Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

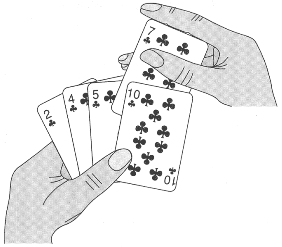
Wintersemester 2018/19

2. Vorlesung

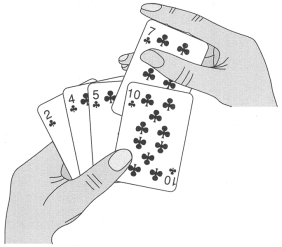
Sortieren mit anderen Mitteln

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I



Teile und herrsche



Idee:

- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Allgemein:

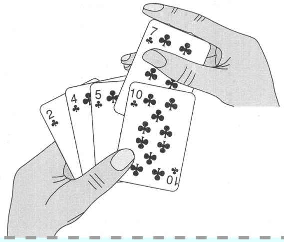
Teile... eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Aufruf einer Funktion durch sich selbst

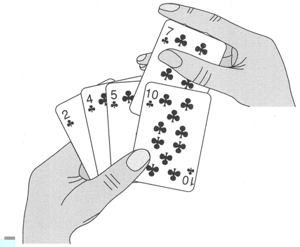
Herrsche... durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere... die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

*) Abb. aus [Corman et al. „Introduction to Algorithms“, MIT Press]



Teile und herrsche



MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

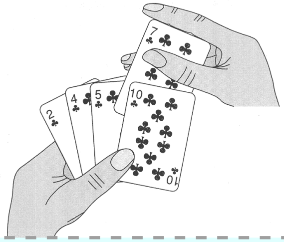
Defaultwerte –

Dadurch wird die Funktion
MergeSort(A) $\equiv$
MergeSort(A, 1, $A.length$)
definiert.

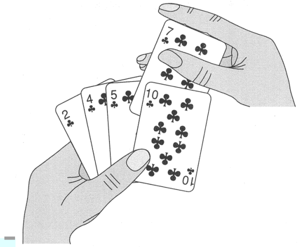
Allgemein:

Teile. . .	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche. . .	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere. . .	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

*) Abb. aus [Corman et al. „Introduction to Algorithms“, MIT Press]



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m + 1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

To do!

Allgemein:

Teile... eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Herrsche... durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere... die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

*) Abb. aus [Corman et al. „Introduction to Algorithms“, MIT Press]

Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

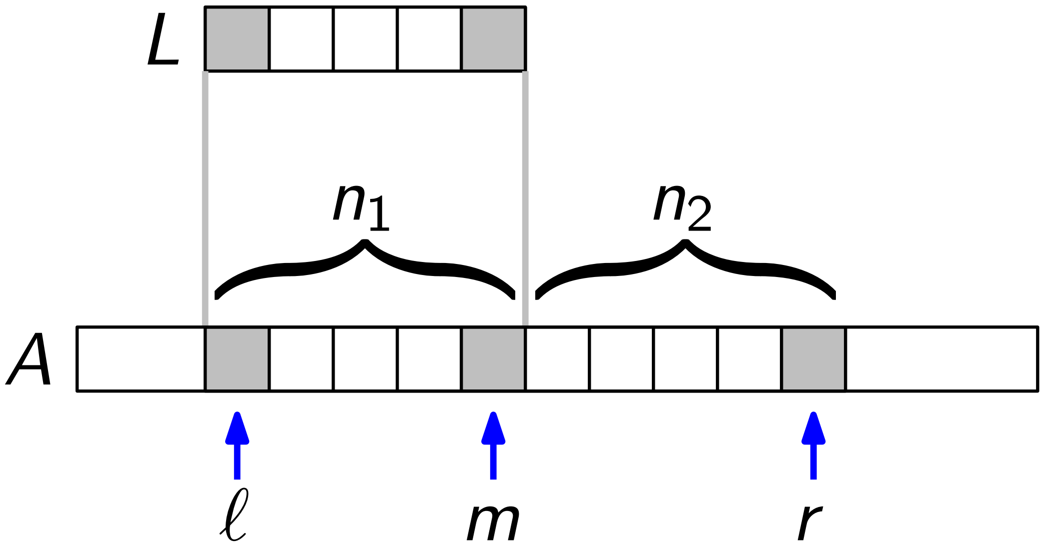
$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ new int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ new int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

for $i = 1$ **to** n_1 **do**

$\quad L[i] = A[(\ell - 1) + i]$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

