Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2017/18

6. Vorlesung

Prioritäten setzen

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Heute: Wir „bauen“ eine Datenstruktur

Datenstruktur:

Konzept, mit dem man Daten speichert und anordnet, so dass man sie schnell finden und ändern kann.

Abstrakter Datentyp

beschreibt die „Schnittstelle“ einer Datenstruktur – welche Operationen werden unterstützt?

Implementierung

wie wird die gewünschte Funktionalität realisiert:
– wie sind die Daten gespeichert (Feld, Liste, . . .)?
– welche Algorithmen implementieren die Operationen?

Anwendung: Prozesssteuerung

Anwendung: steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

Anforderung:
- Prozesse (mit ihrer Priorität) einfügen
- Prozess mit höchster Priorität finden/löschen
- Priorität von Prozessen erhöhen

modelliere

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge M,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge M,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Operation	*Funktionalität*
Insert(element x)	$M = M \cup \{x\}$
element FindMax()	liefere $x \in M$ mit $x.key = \max\{y.key \mid y \in M\}$
element ExtractMax()	$x =$ FindMax(); $M = M \setminus \{x\}$; liefere x
IncreaseKey (element x, priorität p)	$x.key = p$

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

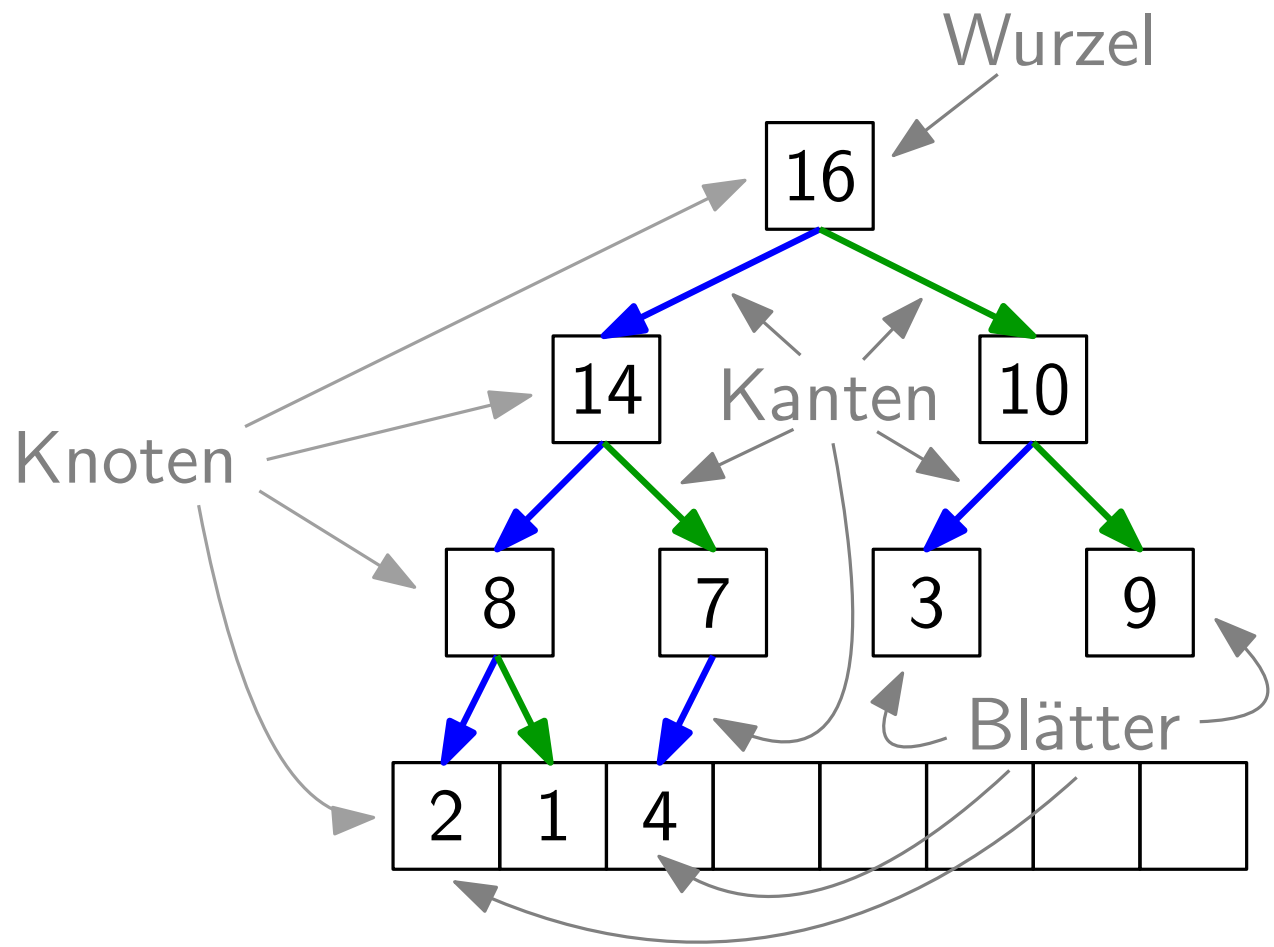
- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

	Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
W-C-Laufzeiten meiner Implement.*	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
heute: Implementierung als Heap (Haufen)	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

$\star$
- Daten werden in einem Feld gespeichert.
- Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
- Maximum wird immer aufrechterhalten.
- Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

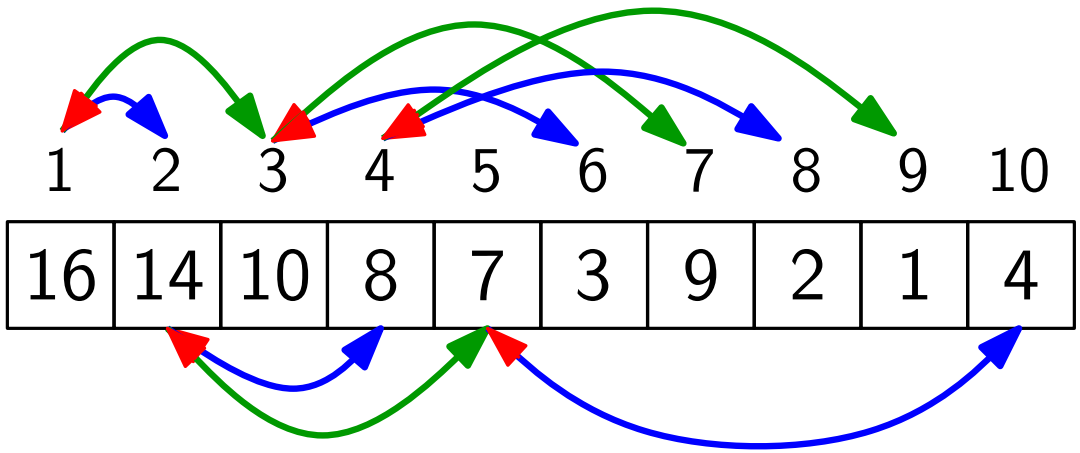
Das ist exponentiell besser!

