

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2017/18

20. Vorlesung

Tiefensuche und topologische Sortierung

Themen für den 3. Kurztest (Do, 25.01.18)

- Rot-Schwarz-Bäume (R-S-Eigenschaften, Höhe)
- Augmentieren von Datenstrukturen
- Amortisierte Analyse
- Nächstes Paar (Teile und Herrsche)
- Graphen und Breitensuche

Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle ($u.d/u.f$)
 – DFS-Wald ($\leftarrow \pi$)
 – Klassifizierung der Graphkanten:

● Baumkanten (Kanten von G_π)

Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)

● Rückwärtskanten (R)

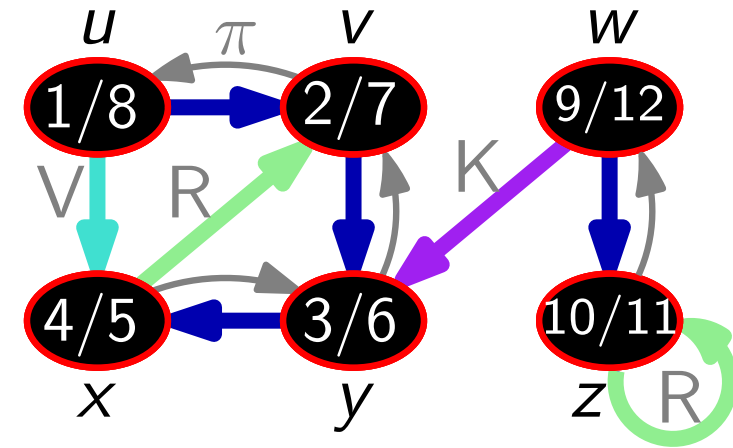
Nicht-Baumkanten zu einem Vorgängerknoten

● Vorwärtskanten (V)

Nicht-Baumkanten zu einem Nachfolgerknoten

● Kreuzkanten (K)

Kanten, bei denen kein Endpunkt Vorgänger des anderen ist.



Farbe Zielknoten:

weiss

grau

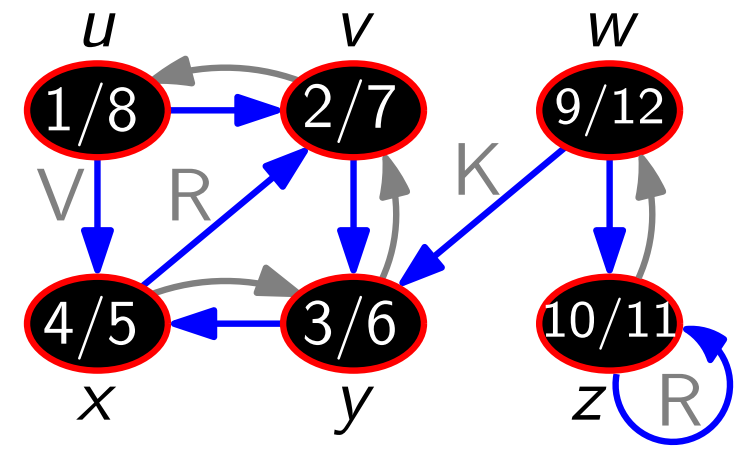
*schwarz und
start.d < ziel.d*

*schwarz und
start.d > ziel.d*

Tiefensuche – Pseudocode

```

DFS(Graph G = (V, E))
  foreach u ∈ V do
    | u.color = white
    | u.π = nil
  time = 0 // globale Variable!
  foreach u ∈ V do
    | if u.color == white then DFSVisit(G, u)
    
```



