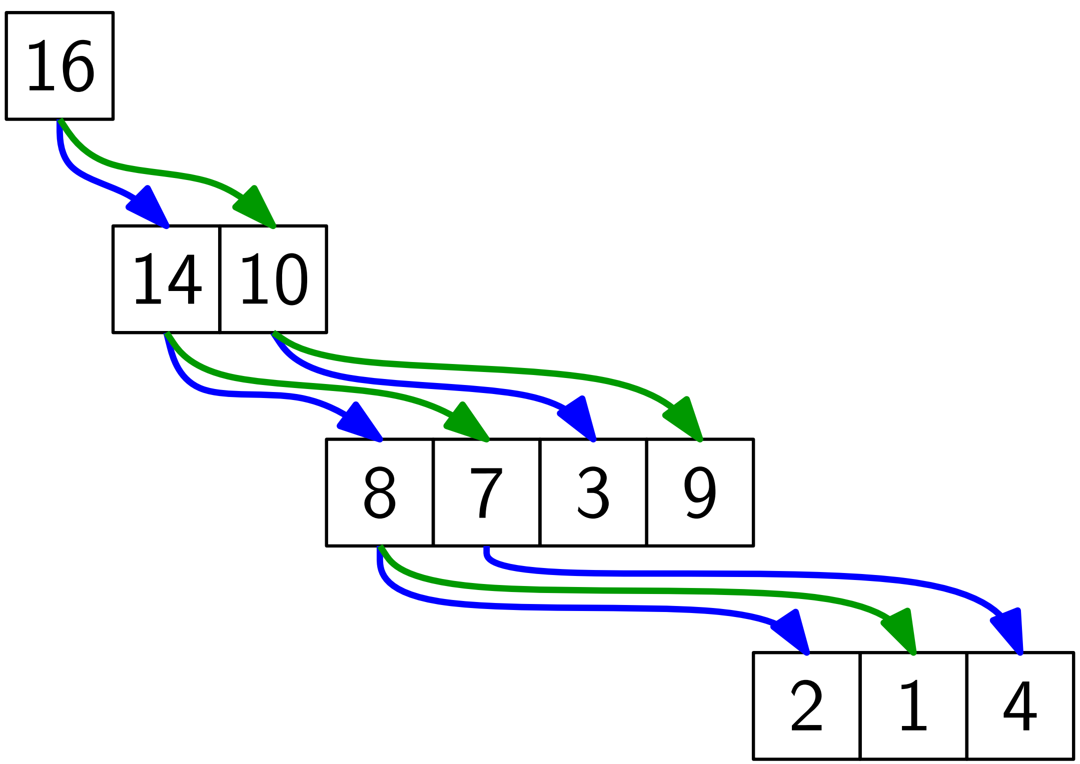
Bäume, gut gepackt

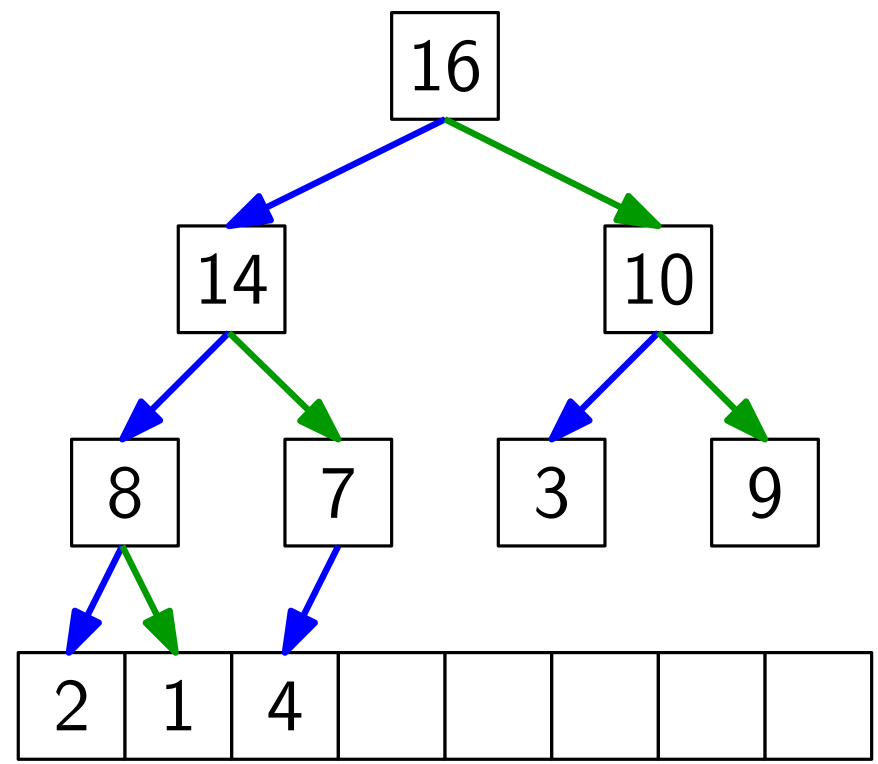
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