Bäume, gut gepackt



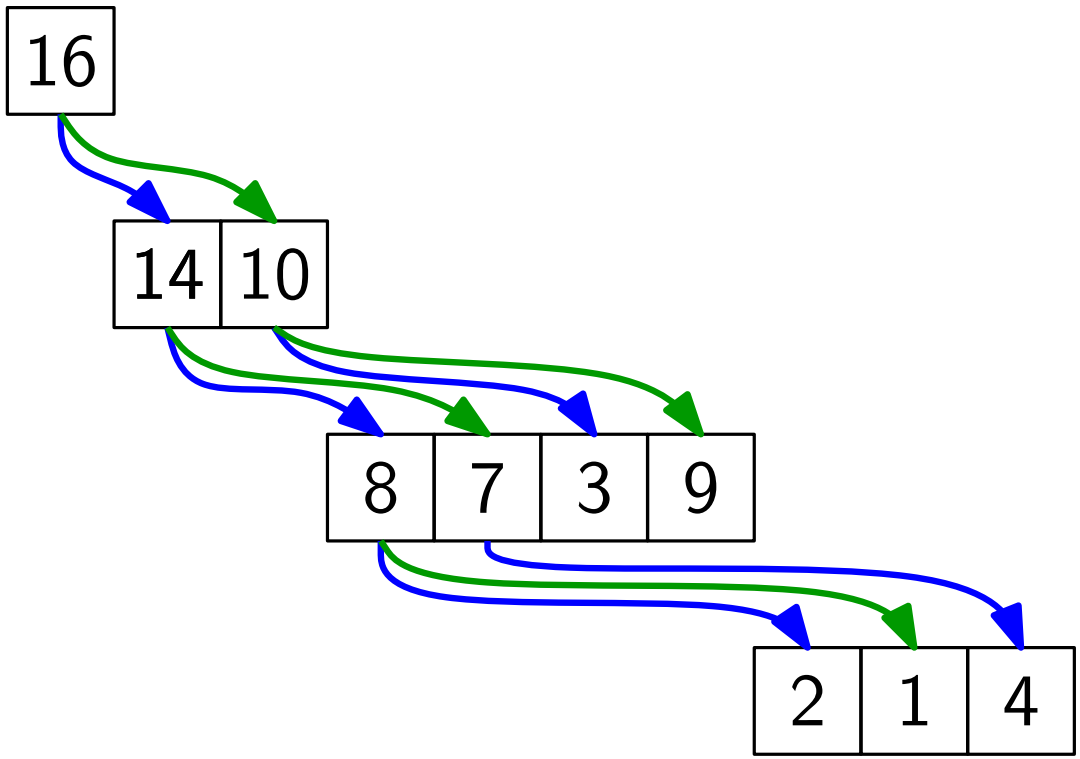
Bäume, gut gepackt

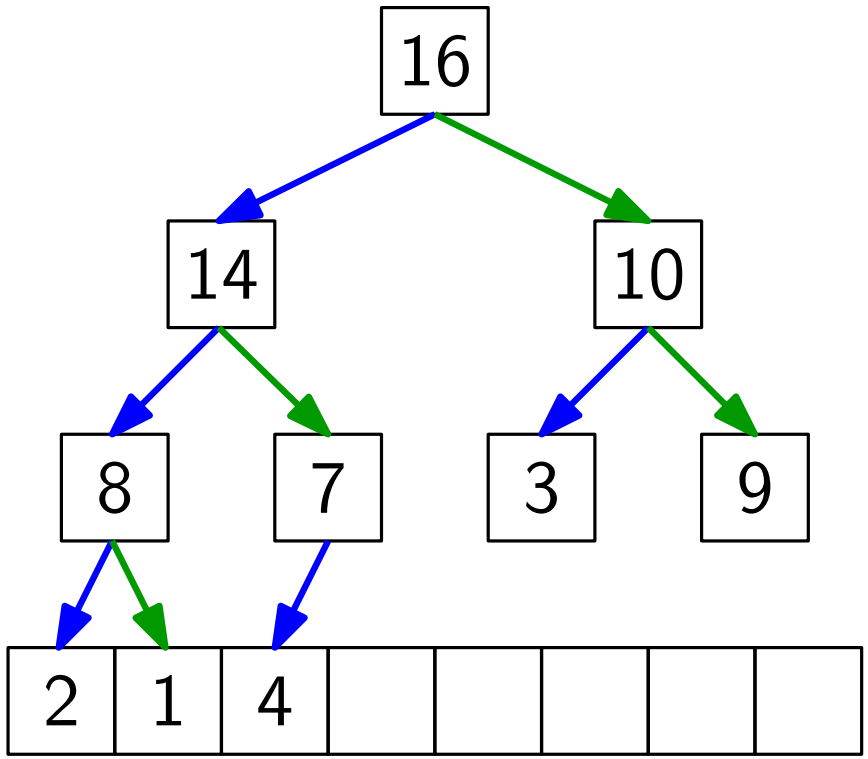
sehr schnelle Rechenoperationen!