**Laufzeit
von DFS?**

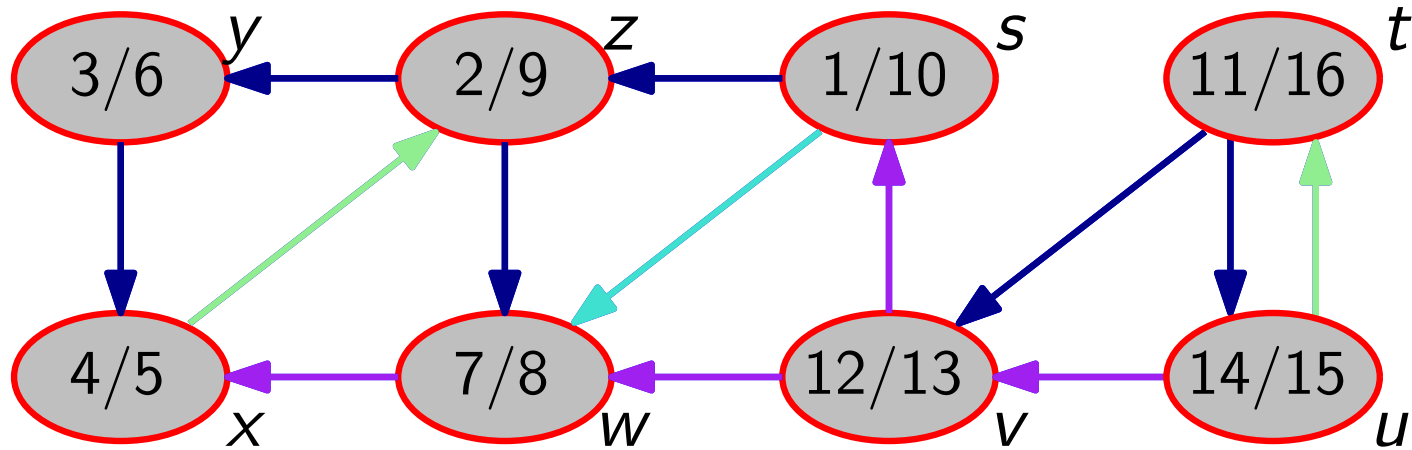
```

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    | if v.color == white then
      | | v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
    
```

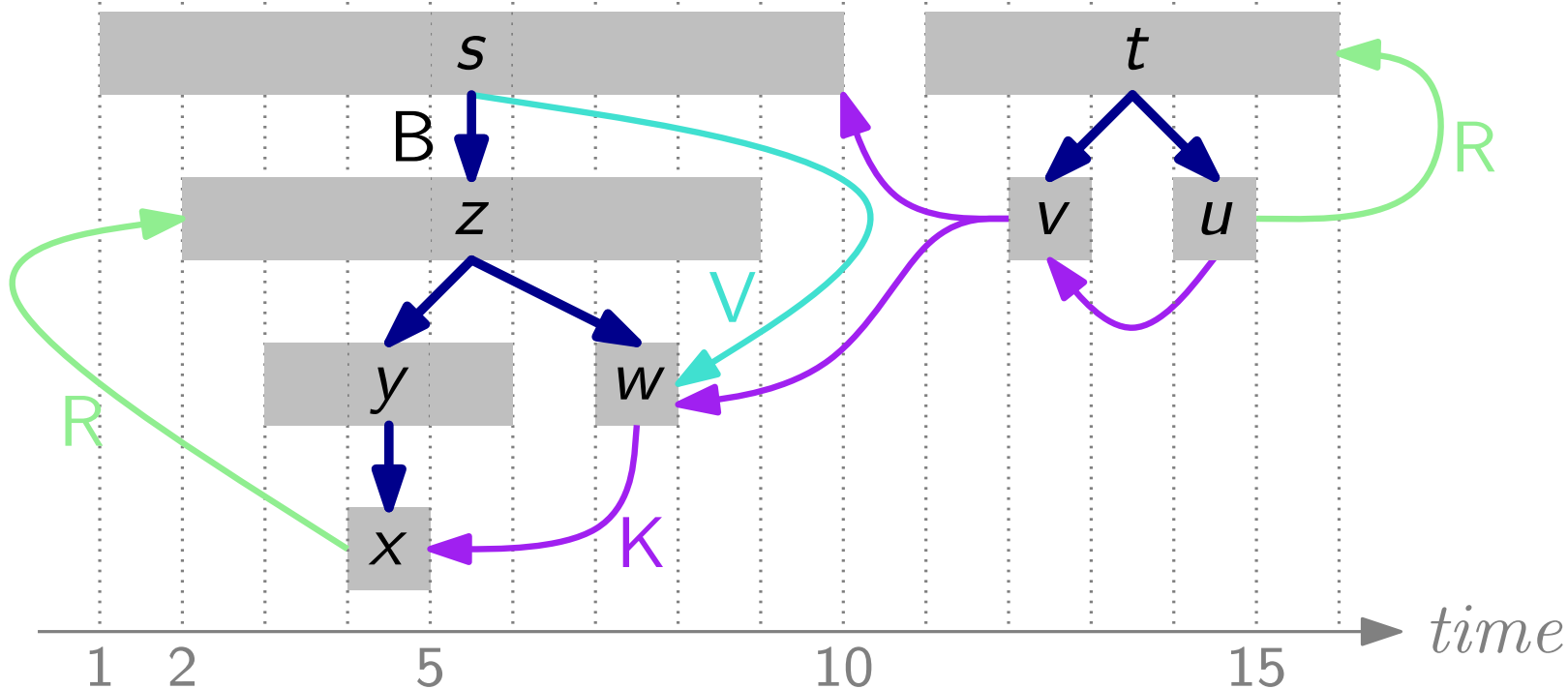
- DFSVisit wird nur für weiße Knoten aufgerufen.
- In DFSVisit wird der neue Knoten sofort grau gefärbt.
- ⇒ DFSVisit wird für jeden Knoten genau 1× aufgerufen.
- DFS ohne if $O(V)$ Zeit
 DFSVisit ohne Rek. $O(\text{deg } u)$

