

## 5. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2017/18)

### Aufgabe 1 – Hashing

Die Schlüssel 44, 12, 23, 88, 71, 11, 94, 39, 20, 5 und 16 sollen in dieser Reihenfolge nacheinander in eine Hashtabelle  $T[0..15]$  eingefügt werden. Dabei können verschiedene Verfahren eingesetzt werden, um Kollisionen aufzulösen.

a) Zeichnen Sie für jedes der folgenden Verfahren die resultierende Hashtabelle.

1. Kollisionen werden durch Verkettung aufgelöst;  
die Hashfunktion ist  $h(k) = (3k + 7) \bmod 16$ .
2. Kollisionen werden durch lineares Sondieren aufgelöst;  
die Hashfunktion ist  $h(k, i) = (h_0(k) + i) \bmod 16$   
mit  $h_0(k) = (3k + 7) \bmod 16$ .
3. Kollisionen werden durch quadratisches Sondieren aufgelöst;  
die Hashfunktion ist  $h(k, i) = (h_0(k) + c_1i + c_2i^2) \bmod 16$   
mit  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}$  und  $h_0(k) = (3k + 7) \bmod 16$ .
4. Kollisionen werden durch doppeltes Hashing aufgelöst;  
die Hashfunktionen ist  $h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod 16$   
mit  $h_1(k) = (3k + 7) \bmod 16$  und  $h_2(k) = 7 - 2(k \bmod 4)$ .

Bei den Verfahren 2. bis 4. durchläuft  $i$  die Werte  $0, \dots, 15$ .

Geben Sie bei jedem Verfahren (außer bei 1.) und für jeden Schlüssel an, wie viele Zellen Sie testen mussten, bevor Sie eine freie Zelle gefunden haben. Geben Sie für jedes Verfahren auch die Gesamtzahl der erfolglosen Tests an. **4 Punkte**

- b) Welches Problem tritt beim doppelten Hashing auf, wenn die Hashfunktion  $h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod 16$  mit  $h_1(k) = (3k + 7) \bmod 16$  und  $h_2(k) = 8 - (k \bmod 8)$  verwendet wird?

Beim quadratischen Sondieren können durch ungeschickte Wahl der Parameter  $c_1$  und  $c_2$  ähnliche Probleme auftreten. Geben Sie ein Beispiel mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  an.

**2 Punkte**

## Aufgabe 2 – BinarySearch

Im Folgenden sei  $A$  stets ein aufsteigend sortiertes Feld der Länge  $n$ .

- a) Betrachten Sie folgenden Algorithmus für binäre Suche.

```
BinarySearch(key[] A, key k, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ > r then
    | return false
  m = ⌊(ℓ + r)/2⌋
  if A[m] == k then
    | return true
  if A[m] > k then
    | return BinarySearch(A, k, ℓ, m - 1)
  else
    | return BinarySearch(A, k, m + 1, r)
```

Geben Sie die genaue Anzahl der Vergleiche mit Elementen des Eingabefeldes an, die `BinarySearch` im Worst-Case benötigt. Sie dürfen dabei annehmen, dass  $n = 2^i$  und  $i$  eine natürliche Zahl ist. **2 Punkte**

- b) Geben Sie einen Algorithmus `BinarySearch2(key[] A, key k)` an, der das gleiche Problem löst, jedoch höchstens  $\lceil \log_2 n \rceil + 1$  Vergleiche mit Elementen des Eingabefeldes benötigt. Sie dürfen nur Hilfsvariablen vom Typ `int` verwenden. Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus tatsächlich nur die geforderte Anzahl von Vergleichen ausführt. **5 Punkte**

## Aufgabe 3 – Pfade im Suchbaum

Gegeben sei eine Folge ganzer Zahlen  $A[1..k]$ . Wir betrachten das Problem, zu entscheiden, ob es einen binären Suchbaum  $B$  gibt, so dass  $A$  die Folge von Zahlen ist, die bei der Suche nach  $A[k]$  in  $B$  evaluiert wird.  $A[1]$  wäre also die Wurzel von  $B$ ,  $A[2]$  ein Kind der Wurzel usw.

- a) Lösen Sie dieses Entscheidungsproblem für die folgenden Zahlenfolgen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. **3 Punkte**
1.  $A = \langle 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363 \rangle$
  2.  $A = \langle 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363 \rangle$
  3.  $A = \langle 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363 \rangle$
- b) Beschreiben Sie mit Worten und in Pseudocode einen Algorithmus, der dieses Entscheidungsproblem für eine beliebige gegebene Zahlenfolge löst. Die Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus soll  $\Theta(k)$  sein. **4 Punkte**

---

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 12. Dezember 2017, 10:10 Uhr** in den Vorlesungs-Briefkasten im Informatik-Gebäude. Geben Sie stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen sowie die Übungsgruppe, in der das Blatt zurückgegeben werden soll, an.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.