Pfeile implementieren:

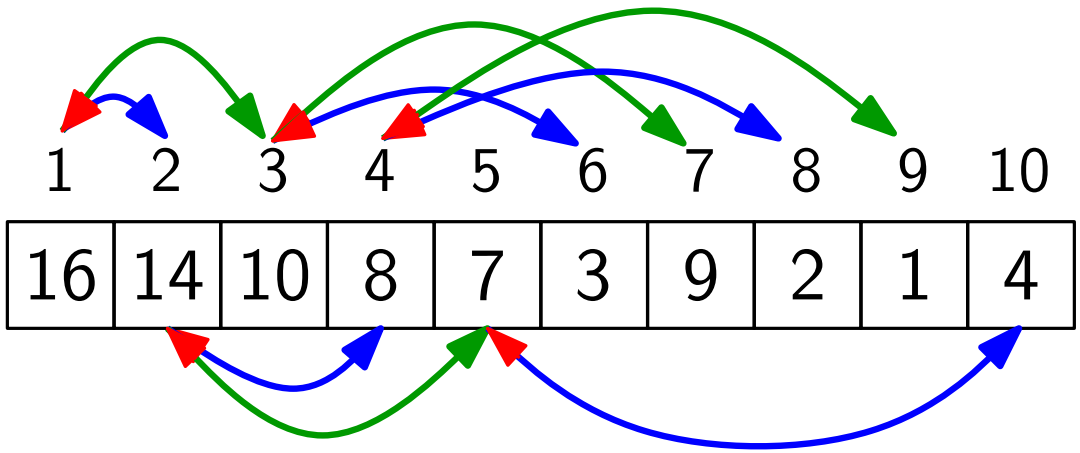
left(index i)	**return**	$2i$
right(index i)	**return**	$2i + 1$
parent(index i)	**return**	$\lfloor i/2 \rfloor$





Bäume, gut gepackt

sehr schnelle Rechenoperationen!



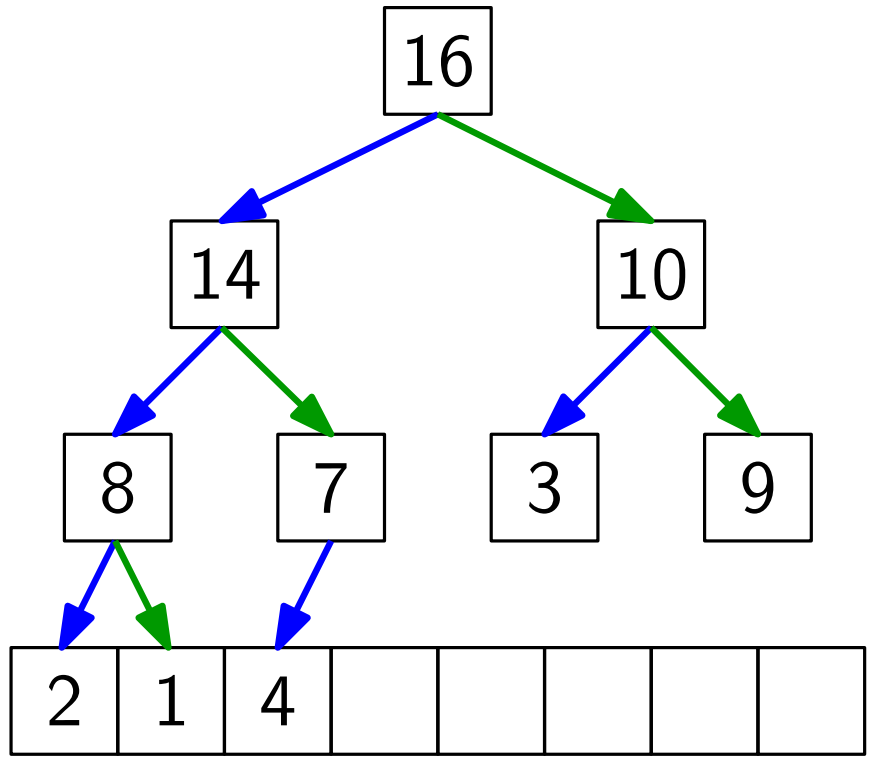
Pfeile implementieren:

left(index i)	**return**	$2i$
right(index i)	**return**	$2i + 1$
parent(index i)	**return**	$\lfloor i/2 \rfloor$

Definition:

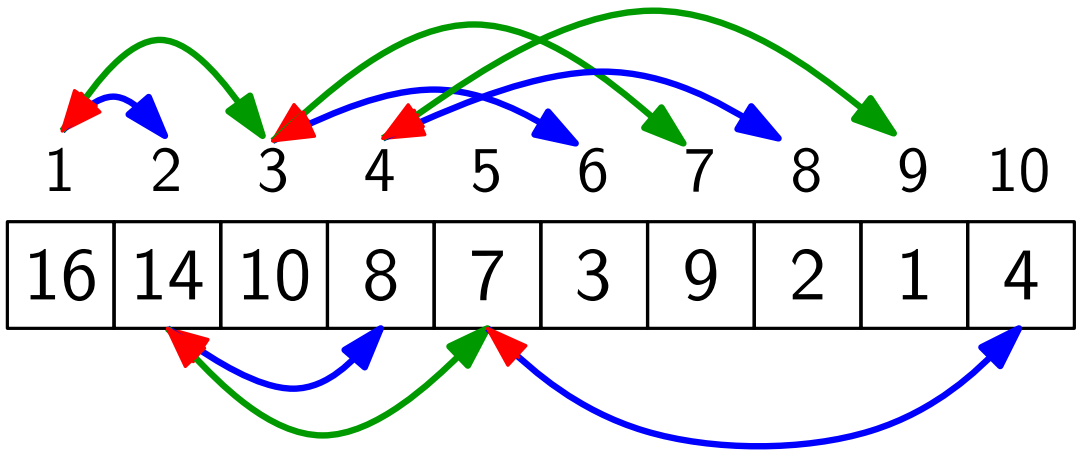
Ein *Heap* ist ein Feld, das einem binären Baum entspricht, bei dem

- alle Ebenen außer der letzten voll sind,
- die letzte Ebene v.l.n.r. gefüllt ist und
- die *Heap-Eigenschaft* gilt.



Bäume, gut gepackt

sehr schnelle Rechenoperationen!



