Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2018/19
1. Vorlesung

Kapitel 1: Sortieren

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Das Problem

Eingabe

Gegeben: eine Folge $A = \boxed{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle}$ von n Zahlen

$\downarrow$ *Algorithmus*

Umordnung

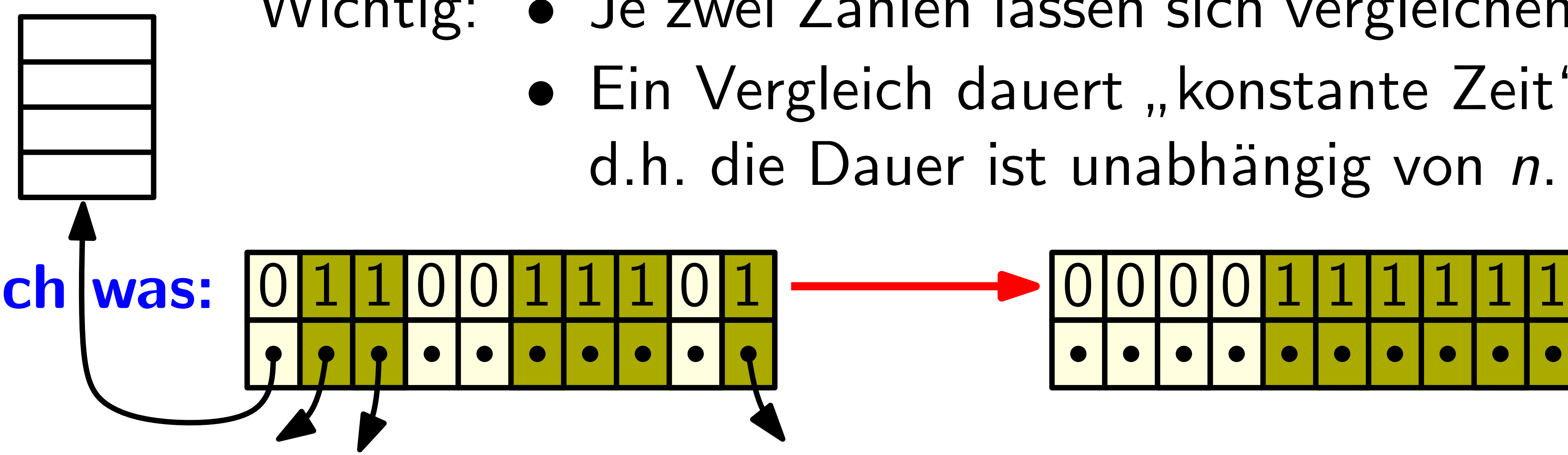
Gesucht: eine *Permutation* $\boxed{\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle}$ von A,
so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Beachte: Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:
- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert „konstante Zeit“, d.h. die Dauer ist unabhängig von n.

Noch was:

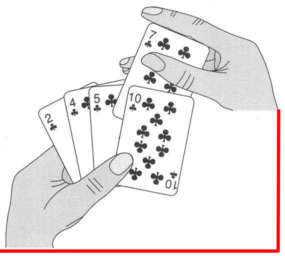


Frage an alle Erstis

Wie sortieren Sie?

Eine Lösung

InsertionSort



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten nacheinander auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige Position zwischen die Karten in der linken Hand.

inkrementeller Alg.

- Linke Hand hält immer eine sortierte Reihenfolge aufrecht.

Invariante!

$\Downarrow$

Korrektheit: am Ende sind alle Karten in der linken Hand – und zwar *sortiert!*

Zeichnung aus: „Algorithms: An Introduction“ (Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001

Ein inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

Typ der Eingabe (hier ein Feld von ...)