 DFS gesamt $O(V + E)$ Zeit

Tiefensuche – Eigenschaften



$(s (z (y (x x) y) (w w) z) s) (t (v v) (u u) t)$



Tiefensuche – Analyse

Satz. (Klammertheorem)

Nach $\text{DFS}(G)$ gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

- (i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u - v - noch v - u -Weg.
- (ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v - u -Weg.
- (iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.

A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.
 $\Rightarrow v$ ist *Nachfolger* von u , d.h. es gibt einen u - v -Weg.

Wegen $u.d < v.d$ gilt: v wurde später als u entdeckt.

\Rightarrow alle Kanten, die v verlassen, sind erforscht;

v wird schwarz, *bevor* DFS zu u zurückkehrt und u

schwarz macht $\Rightarrow [v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$, d.h. (ii) ✓

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammertheorem)

Nach $\text{DFS}(G)$ gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

- (i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u - v - noch v - u -Weg.
- (ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v - u -Weg.
- (iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$. ✓ 2. Fall: $v.d < u.d$. Symmetrisch! ✓
(Vertausche im Beweis $u \leftrightarrow v$.)

A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$. ✓

Laut Code gilt $u.d < u.f < v.d < v.f$ (siehe Code).

$$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$$

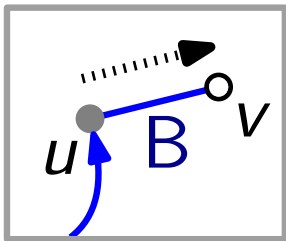
\Rightarrow Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen. (i) ↑↑

Tiefensuche in ungerichteten Graphen

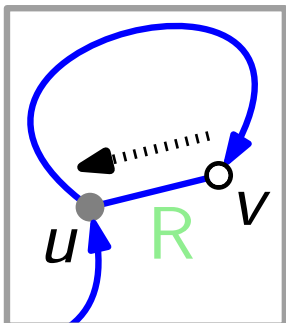
Satz. G ungerichtet
 $\Rightarrow G$ hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G .
 O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz, bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \text{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*. Dann ist uv Baumkante.