Pfeile implementieren:

left(index i) **return** $2i$

right(index i) **return** $2i + 1$

parent(index i) **return** $\lfloor i/2 \rfloor$

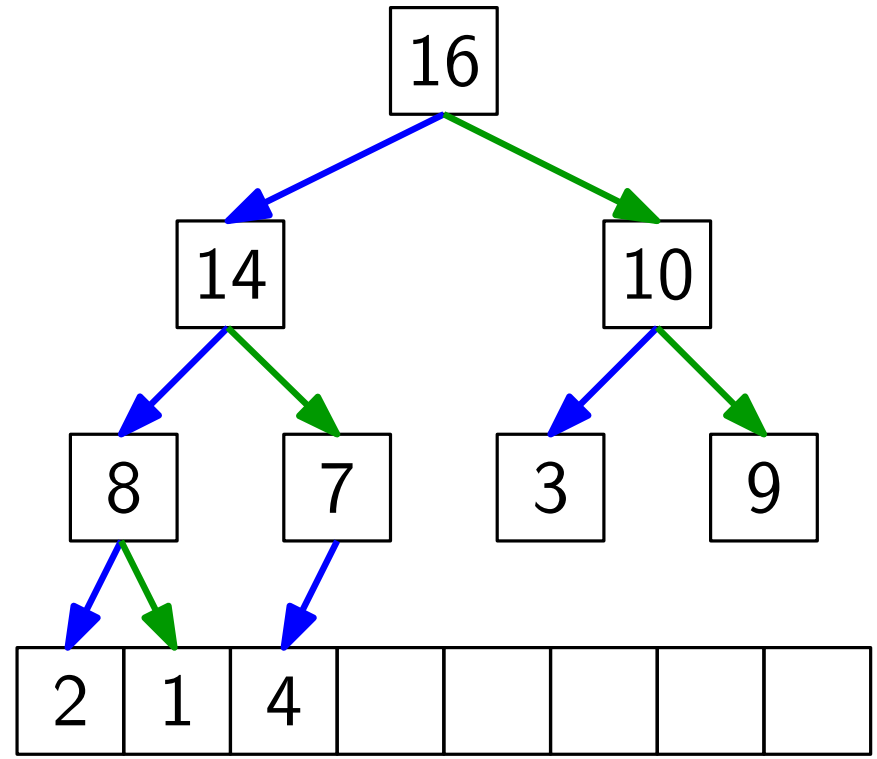
Definition:

Ein Heap hat die

Max-Heap-Eigenschaft,

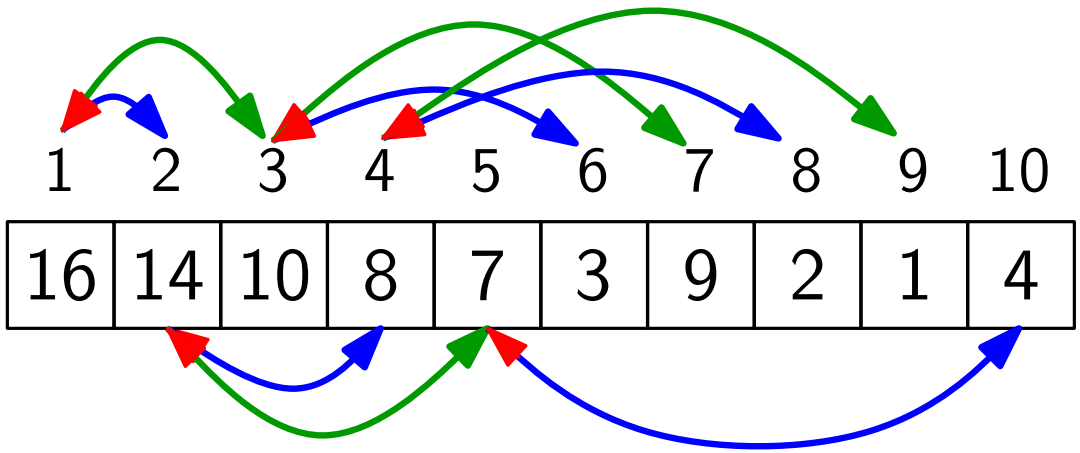
wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:
$A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$.

So ein Heap heißt *Max-Heap*.



Bäume, gut gepackt

sehr schnelle Rechenoperationen!



Pfeile implementieren:

left(index i) **return** $2i$

right(index i) **return** $2i + 1$

parent(index i) **return** $\lfloor i/2 \rfloor$

Definition:

Ein Heap hat die

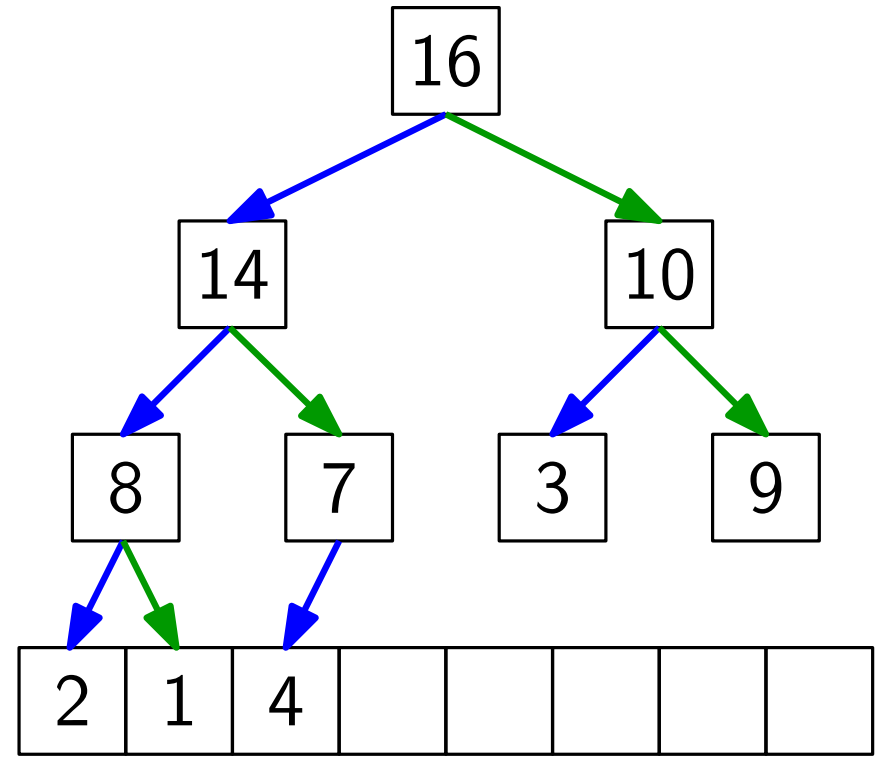
~~*Max*~~ *Min*-*Heap-Eigenschaft*,

wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:

$A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$.