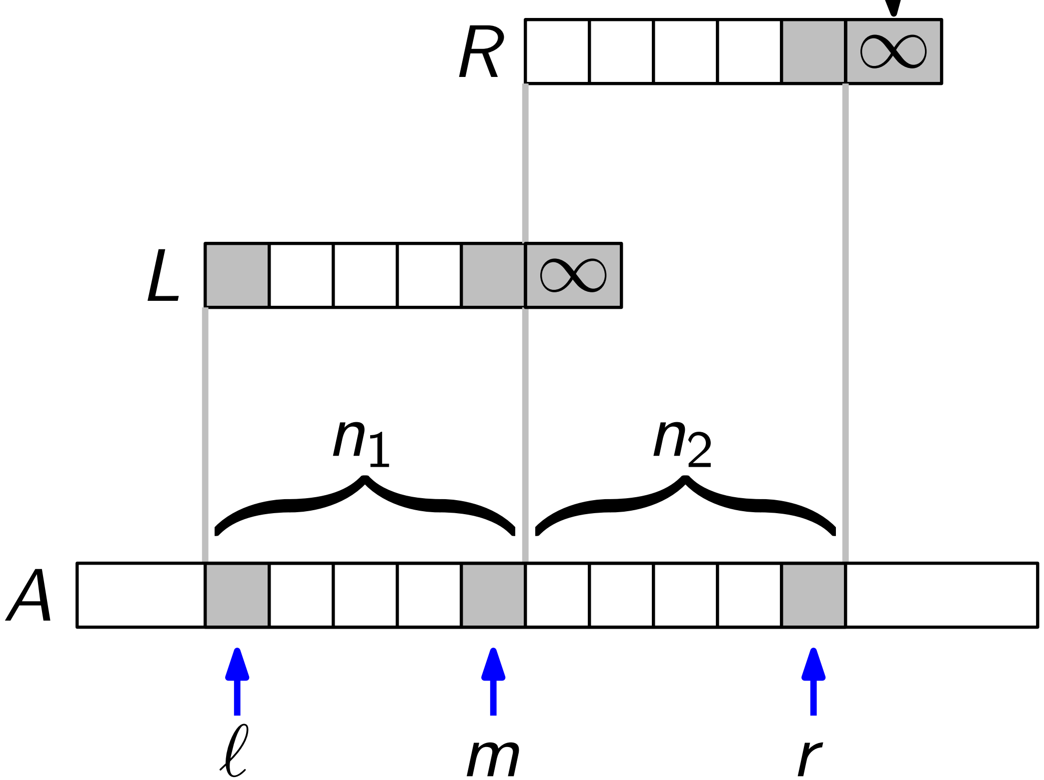
$L =$ new int$[1..n_1+1]$; $R =$ new int$[1..n_2+1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m+1..r]$

$L[n_1+1] = R[n_2+1] = \infty$

Stopper (engl. *sentinel*)



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ new int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ new int$[1..n_2 + 1]$

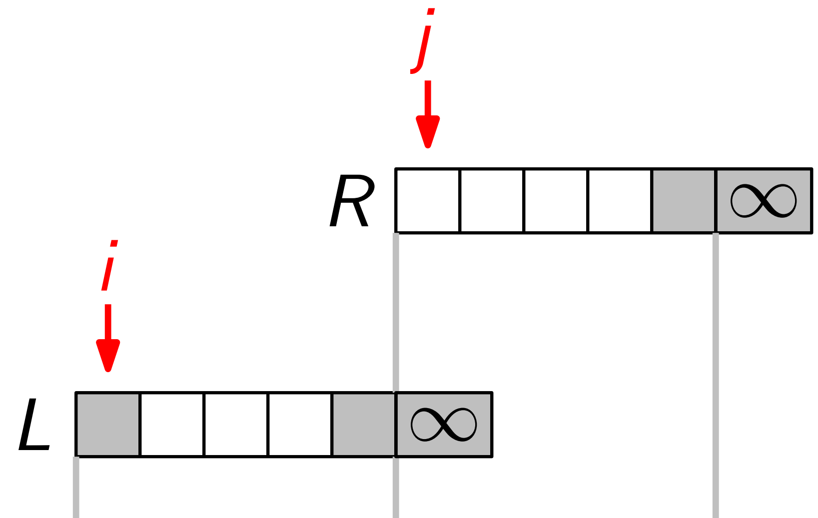
$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**



Aufgabe:

Schließen Sie Ihre Bücher und Ihren Browser!