$\underbrace{\text{IncrementalAlg(}}_{\text{Name des Alg.}}\underbrace{\text{array of} \ldots A}_{\text{Eingabe}}\text{)}$

Variable

Ein inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

IncrementalAlg(array of . . . A)

    berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

    for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**   // Schleifenkopf

Anzahl der Elemente des Feldes A

Zuweisungoperator – in manchen Sprachen $j := 2$

– in manchen Büchern $j \leftarrow 2$

– in Java $j = 2$

Ein inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

IncrementalAlg(array of ... A)
  berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung
  for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf
    // Schleifenkörper; wird $(A.length - 1)$-mal durchlaufen
    berechne Lösung für $A[1..j]$ mithilfe der für $A[1..j-1]$
  return Lösung // Ergebnisrückgabe

Teilarray von A mit den Elementen $A[1], A[2], \ldots, A[j]$

Ein inkrementeller Algorithmus

InsertionSort

~~IncrementalAlg~~(array of ~~. . .~~ int A) // Schreiben wir künftig so: int[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1..1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1..j]$ mithilfe der für $A[1..j-1]$

. . . *kommt noch* . . .

~~**return** Lösung~~ // nicht nötig – das aufrufende Programm hat Zugriff auf das sortierte Feld A

Ein inkrementeller Algorithmus

InsertionSort

~~IncrementalAlg~~(array of int A) // Schreiben wir künftig so: int[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1..1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1..j]$ mithilfe der für $A[1..j-1]$

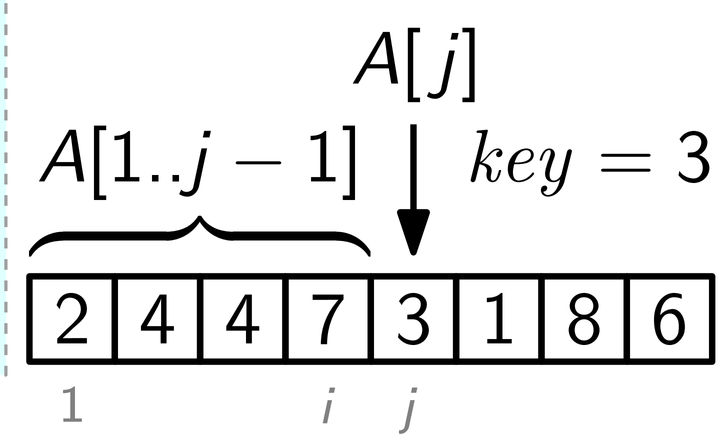
// *hier:* füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1..j-1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$\boxed{\text{Wie verschieben wir die Einträge größer } key \text{ nach rechts?}}$



Ein inkrementeller Algorithmus

InsertionSort

~~IncrementalAlg~~(array of int A) // Schreiben wir künftig so: int[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1..1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.\mathit{length}$ **do**

// berechne Lösung für $A[1..j]$ mithilfe der für $A[1..j-1]$

// *hier:* füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1..j-1]$ ein

$\mathit{key} = A[j]$

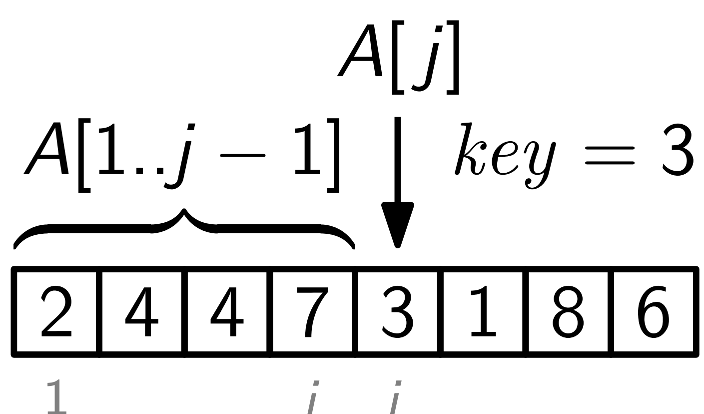
$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > \mathit{key}$ **do**

$A[i+1] = A[i]$

$i = i - 1$

$A[i+1] = \mathit{key}$



Fertig?

Nicht ganz. . .

Wir interessieren uns heute (und im Rest dieser Vorlesung) für folgende zentrale Fragen:

- Ist der Algorithmus korrekt?
- Welche Laufzeit hat der Algorithmus?
- Wie viel Speicherplatz benötigt der Algorithmus?