$\leq$

So ein Heap heißt ~~*Max*~~ *Min*-*Heap*.



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

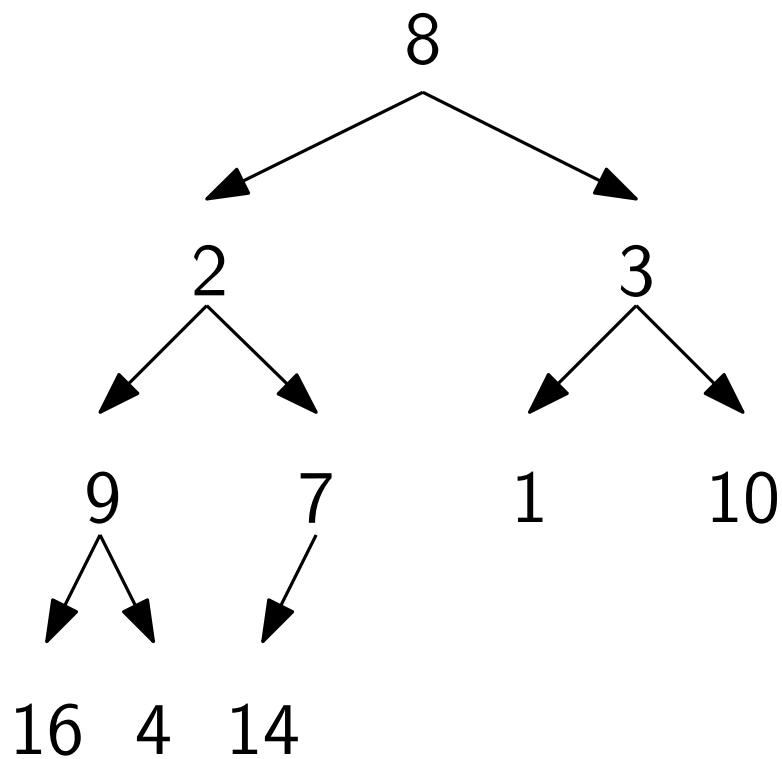
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

→

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

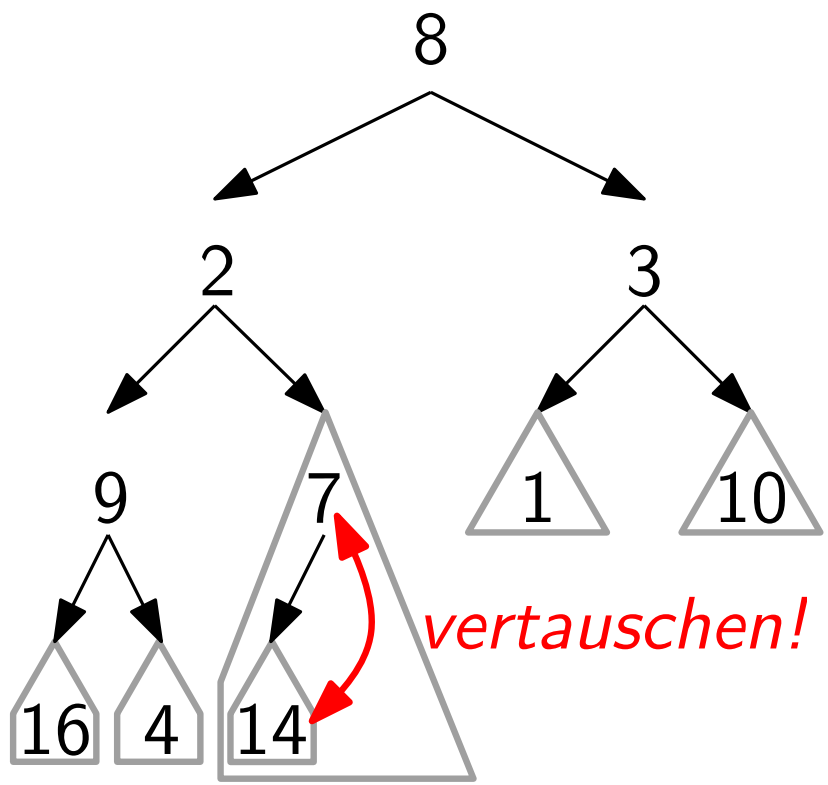
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

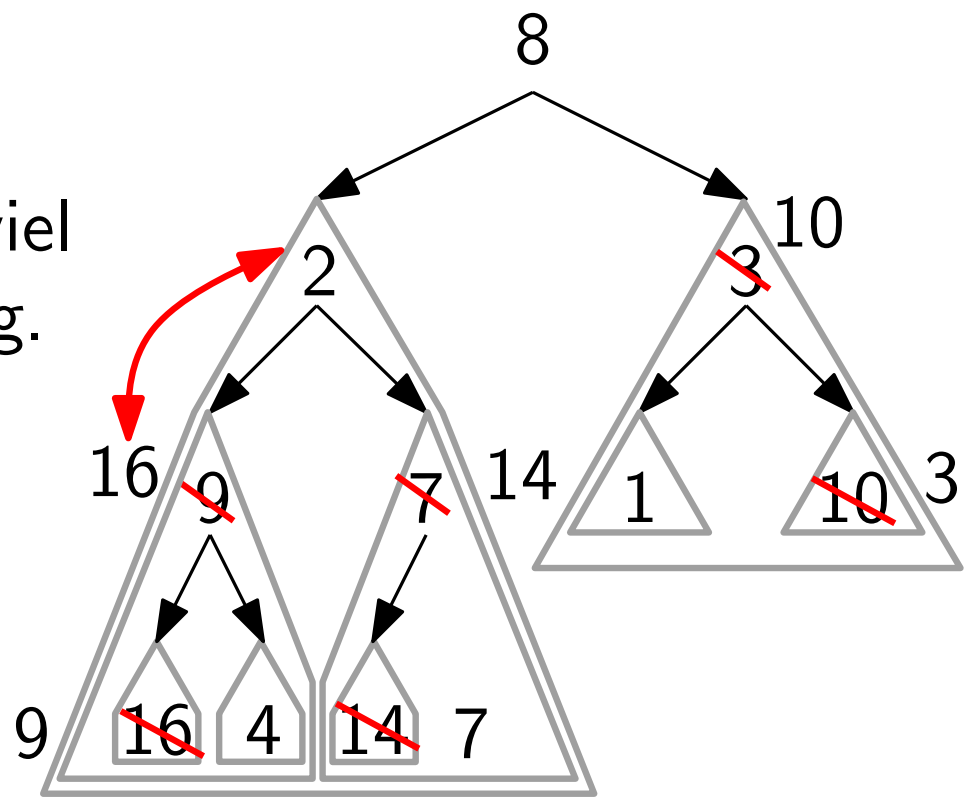
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