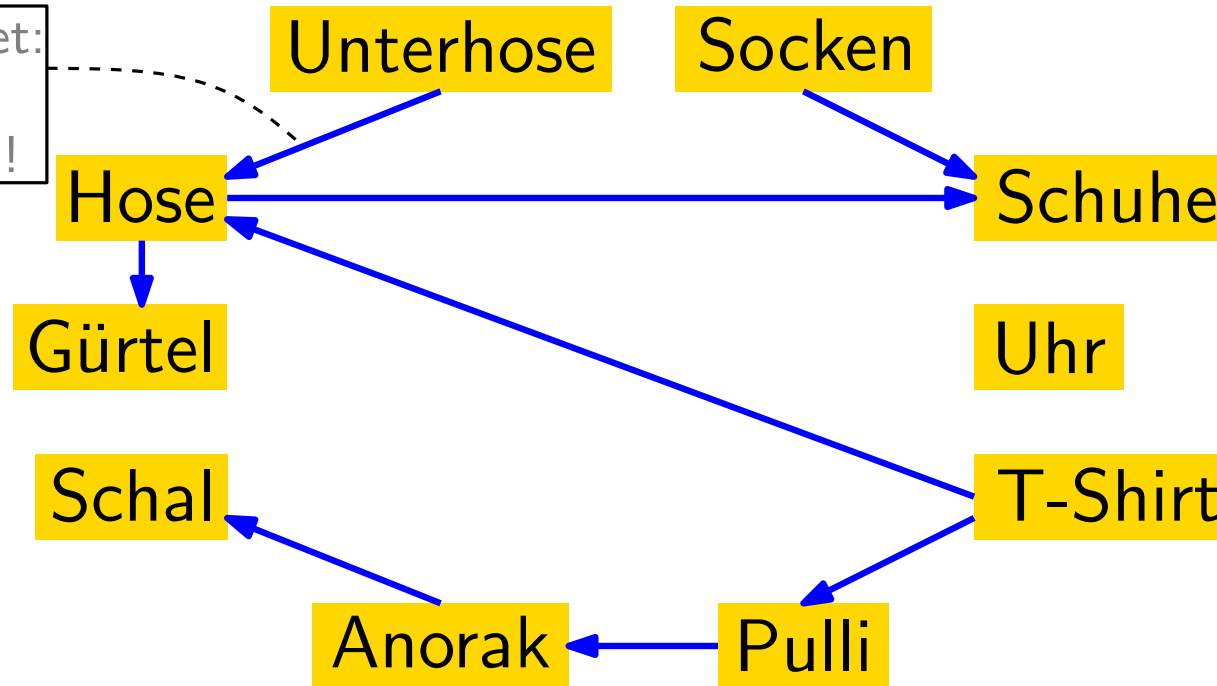


- Andernfalls wird uv zum ersten Mal von v nach u überschritten. Dann ist uv R-Kante, da u dann schon (und immer noch) *grau* ist.



Ablaufplanung

Kante bedeutet:
Unterhose *vor*
Hose anziehen!

