

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2017/18

16. Vorlesung

## Amortisierte Analyse

Special Guest: Fabian Feitsch

# Einstiegsbeispiel: Hash-Tabellen

**Frage:** Wie groß macht man eine Hash-Tabelle?

**Ziel:** So groß wie nötig, so klein wie möglich...

Verhindere, dass die Tabelle überläuft  
oder dass Operationen ineffizient werden.

**Problem:** Was tun, wenn man die maximale Anzahl zu speichernder Elemente vorab nicht kennt?

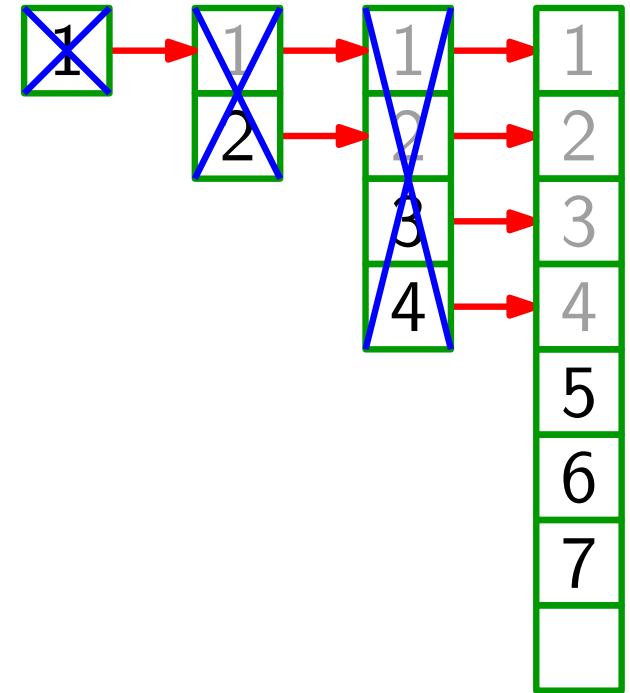
**Lösung:** *Dynamische* Tabellen!

# Dynamische Tabellen

## Idee:

- Wenn Tabelle voll, fordere doppelt so große Tabelle an (mit `new`).
- Kopiere alle Einträge von alter in neue Tabelle.
- Gib Speicher für alte Tabelle frei.

Insert(1)  
Insert(2)  
Insert(3)  
Insert(4)  
Insert(5)  
Insert(6)  
Insert(7)  
...



**Analyse:** Welche Laufzeit benötigen  $n$  Einfügeoperationen im schlimmsten Fall?

- Antwort:**
- Tabelle wird genau  $(\lceil \log_2 n \rceil)$ -mal kopiert.
  - Im schlimmsten (letzten!) Fall ist der Aufwand  $\Theta(n)$ .

**Lüge!**

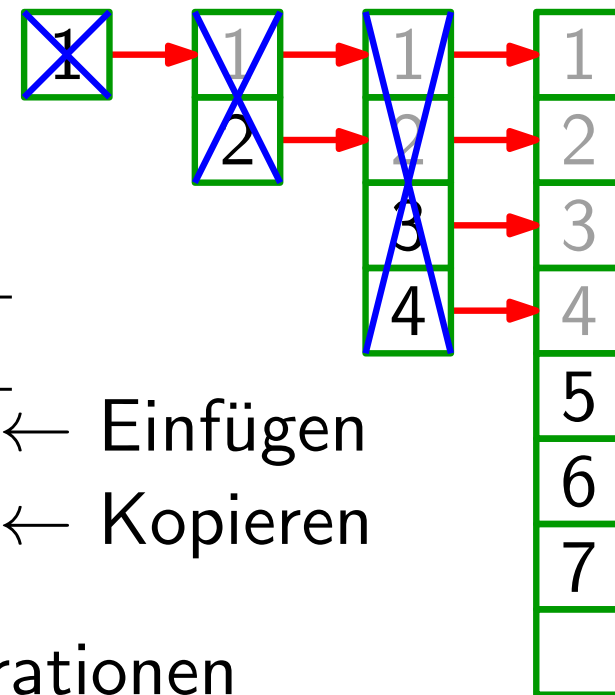
Also ist der Gesamtaufwand  ~~$\Theta(n \log n)$~~ , **genauer  $\Theta(n)$** .  
*Let's see why...*