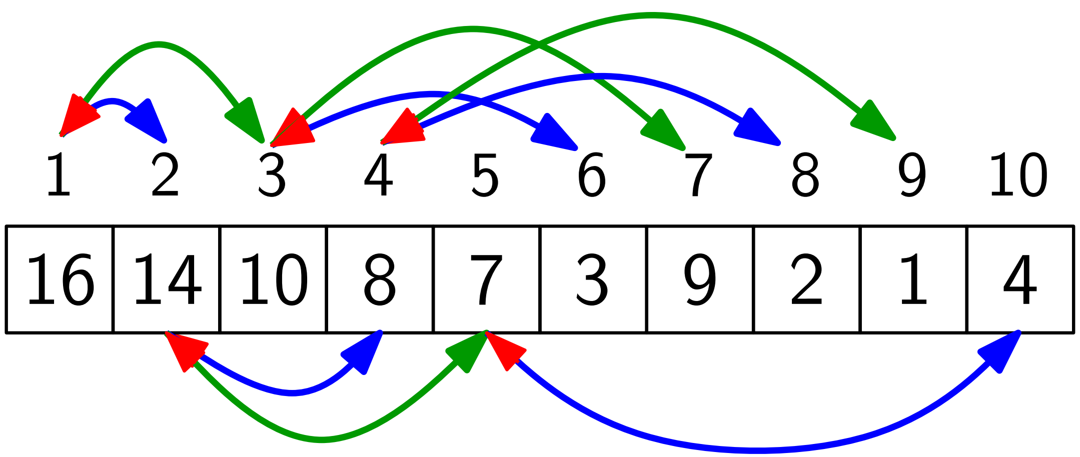
left(index i)	**return**	$2i$
right(index i)	**return**	$2i + 1$
parent(index i)	**return**	$\lfloor i/2 \rfloor$







Bäume, gut gepackt



sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

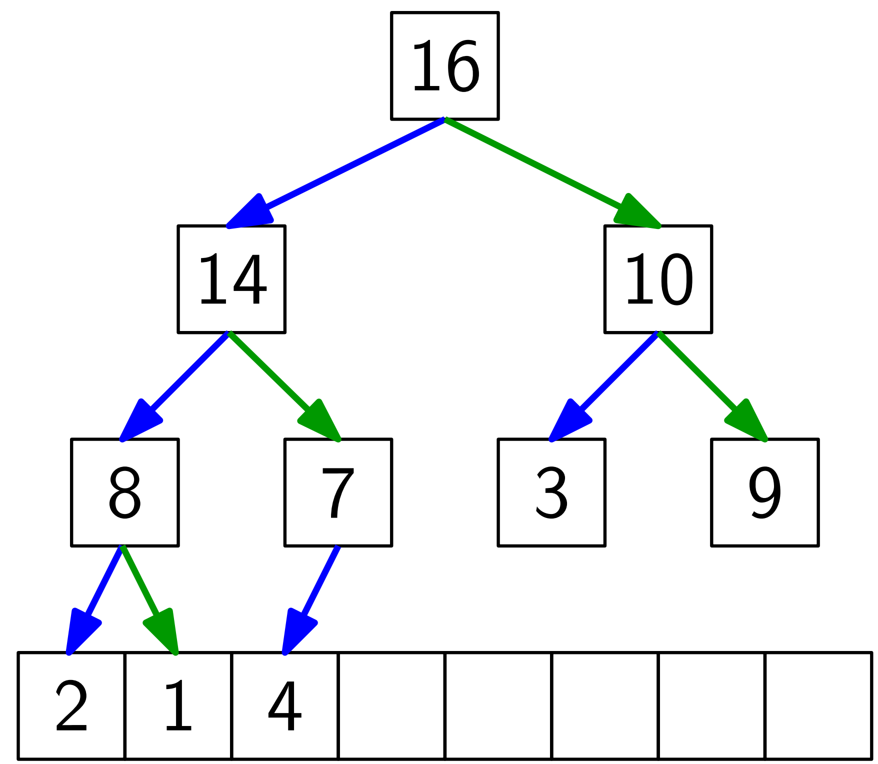
left(index i) **return** $2i$

right(index i) **return** $2i + 1$

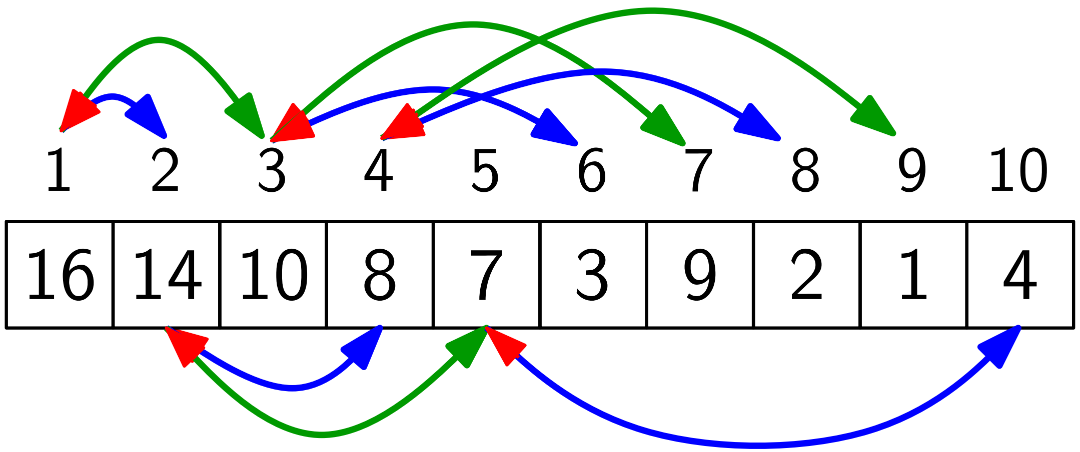
parent(index i) **return** $\lfloor i/2 \rfloor$

Definition:
Ein *Heap* ist ein Feld, das einem binären Baum entspricht, bei dem

- alle Ebenen außer der letzten voll sind,
- die letzte Ebene v.l.n.r. gefüllt ist und
- die *Heap-Eigenschaft* gilt.