Schreiben Sie mit Ihrer NachbarIn den Rest der Routine!

Benutzen Sie dazu die beiden neuen Felder L und R.

Sie haben 5 Minuten.

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

- Da beim ersten Schleifendurchlauf $k = \ell$ gilt, enthält $A[\ell..k-1] = \langle\rangle$ die 0 kleinsten Elem. von $L \cup R$.
- Da $i = j = 1$, sind $L[i]$ und $R[j]$ die kleinsten noch nicht kopierten Elem.

Korrektheit von Merge

Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$
  lege $L[1..n_1 + 1]$ und $R[1..n_2 + 1]$ an
  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$
  $R[1..n_2] = A[m + 1..r]$
  $L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$
  $i = j = 1$
  for $k = \ell$ **to** r **do**
    if $L[i] \leq R[j]$ **then** // Fall (a)
      $A[k] = L[i]$
      $i = i + 1$
    else // Fall (b)
      $A[k] = R[j]$
      $j = j + 1$

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k - \ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓

(Fall (b) symmetrisch.)

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, ✓ (b) $R[j] < L[i]$. ✓ Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k - \ell + 1$ Elem. sortiert
  – $L[i + 1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k - \ell$ Elem. sortiert

$\Rightarrow$ INV!

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $\boxed{r-\ell+1}$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

+2 Stopper

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2 = \boxed{r - \ell + 3}$, d.h. $A[\ell..r]$ korrekt sort.

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit? Merge macht genau $r - \ell + 1$ Vergleiche.

Und MergeSort? Korrekt? Effizient?

MergeSort – ein Beispiel

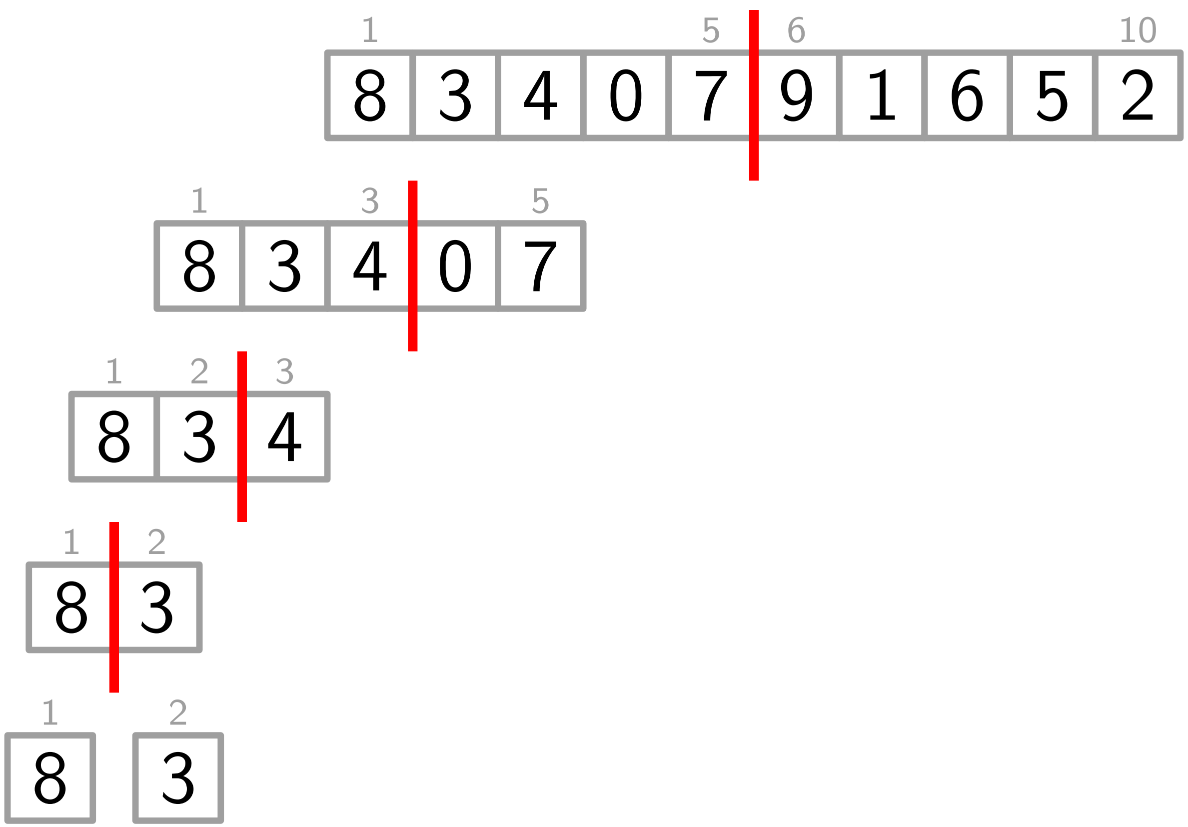
MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

