Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
Lehrstuhl für INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und wissensbasierte Systeme
Institut für Informatik

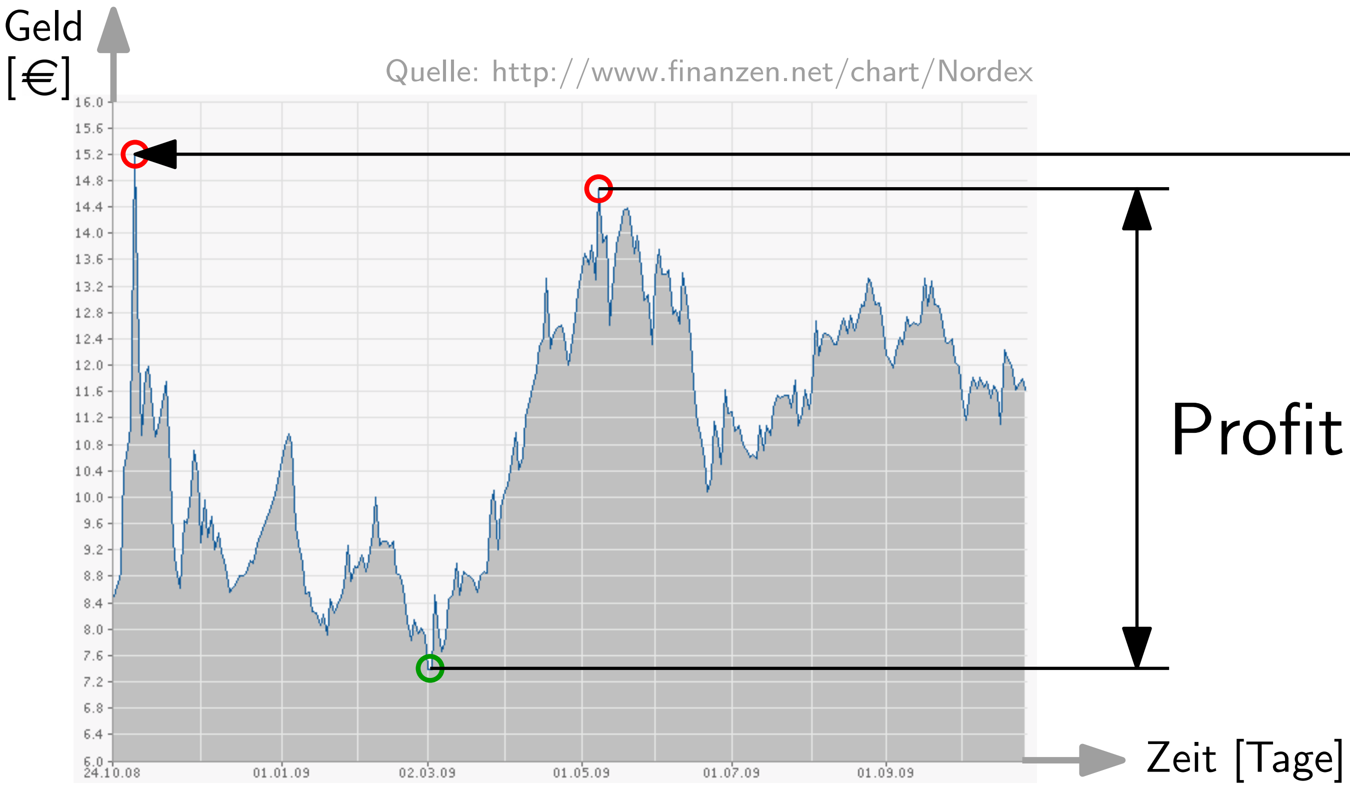
Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2018/19
4. Vorlesung

Laufzeitanalyse – Beispiele

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Analyse von Aktienkursen



Wichtig:
Es genügt *nicht* Minimum und Maximum zu suchen!

Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $\underbrace{A[j] - A[i]}_{\text{Profit pro Aktie}}$ maximal.

Verkaufskurs ($A[j]$)

Einkaufskurs ($A[i]$)

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

} MAX-DIFF

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl erlaubter Paare $=$

$$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \quad = \frac{n^2 - n}{2} \quad \in \Theta(n^2)$$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i, j)}$ berechne $\boxed{\sum_{k=i}^{j} A[k]}$

– gib Maximum zurück

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen

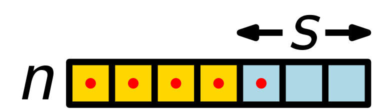
Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)} \cdot \boxed{O(n)} = O(n^3)$

Untere Schranke (Anz. Paare) $= \Omega(n^2)$

Wo ist die Wahrheit?