Bäume, gut gepackt



sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

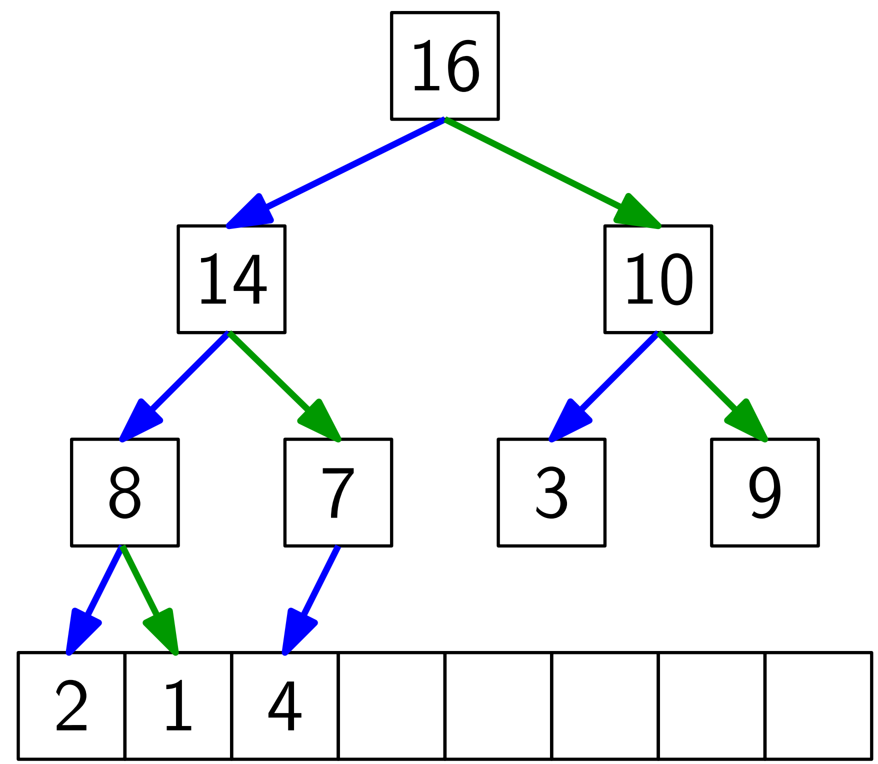
left(index i)	**return**	$2i$
right(index i)	**return**	$2i + 1$
parent(index i)	**return**	$\lfloor i/2 \rfloor$

Definition:
Ein Heap hat die

Max-Heap-Eigenschaft,

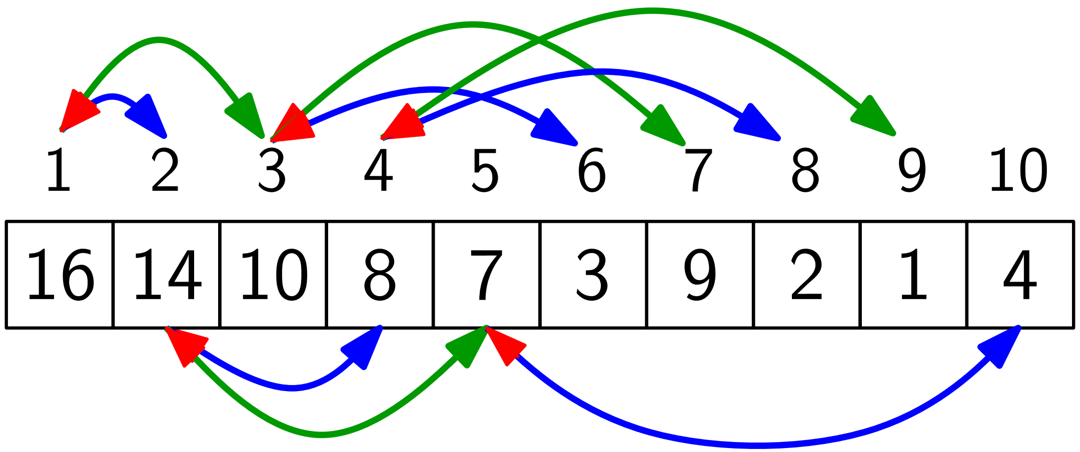
wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:
$A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$.

So ein Heap heißt *Max-Heap*.



Bäume, gut gepackt

sehr schnelle Rechenoperationen!