# Genauere Abschätzung: Aggregationsmethode

Für  $i = 1, \dots, n$  sei

$c_i =$  Kosten fürs  $i$ -te Einfügen.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$size_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16
$c_i$	1	1	1	1	1	1	1	1	1



← Einfügen

8 ← Kopieren

Also betragen die Kosten für  $n$  Einfügeoperationen

$$\sum_{i=1}^n c_i = n + \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor} 2^j \leq n + \frac{2^{\log_2(n-1)+1} - 1}{2 - 1}$$

$$= n + 2(n - 1) - 1$$

$$< 3n \in \Theta(n)$$

$$\sum_{j=0}^k q^j = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{endl.} \\ \text{geom.} \\ \text{Reihe} \end{array} \right]$$

D.h. die durchschnittlichen („amortisierten“) Kosten sind  $\Theta(1)$ .

# Amortisierte Analyse...

...bedeutet zu zeigen, dass die Operationen einer gegebenen Folge kleine durchschnittliche Kosten haben –  
*auch wenn einzelne Operationen in der Folge teuer sind!*

Auch *randomisierte Analyse* kann man als Durchschnittsbildung (über alle Ereignisse, gewichtet nach Wahrscheinlichkeit) betrachten.

Bei amortisierter Analyse geht es jedoch um die durchschnittliche Laufzeit *im schlechtesten Fall* – nicht im Erwartungswert!

Wir betrachten 3 verschiedene Typen von amortisierter Analyse:

- Aggregationsmethode ✓
- Buchhaltermethode
- Potentialmethode

# Buchhaltermethode

- Tendentiell genauer als die Aggregationsmethode
- Verbindet mit jeder Operation  $op_i$  *amortisierte* Kosten  $\hat{c}_i$ , die oft nicht mit den tatsächlichen Kosten  $c_i$  übereinstimmen.

$\hat{c}_i > c_i \Rightarrow$  Wir legen etwas beiseite.

$c_i > \hat{c}_i \Rightarrow$  Wir bezahlen teure Operationen mit vorher Beiseitegelegtem.

- Damit's klappt: wir dürfen nie in die Miesen kommen –

*Guthaben*  $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i - \sum_{i=1}^n c_i$  darf nicht negativ werden!

Dann gilt  $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^n c_i$ .

*D.h. amortisierte Kosten sind obere Schranke für tatsächliche Kosten!*

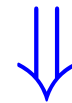
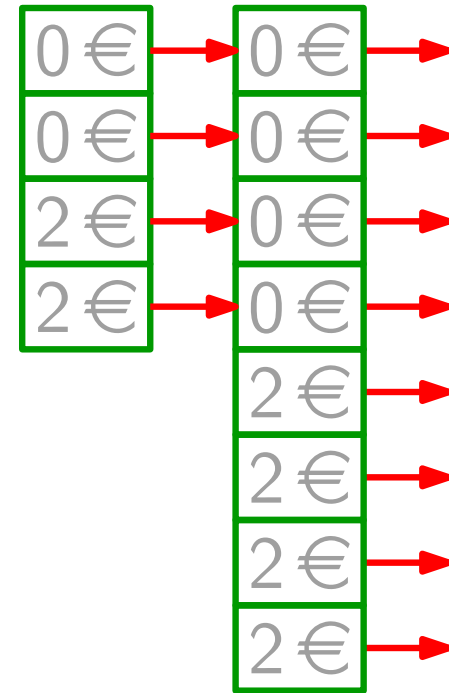
# Buchhaltermethode für dynamische Tabellen

Jede Einfügeoperation  $op_i$  bezahlt  $\hat{c}_i = 3\text{€}$ :

- 1 € fürs tatsächliche Einfügen
- 2 € für die nächste Tabellenvergrößerung

Wir verknüpfen die Teilguthaben mit konkreten Objekten der Datenstruktur.

Damit wird deutlich, dass die DS nie Miese macht.



*Also sind amortisierte  
Kosten obere Schranke  
für tatsächliche Kosten!*

$$\sum_{i=1}^n c_i \leq \sum_{i=1}^n \hat{c}_i = 3n = \Theta(n)$$

D.h. die (tats.) Kosten für  $n$  Einfügeoperationen betragen  $\Theta(n)$ .