→

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

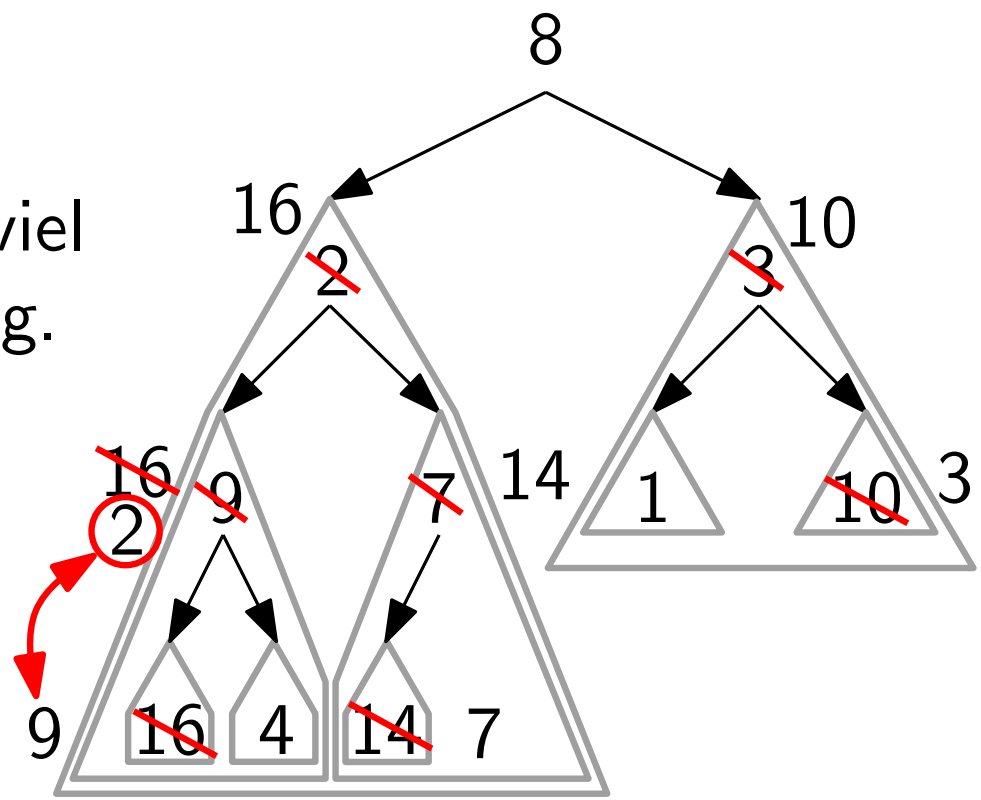
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14