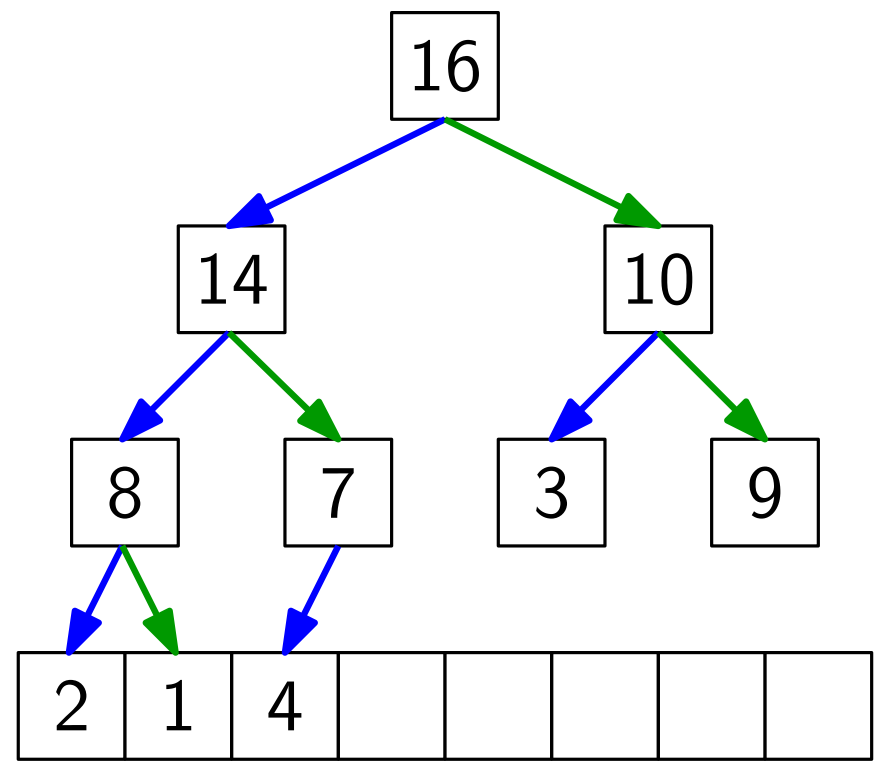


Pfeile implementieren:

left(index i)	**return**	$2i$
right(index i)	**return**	$2i+1$
parent(index i)	**return**	$\lfloor i/2 \rfloor$

Definition:
Ein Heap hat die
Min *~~Max~~-Heap-Eigenschaft*,
wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:
$A[\text{parent}(i)] \cancel{\geq} A[i]$.
$\leq$

So ein Heap heißt *Min* *~~Max~~-Heap*.



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

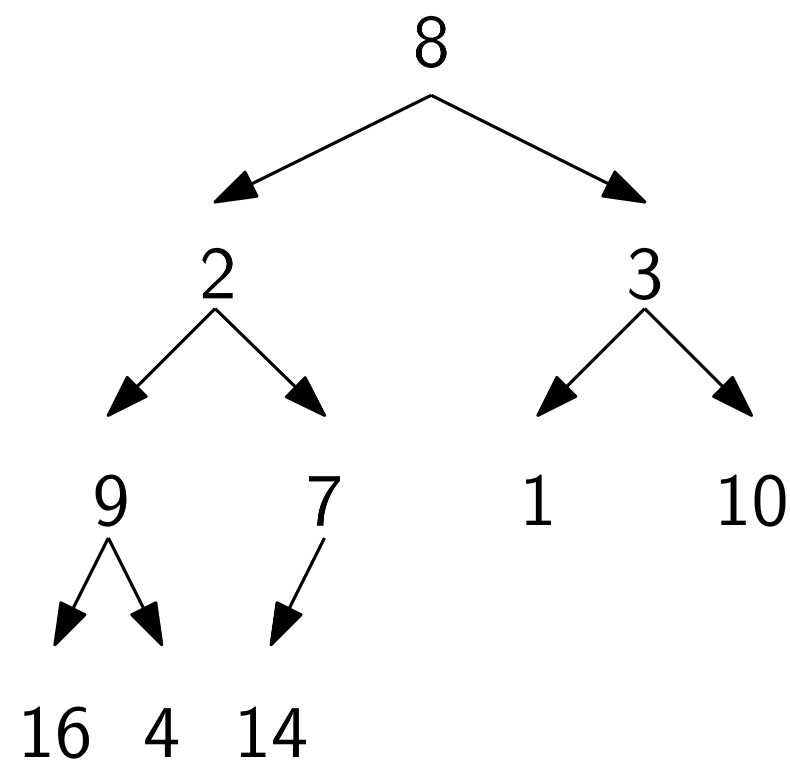
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

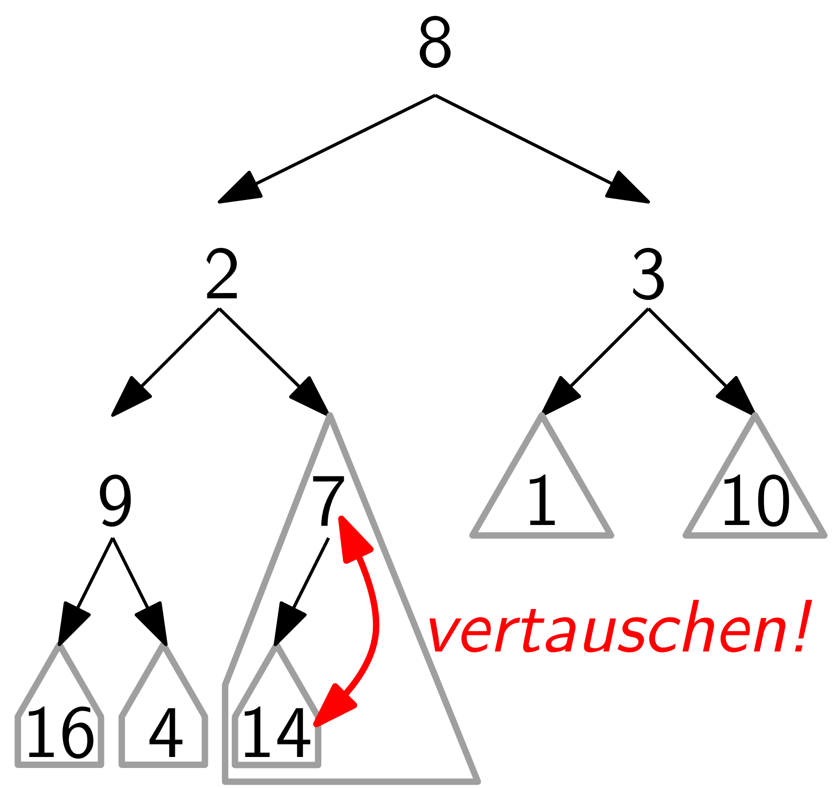
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