# Buchhaltermethode: noch'n Beispiel



## Stapel

verwaltet sich ändernde Menge nach *LIFO-Prinzip*

### Abs. Datentyp

boolean Empty()

Push(key  $k$ )

key Pop()

key Top()

Multipop(int  $k$ )

*neu!*

### Implementierung

**while** not Empty() **and**  $k > 0$  **do**

┌ Pop()

└  $k = k - 1$



# Buchhaltermethode: Stapel mit Multipop

Betrachte Folge von Push-, Pop- und Multipop-Operationen.

Operation <sub><i>i</i></sub>	tatsächliche Kosten $c_i$	amortisierte Kosten $\hat{c}_i$
Push	1	2
Pop	1	0
Multipop( $k_i$ )	$\min\{k_i, size_i\}$	0

*Geht das gut???* – *Ja!* D.h. Folge von  $n$  Op. dauert  $\Theta(n)$  Zeit.

**Zeige:** Amortisierte Kosten „bezahlen“ immer für die echten!

- Jede Push-Operation legt einen Teller auf den Stapel. Dafür bezahlt sie 1 € und legt noch 1 € auf den Teller.
- Jede (Multi-)Pop-Operation wird mit den Euros auf den Tellern, die sie wegnimmt, komplett bezahlt.

# Potentialmethode

**Idee:** Betrachte Bankguthaben (siehe Buchhaltermethode)  
*als physikalische Größe,*  
die den augenblicklichen Zustand der DS beschreibt.

Datenstruktur  $D_0 \xrightarrow{op_1} D_1 \xrightarrow{op_2} \dots \xrightarrow{op_n} D_n$

Wähle Potential  $\phi: D_i \rightarrow \mathbb{R}$ . O.B.d.A.  $\phi(D_0) = 0$

**Ziel:** Bank macht keine Miesen.

Also fordern wir  $\phi(D_i) \geq 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

*amortisierte Kosten*  $\leftarrow$  *echte Kosten*  $\leftarrow$  *Potentialdifferenz*

**Def.**  $\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi(D_i)$ , wobei  $\Delta\phi(D_i) = \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$

**Folge:**  $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i = \sum_{i=1}^n (c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}))$  *teleskopierende Summe*

$$\downarrow = \sum_{i=1}^n c_i + \phi(D_n) - \phi(D_0) \geq \sum_{i=1}^n c_i$$

D.h. amortisierte Kosten „bezahlen“ für echte Kosten.



# Potentialmethode: Stapel mit Multipop

**To do:** Definiere Potentialfunktion –  
in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand des Stapels!

**Idee:** Nimm  $\phi(D_i) = size_i$ , also aktuelle Stapelgröße.  
 $\Rightarrow \phi(D_0) = 0$  und  $\phi(D_1), \dots, \phi(D_n) \geq 0$ . ✓

**Prüfe:** Falls die  $i$ -te Operation eine Push-Operation ist:  
 $\Rightarrow \Delta\phi(D_i) = +1$  und  $\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi D_i = 1 + 1 = 2$

*Was  
sind die  
amort.  
Kosten?*

Falls die  $i$ -te Operation eine Multipop-Operation ist:

$$\Rightarrow \Delta\phi(D_i) = - \min\{k_i, size_i\}$$

$$c_i = + \min\{k_i, size_i\}$$

---

$$\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi D_i = 0, \text{ dito mit Pop } (k_i = 1).$$

**Also:** Amortisierte Kosten pro Operation  $O(1)$ .  
 $\Rightarrow$  Echte Kosten für  $n$  Oper. im worst case  $O(n)$ .

# Zusammenfassung

Zeige mit **amortisierter Analyse**, dass die Operationen einer gegebenen Folge kleine durchschnittliche Kosten haben – *auch wenn einzelne Operationen in der Folge teuer sind!*