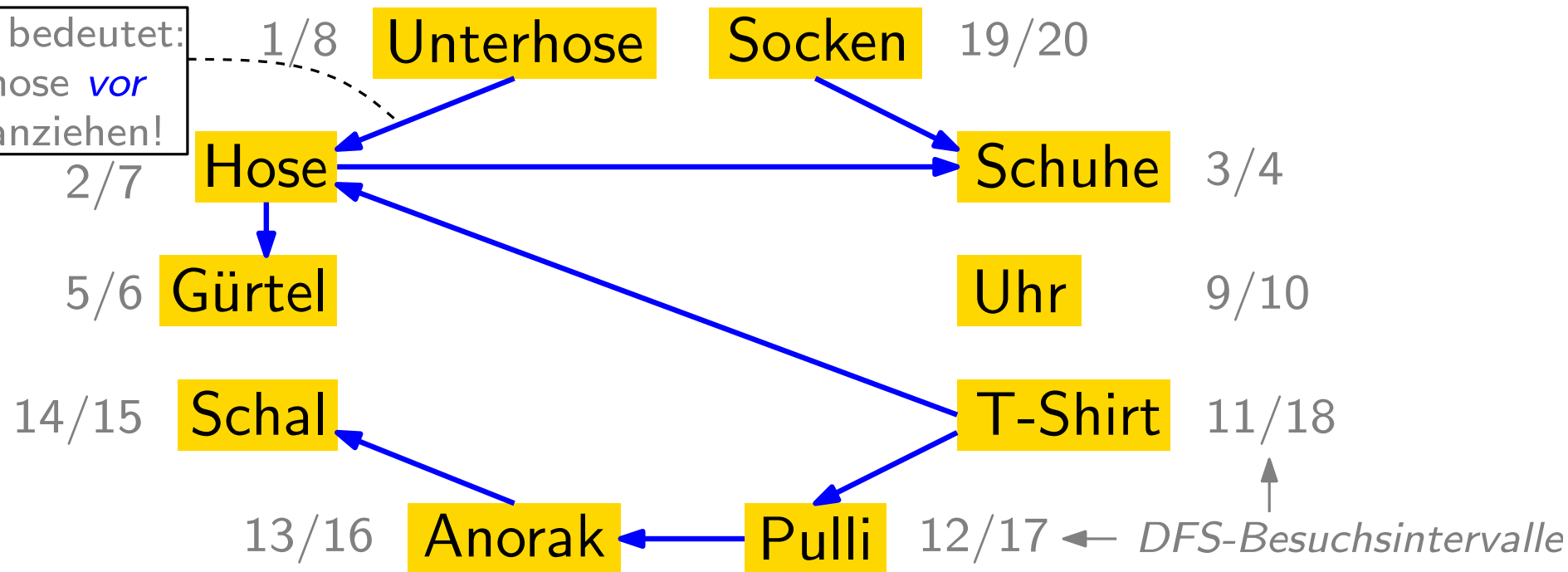


Aufgabe: Finde Ablaufplan –
d.h. Reihenfolge der Knoten, so dass alle Einschränkungen erfüllt sind (z.B. T-Shirt vor Pulli).

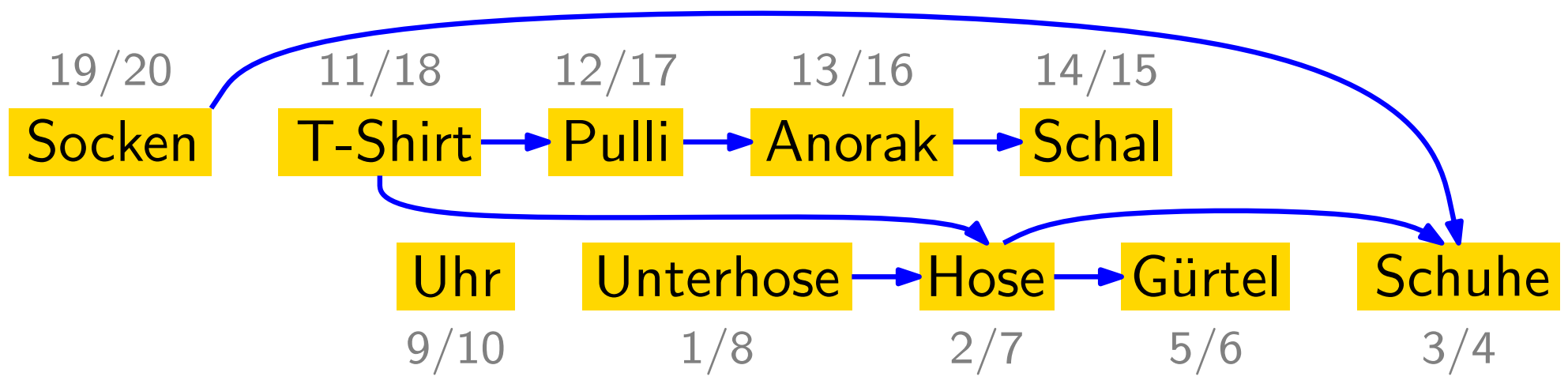
Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v .