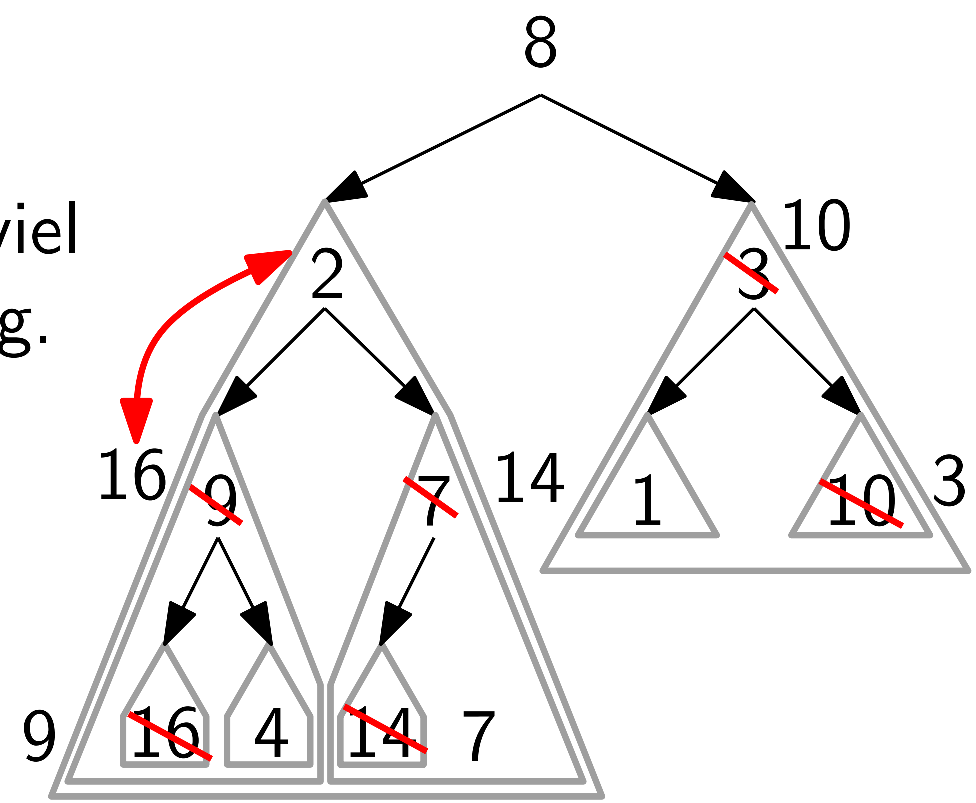
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

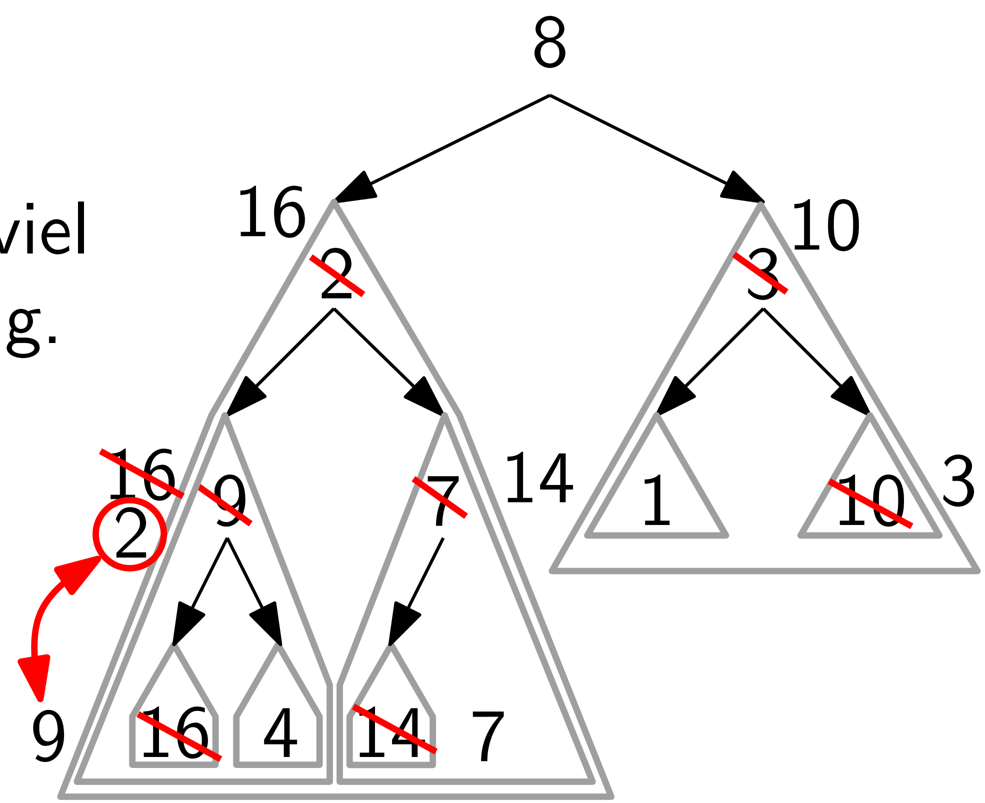
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