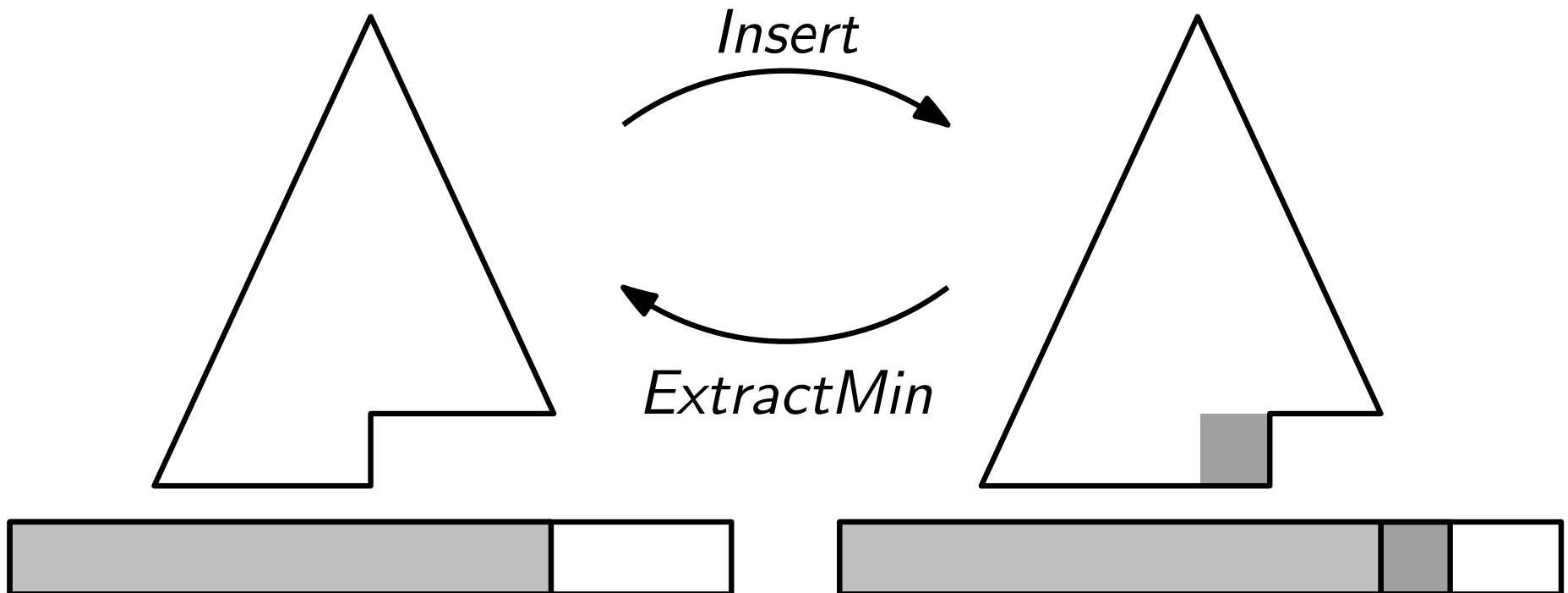
Drei Typen von amortisierter Analyse:

- Aggregationsmethode ✓  
Summiere tatsächliche Kosten (oder obere Schranken dafür) auf.
- Buchhaltermethode ✓  
Verbinde Extrakosten mit konkreten Objekten der DS und bezahle damit teure Operationen.
- Potentialmethode ✓  
Definiere Potential der gesamten DS, so dass mit der Potentialdifferenz teure Operationen bezahlt werden können.

# Übungsaufgaben zur amortisierten Analyse (I)

Gegeben sei ein gewöhnlicher MinHeap, dessen Methoden *Insert* und *ExtractMin* im schlechtesten Fall  $O(\log n)$  Zeit brauchen.

Zeigen Sie mit der **Potentialmethode**, dass *Insert* amortisiert  $O(\log n)$  Zeit und *ExtractMin* amortisiert  $O(1)$  Zeit benötigt.



# Übungsaufgaben zur amortisierten Analyse (II)

Entwerfen Sie eine Datenstruktur zum Verwalten einer dynamischen Menge von Zahlen. Die DS soll 2 Methoden haben:

- *Insert* zum Einfügen einer Zahl und
- *DeleteLargerHalf* zum Löschen aller Zahlen aus der Datenstruktur, die größer oder gleich dem aktuellen Median der Zahlenmenge sind.

Beide Methoden sollen **amortisiert  $O(1)$  Zeit** benötigen.

Tipp: Verwenden Sie eine Liste!

1. Beschreiben Sie Ihren Entwurf der Datenstruktur einschließlich der beiden Methoden in Worten.
2. Analysieren Sie mithilfe der **Buchhaltermethode**. Geben Sie die amortisierten Kosten, die Sie mit *Insert* und *DeleteLargerHalf* verbinden, exakt an.