Korrektheit *beweisen*

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Hier enthält $A[1..j-1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Idee der *Schleifeninvariante:*

Wo? am Beginn jeder Iteration der for-Schleife…

Was? **WANTED:** Bedingung, die
a) an dieser Stelle immer erfüllt ist und
b) bei Abbruch der Schleife Korrektheit liefert

Korrektheit *beweisen*

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Hier enthält $A[1..j-1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten. . .

1.) Initialisierung

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:
$A[1..j-1] = A[1..1]$ ist unverändert und „sortiert“.

Korrektheit *beweisen*

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Hier enthält $A[1..j-1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ *2.) Aufrechterhaltung*

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j. Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j+1$.

Hier: Eigentlich: Invariante für while-Schleife aufstellen und beweisen!

Korrektheit *beweisen*

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Hier enthält $A[1..j-1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ *2.) Aufrechterhaltung* ✓

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j. Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j+1$.

Hier: Beob.: Elemente werden so lange nach rechts geschoben wie nötig. key wird korrekt eingefügt.

Korrektheit *beweisen*

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Hier enthält $A[1..j-1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten. . .

1.) Initialisierung ✓ *2.) Aufrechterhaltung* ✓ *3.) Terminierung* ✓

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung ist $j > A.length$.
D.h. $j = A.length + 1$. Einsetzen in Inv. $\Rightarrow$ korrekt!

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

Factorial(int k)

  if $k < 0$ **then** **error**$(\dots)$
  $f = 1$
  $j = 2$
  while $j \leq k$ **do**
    $f = f \cdot j$
    $j = j + 1$
  return f

Schleifeninvariante:
$f = (j-1)!$

1.) Initialisierung ✓

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:
$f = (2-1)! = 1! = 1$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

Factorial(int k)

if $k < 0$ **then error**$(\dots)$
$f = 1$
$j = 2$
while $j \leq k$ **do**
  $f = f \cdot j$
  $j = j + 1$
return f

Schleifeninvariante:
$f = (j-1)!$

1.) Initialisierung ✓ *2.) Aufrechterhaltung* ✓

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j. Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j+1$.

Hier: Vor dem j. Durchlauf gilt INV, d.h. $f = (j-1)!$
Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow$ $f = j!$
Dann wird j um 1 erhöht $\Rightarrow$ $f = (j-1)!$ $\Rightarrow$ INV

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

Factorial(int k)

if $k < 0$ **then error**$(\dots)$
$f = 1$
$j = 2$
while $j \leq k$ **do**
    $f = f \cdot j$
    $j = j + 1$
return f

Schleifeninvariante:
$f = (j-1)!$

1.) Initialisierung ✓ *2.) Aufrechterhaltung* ✓ *3.) Terminierung* ✓

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung: $j > k$, also $j = k + 1$.
Einsetzen von „$j = k + 1$“ in INV liefert $f = k!$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

Factorial(int k)

if $k < 0$ **then error**$(\ldots)$
$f = 1$
$j = 2$
while $j \leq k$ **do**
  $f = f \cdot j$
  $j = j + 1$
return f

Schleifeninvariante:
$f = (j-1)!$

1.) Initialisierung ✓ *2.) Aufrechterhaltung* ✓ *3.) Terminierung* ✓

Der Algorithmus Factorial(int) terminiert und liefert das korrekte Ergebnis.

Selbstkontrolle

- *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*

Zählen Sie Vergleiche für verschiedene Eingaben.

- *Lesen Sie Kapitel 1 und Anhang A des Buchs von Cormen et al. durch und machen Sie dazu so viel Übungsaufgaben wie möglich!*

- *Bringen Sie Fragen in die Übung mit!*

- *Bleiben Sie von Anfang an am Ball!*

- *Schreiben Sie sich in die Vorlesung ein:*
  - `wuecampus2.uni-wuerzburg.de`
  - `https://www-sbhome1.zv.uni-wuerzburg.de`