$\rightarrow$

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

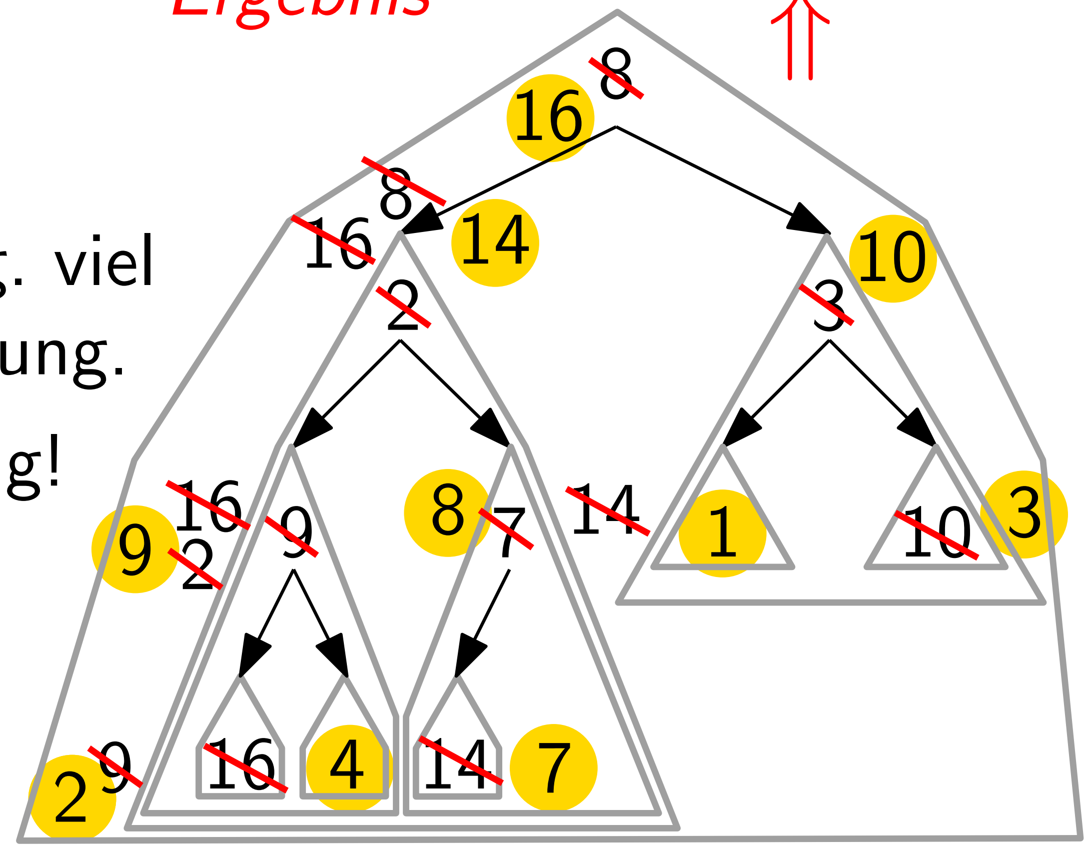
– *Ergebnis* –

$\Uparrow$

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

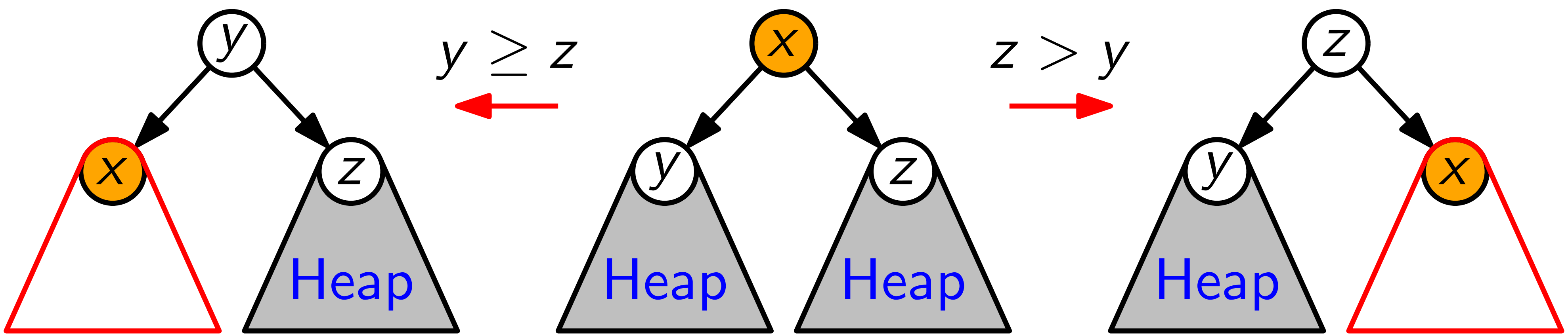
Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Elementaroperation