„totales Chaos“

→

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1

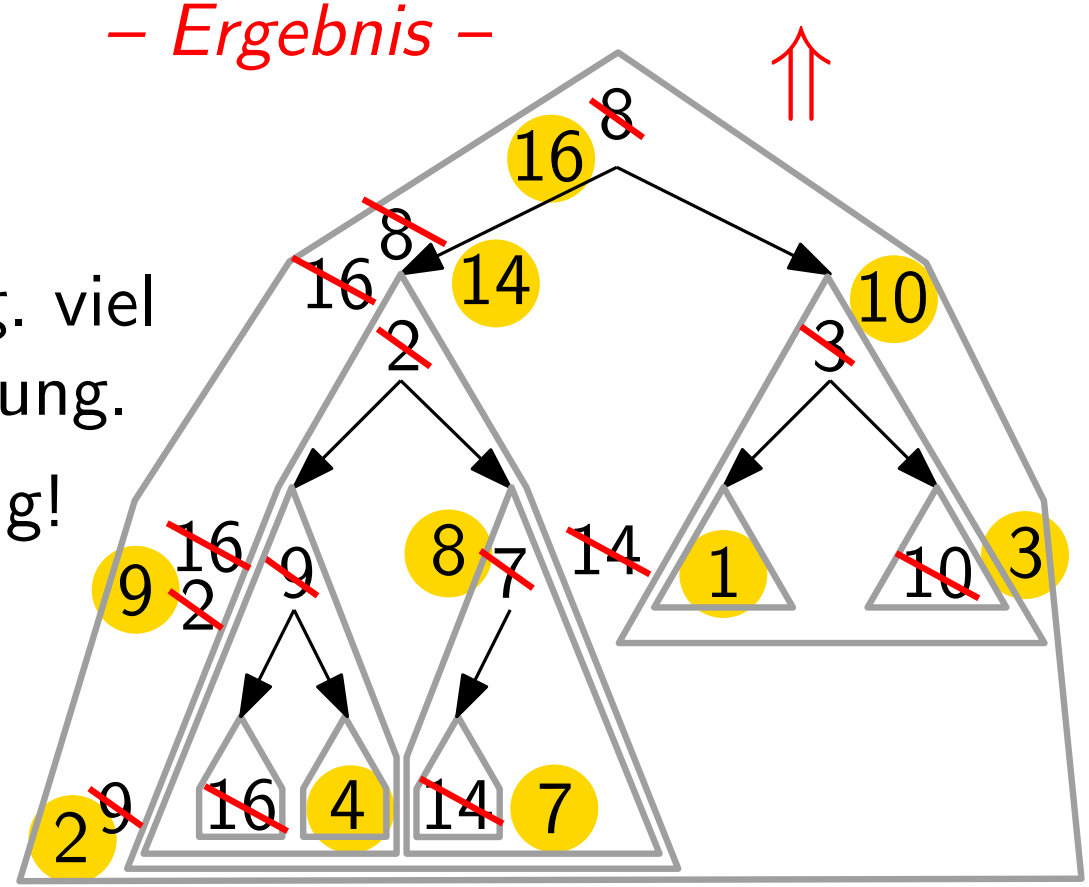
Absteigende Sortierung

– Ergebnis –

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

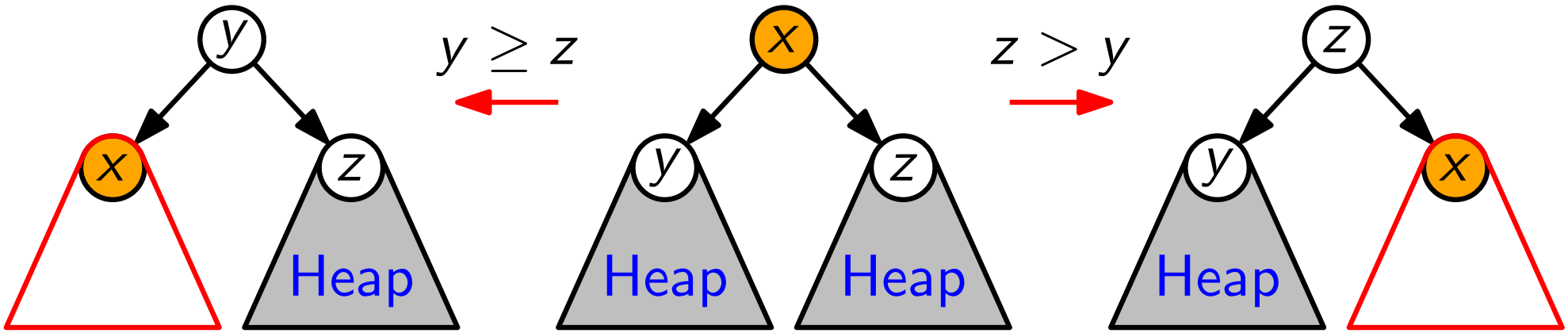
Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Elementaroperation

„Versickere“ x, falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



MaxHeapify(feld A, index i)
- $\ell = \text{left}(i)$; $r = \text{right}(i)$
- **if** $\ell \leq A.heap\text{-}size$ **and** $A[\ell] > A[i]$ **then**
  - $largest = \ell$
- **else** $largest = i$
- **if** $r \leq A.heap\text{-}size$ **and** $A[r] > A[largest]$
  - $largest = r$
- **if** $largest \neq i$ **then**
  - swap($A, i, largest$)
  - MaxHeapify($A, largest$)

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{\text{MH}}(n, i)$

$:=$ Anzahl der Swaps

$=$ Länge d. Weges v. $A[i]$

$\leq$ Höhe von i im Teilheap mit Wurzel i

$=$ Höhe dieses Teilheaps

Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{\mathrm{MH}}(n, i) \leq$ Höhe des Teilheaps mit Wurzel i

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(feld A)
    A.heap-size = A.length
    for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1 do
        MaxHeapify(A, i)
```

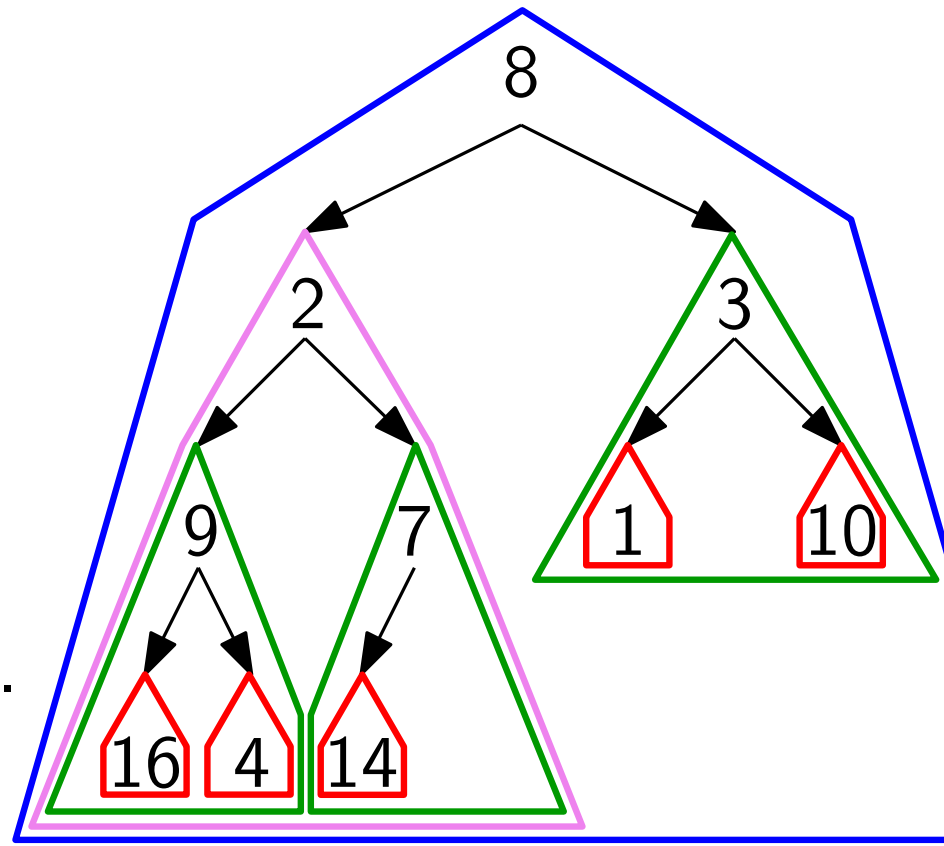
Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{\mathrm{BMH}}(n) =$

$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{\mathrm{MH}}(n, i)$

$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \ldots$

$= n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \cdot i \; = \; ?$



Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\mathrm{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \tfrac{n}{4} \sum_{i=1}^{\cancel{\lfloor \log n \rfloor}\ \infty} i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (falls $|x| < 1$)

ableiten! *ableiten!*

Wir hätten gerne: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Quotientenregel:

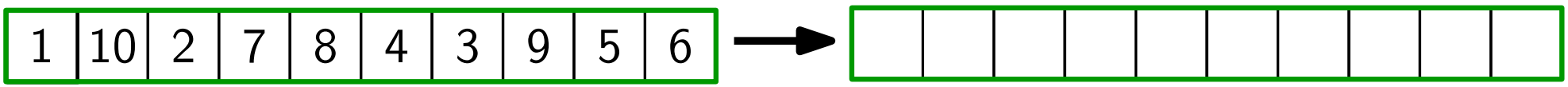
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

$$\Rightarrow\ T_{\mathrm{BMH}}(n) \leq \tfrac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = n$$

Satz. Ein Heap von n Elementen kann in $\Theta(n)$ Zeit berechnet werden.

Übung Heap-Aufbau

Aufgabe: Bauen Sie einen Heap mit BuildMaxHeap!