Ablaufplanung

Kante bedeutet:
Unterhose *vor*
Hose anziehen!



Idee: Nutze Tiefensuche! ⇒ Alle Kanten sind nach rechts gerichtet. Sortiere Knoten nach absteigenden *f*-Zeiten.



Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v .

TopologicalSort(DirectedGraph G)

$L = \mathbf{new}$ List()

DFS(G) mit folgender Änderung:

Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
häng ihn *vorne* an die Liste L an.

return L

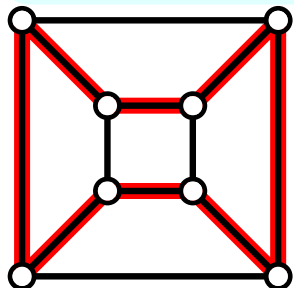
Laufzeit?

$O(V + E)$

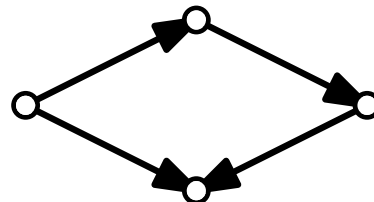
Korrekt?

Wann funktioniert's?

Def. Ein (gerichteter) Graph ist *kreisfrei*, wenn er keinen (gerichteten) Kreis enthält.



✗

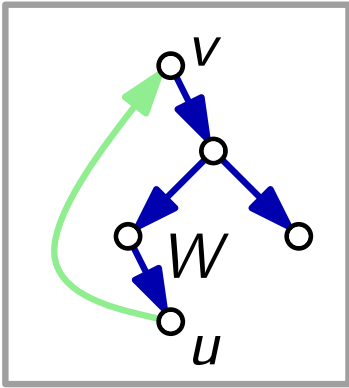


✓

Kreisfrei \Leftrightarrow keine R-Kanten

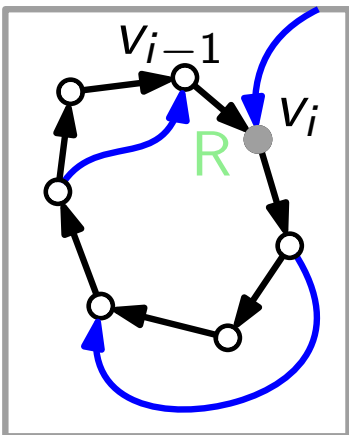
Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
 \Leftrightarrow DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v) .
 Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
 D.h. G enthält einen gerichteten v - u -Weg W .
 Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ⚡

„ \Leftarrow “ DFS(G) liefere keine R-Kanten.



Ang. G enthält trotzdem Kreis $C = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.
 Sei v_i der 1. Knoten in C , den DFS(G) erreicht.
 Es gibt einen Weg von v_i nach v_{i-1} in G .
 \Rightarrow DFS gelangt zu v_{i-1} , solange v_i grau ist.
 $\Rightarrow (v_{i-1}, v_i)$ ist R-Kante. ⚡ □

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert $\text{TopologicalSort}(G)$ eine topologische Sortierung von G .

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

Dann gilt $v_1.f < v_2.f < \dots < v_n.f$.

Sei (u, v) Kante von G . Zu zeigen: $v.f < u.f$

Welche Farbe hat v , wenn DFS (u, v) überschreitet?



– v grau

$\Rightarrow (u, v)$ ist R-Kante

⚡ Widerspruch zu
Lemma: G kreisfrei!



– v weiß

$\Rightarrow v$ Nachfolger von $u \Rightarrow v.f < u.f$ ✓



– v schwarz

$\Rightarrow u.f$ noch nicht gesetzt, $v.f$ gesetzt

$\Rightarrow v.f < u.f$ ✓

□

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

Breitensuche

Tiefensuche

Laufzeit

$O(V + E)$

$O(V + E)$

Ergebnis

BFS-Baum,
d.h. kürzeste Wege

d - und f -Werte,
z.B. für top. Sortierung

Datenstruktur

Schlange

Rekursion bzw. Stapel

Vorgehen

nicht-lokal

lokal