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$

$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$

$$= \cdots + \underbrace{\frac{3n}{4} \cdot \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} + \cdots + \frac{n}{4} \cdot \frac{3n}{4}}_{\frac{n}{2}+1 \text{ Terme der Größe mindestens } \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4}} + \ldots \quad \in \Omega(n^3)$$

Übung:
Berechnen Sie diese Summe *genau* und beweisen Sie Ihr Ergebnis per Induktion!

$\Rightarrow$ Der Rohe-Gewalt-Alg. läuft in $O(n^3) \cap \Omega(n^3) = \Theta(n^3)$ Zeit.

Can we do better?

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \le i \le j \le n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \dots, n}$

berechne $S_{ii}, \; S_{i,i+1}, \; S_{i,i+2}, \; S_{i,i+3}, \; \dots, \; S_{i,n}$

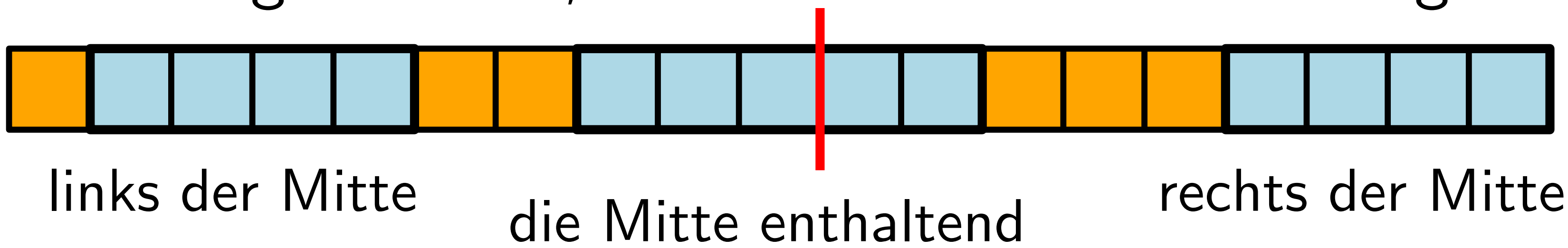
$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad A[n]}_{\boxed{n-i} \text{ Additionen}}$

Insgesamt $\boxed{\sum_{i=1}^{n}} \boxed{n-i} = \sum_{j=n-1}^{0} j = \sum_{j=1}^{n-1} j \in \Theta(n^2)$ Add.

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Einsicht: Wenn die *maximale* Teilsumme die Mitte enthält, dann muss ihr linker Teil (bis zur Mitte) maximal sein *und* dann muss ihr rechter Teil (ab der Mitte) maximal sein.

$\Rightarrow$ Wir können li. u. re. Teil *unabhängig* von einander berechnen!

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then** **return** $(beginn, ende, A[beginn])$	*herrsche* (in kleinen Teilinstanzen)
else	
$mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$	*teile*
$(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, beginn, mitte)$ $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, mitte + 1, ende)$	*herrsche*
$(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) = \text{MaxMittleresTeilfeld}(A, beginn, mitte, ende)$	
return (Tripel mit größter Summe)	*kombiniere*

Laufzeit: $T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$

für $n > 1$: $T_{\mathrm{MT}}(n) = T_{\mathrm{MT}}(\lfloor n/2 \rfloor) + T_{\mathrm{MT}}(\lceil n/2 \rceil) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$

$$\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$$

$$T_{\mathrm{MMT}}(n) = ?$$

Kombiniere

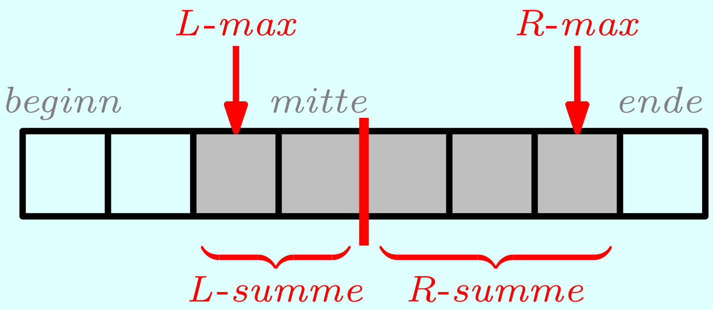
MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**

Vervollständigen Sie den Algorithmus!



$R\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**

// analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit? ✓

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

$mitte - beginn + 1$

$ende - mitte$

$ende - beginn + 1$

$= n$

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\text{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$: $$T_{\text{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + T_{\text{MMT}}(n) = 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + n = V_{\text{MS}}(n) = O(n \log_{\cancel{2}} n)$$ ~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch...

Denn für $a, b \geq 2$ gilt: $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxTeilfeld in $O(n)$ – also in linearer – Zeit!
- Was hat MaxTeilfeld mit Aktienkursanalyse (vom Anfang der VL) zu tun?

Und wenn...? $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (und $T(1) = \Theta(1)$)

Gilt dann auch $T(n) = O(n \log n)$ **?**