„Versickere“ x, falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



MaxHeapify(int A[ ], index i)
  $\ell = \text{left}(i)$; $r = \text{right}(i)$
  if $\ell \leq A.\mathit{heap\text{-}size}$ **and** $A[\ell] > A[i]$ **then**
    $\mathit{largest} = \ell$
  else $\mathit{largest} = i$
  if $r \leq A.\mathit{heap\text{-}size}$ **and** $A[r] > A[\mathit{largest}]$
    $\mathit{largest} = r$
  if $\mathit{largest} \neq i$ **then**
    swap(A, i, $\mathit{largest}$)
    MaxHeapify(A, $\mathit{largest}$)

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{\mathrm{MH}}(n, i)$

$:=$ Anzahl der Swaps

$=$ Länge d. Weges v. $A[i]$

$\leq$ Höhe von i im Teilheap mit Wurzel i

$=$ Höhe dieses Teilheaps

Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{\mathrm{MH}}(n,i) \leq$ Höhe des Teilheaps mit Wurzel i

Globale Strategie: *bottom-up*

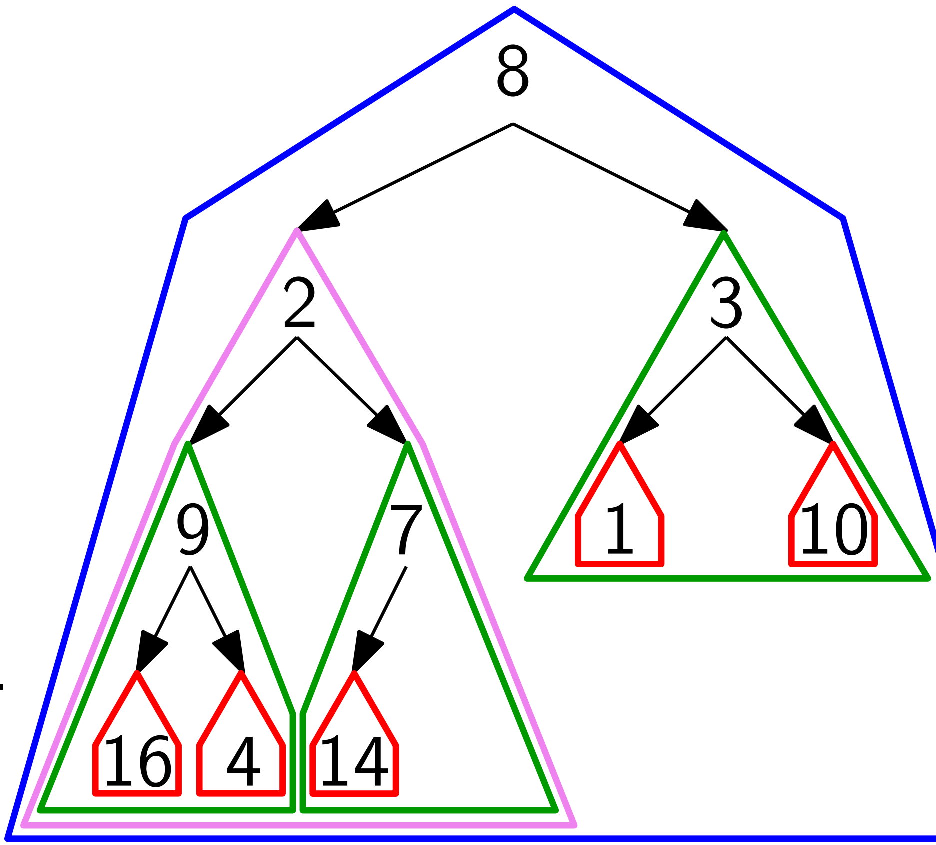
BuildMaxHeap(int[] A)
  $A.heap\text{-}size = A.length$
  for $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$ **downto** 1 **do**
    MaxHeapify(A, i)

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$
genauer: $T_{\mathrm{BMH}}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{\mathrm{MH}}(n,i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \ldots$$

$$= n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+1} \cdot i \quad = ?$$



Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+1} \cancel{\leq} \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\overset{\infty}{\cancel{\lfloor \log n \rfloor}}} i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (falls $|x| < 1$)

ableiten! *ableiten!*

Wir hätten gerne: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g f' - g' f}{g^2}$

$$\Rightarrow \quad T_{\text{BMH}}(n) \leq \tfrac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = n$$

Satz. Ein Heap von n Elementen kann in $\Theta(n)$ Zeit berechnet werden.

Übung Heap-Aufbau

Aufgabe: Bauen Sie einen Heap mit BuildMaxHeap!

1	10	2	7	8	4	3	9	5	6

$\longrightarrow$

BuildMaxHeap(int $A[\,]$)
  $A.heap\text{-}size = A.length$
  for $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$ **downto** 1 **do**
    MaxHeapify(A, i)

MaxHeapify(int $A[\,]$, index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if $\ell \leq A.heap\text{-}size$ **and** $A[\ell] > A[i]$ **then**
    $largest = \ell$
  else $largest = i$
  if $r \leq A.heap\text{-}size$ **and** $A[r] > A[largest]$
    $largest = r$
  if $largest \neq i$ **then**
    swap(A, i, $largest$)
    MaxHeapify(A, $largest$)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

Laufzeiten?