```
BuildMaxHeap(feld A)
    A.heap-size = A.length
    for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1 do
        MaxHeapify(A, i)
```

```
MaxHeapify(feld A, index i)
    ℓ = left(i); r = right(i)
    if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
        largest = ℓ
    else largest = i
    if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
        largest = r
    if largest ≠ i then
        swap(A, i, largest)
        MaxHeapify(A, largest)
```

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax() $O(\quad)$

return $A[1]$

ExtractMax() $O(\quad)$

if $A.heap\text{-}size < 1$ **then**
  error "Heap underflow"
$max = A[1]$
$A[1] = A[A.heap\text{-}size]$
$A.heap\text{-}size - -$
MaxHeapify$(A, 1)$
return max

Laufzeiten?

IncreaseKey(index i, prio. p) $O(\quad)$

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"
$A[i] = p$
while $i > 1$ **and** $A[\text{parent}(i)] < A[i]$
  swap$(A, i, \text{parent}(i))$
  $i = \text{parent}(i)$

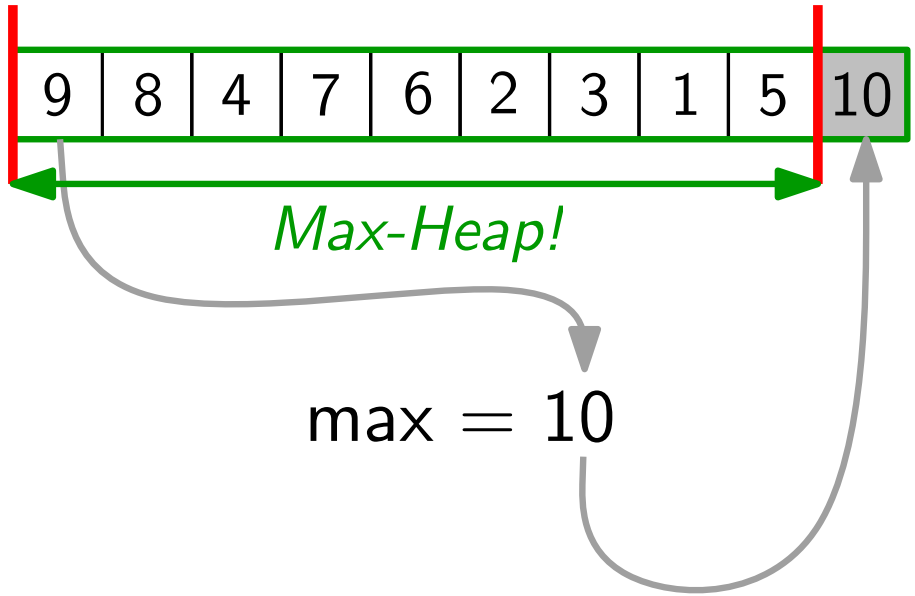
Insert(priorität p) $O(\quad)$

$A.heap\text{-}size + +$
if $A.heap\text{-}size > A.length$ **then error...**
$A[A.heap\text{-}size] = -\infty$
IncreaseKey$(A.heap\text{-}size, p)$

Vom Heap zur Sortierung

Idee:

- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.



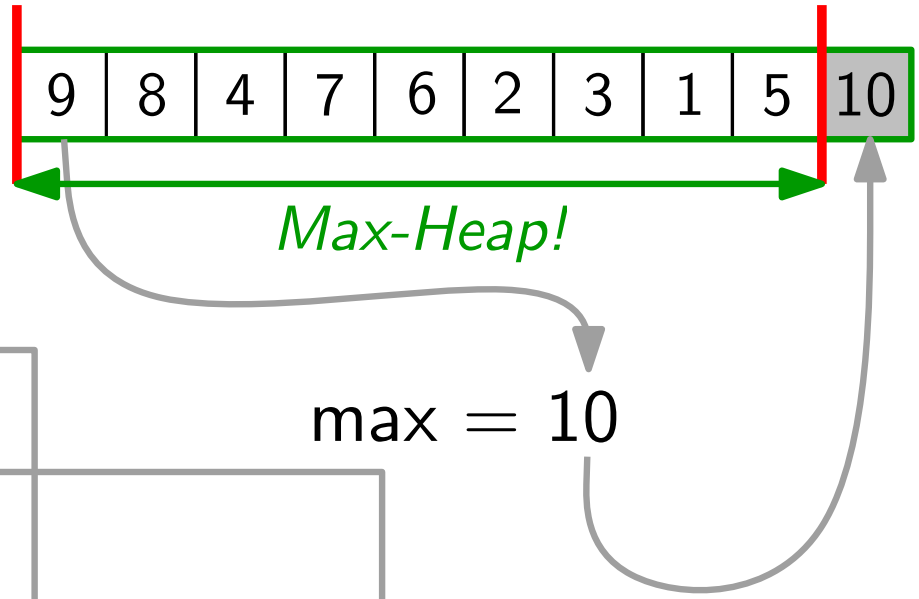
HeapSort(A)

Schreiben *Sie* den Pseudocode.
Verwenden Sie BuildMaxHeap
und ExtractMax.

Vom Heap zur Sortierung

Idee:

- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.




```
HeapSort(A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
```

Laufzeit: $T_{\mathsf{HS}}(n) \in O(n) + (n-1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ *Warum?*	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
in situ[1] (*in place*)	✓	✗	✓	
stabil[2]	✓	✓	✗	

[1]) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

[2]) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenf. belässt.