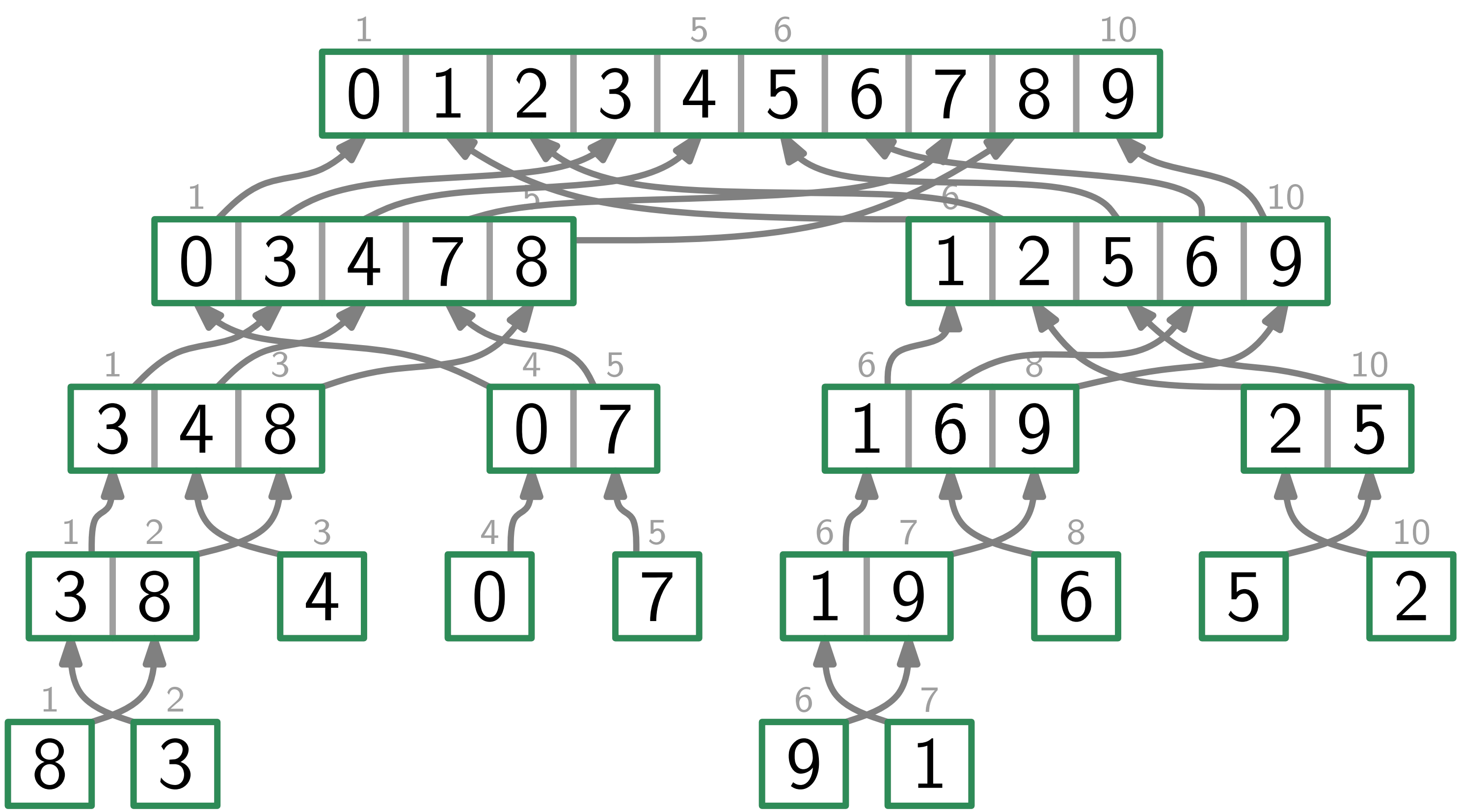


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

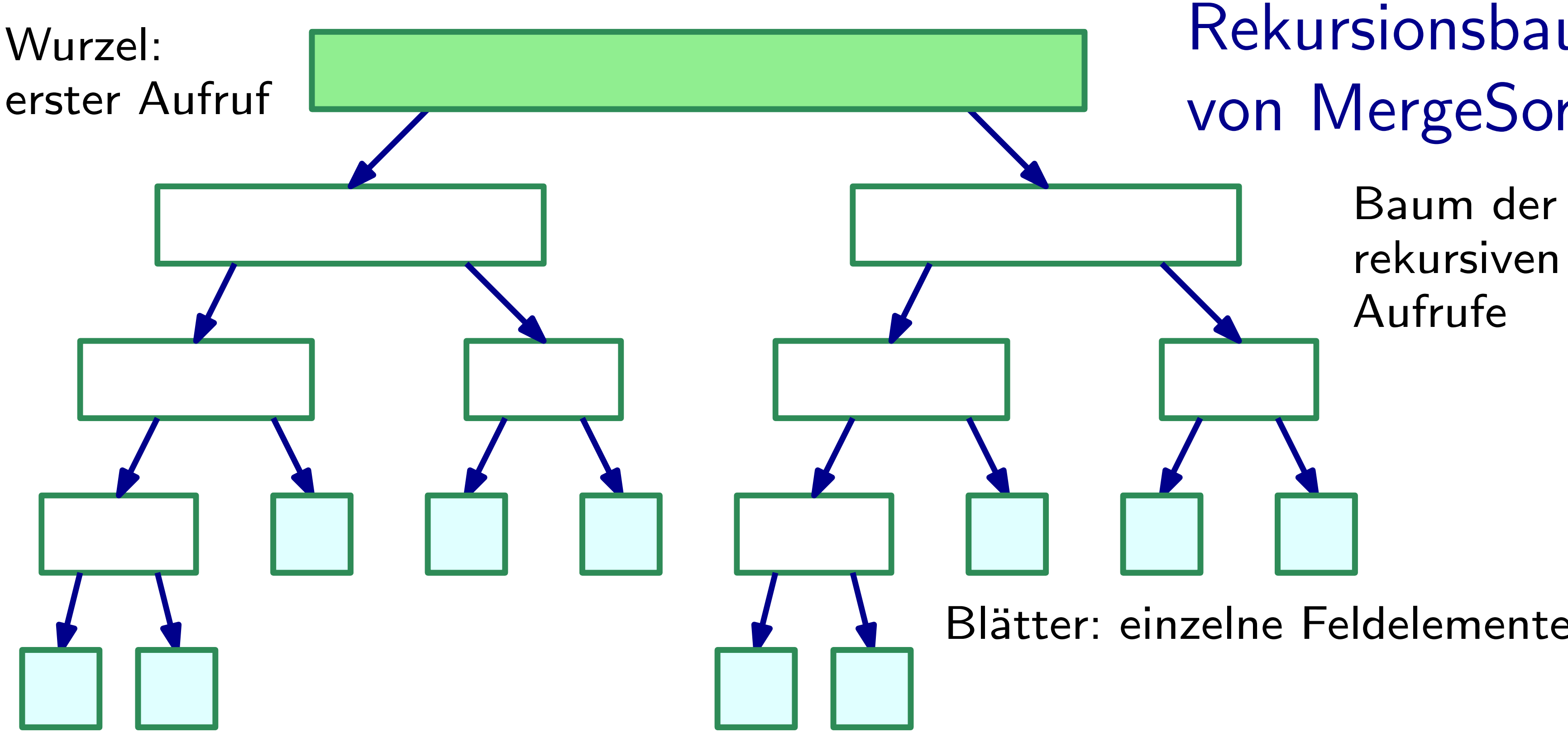
- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m+1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort:



Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
 if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv*...

Vollständige Induktion über $n = r - \ell + 1$ $(= A[\ell..r].length)$:

$n = 1$: *Induktionsanfang*

Dann ist $\ell = r$.

$\Rightarrow$ if-Block wird nicht betreten.

D.h. nichts passiert.

OK, da $A[\ell..\ell]$ schon sortiert.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
MergeSort($A, m+1, r$)
Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow$ $A[\ell..m]$ und $A[m+1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

$\underset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$ MergeSort(A, ℓ, m) ist korrekt und
MergeSort($A, m+1, r$) ist korrekt.
Schon bewiesen: Merge ist korrekt.

} MergeSort(A, ℓ, r) ist korrekt, d.h. MS für Felder d. Länge n. $\square$

Übersicht

Techniken für Korrektheitsbeweise

- iterative Algorithmen (à la InsertionSort)

  Schleifeninvariante (Schema „F“)

- rekursive Algorithmen (à la MergeSort)

  Induktion