FindMax() $\boxed{O(\quad)}$

return $A[1]$

ExtractMax() $\boxed{O(\quad)}$

if $A.heap\text{-}size < 1$ **then**
  error "Heap underflow"
$max = A[1]$
$A[1] = A[A.heap\text{-}size]$
$A.heap\text{-}size --$
MaxHeapify(A, 1)
return max

IncreaseKey(index i, prio. p) $\boxed{O(\quad)}$

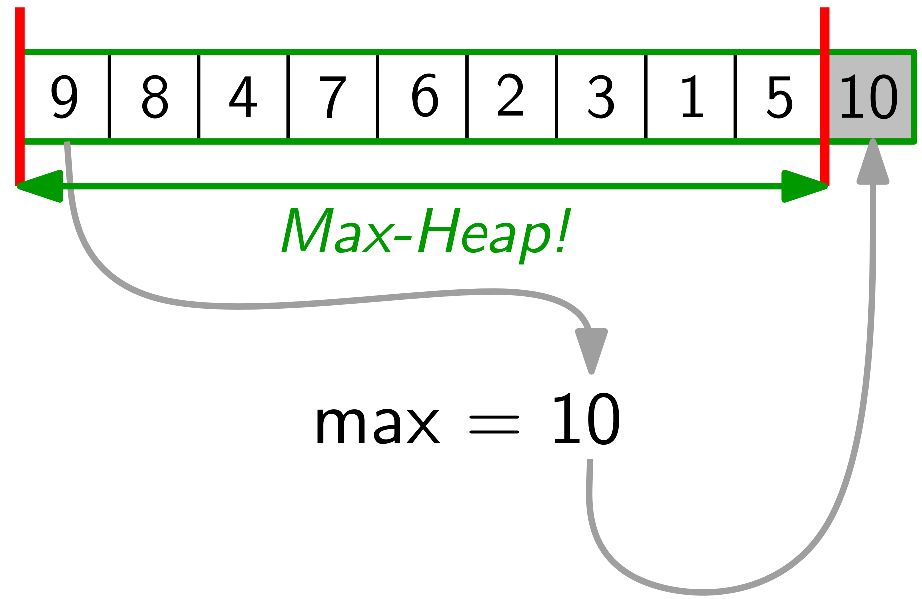
if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"
$A[i] = p$
while $i > 1$ **and** $A[\text{parent}(i)] < A[i]$
  swap(A, i, parent(i))
  $i = \text{parent}(i)$

Insert(priorität p) $\boxed{O(\quad)}$

$A.heap\text{-}size ++$
if $A.heap\text{-}size > A.length$ **then error...**
$A[A.heap\text{-}size] = -\infty$
IncreaseKey($A.heap\text{-}size$, p)

Vom Heap zur Sortierung

Idee:
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.

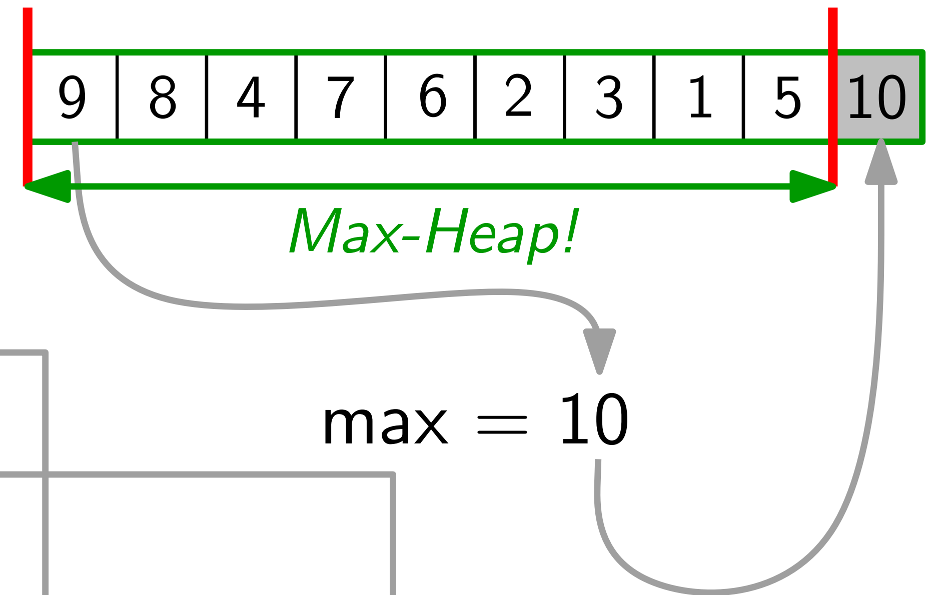


HeapSort(A)

Schreiben *Sie* den Pseudocode.
Verwenden Sie BuildMaxHeap
und ExtractMax.

Vom Heap zur Sortierung

Idee:
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.



HeapSort(A)
  BuildMaxHeap(A)
  for $i = A.length$ **downto** 2 **do**
    $A[i] =$ ExtractMax()

Laufzeit: $T_{\mathrm{HS}}(n) \in O(n) + (n-1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ *Warum?*	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
in situ[1] (*in place*)	✓	✗	✓
stabil[2]	✓	✓	✗

[1]) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

[2]) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenf. belässt.