Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2017/18

5. Vorlesung

# Rekursionsgleichungen

*Prof. Dr. Alexander Wolff*

*Lehrstuhl für Informatik I*

# Lösen von Rekursions(un)gleichungen

**Frage:** Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T(n) \in O(n \log n)$ **?**

**Behauptung:** Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq cn \log_2 n$.

*Beweis.* Durch Induktion über $n$. Ind.-Anfang: $T(1) \leq 0$ ✓
Induktionsannahme: $\boxed{T(k) \leq ck \log_2 k}$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen IA)}$$
$$= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n$$
$$= cn \log_2 n - cn + 4n$$
$$= cn \log_2 n + (4 - c)n$$
$$\leq cn \log_2 n \ \text{ falls } c \geq 4.$$

*Substitutionsmethode:*

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0$...) $\Rightarrow T(n) \in O(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

# I) Substitutionsmethode

**Noch'n Beispiel:** $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

**Behauptung:** $T(n) \in O(n)$ (mit $T(1) = 0$)

Also zeigen wir: $T(n) \leq cn$ für eine Konstante $c > 0$.

*Beweis* Induktion über $n$.

IA: $T(k) \leq ck$ für alle $k < n$

Wissen:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \quad \text{wg. IA} \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot n + 1 \end{aligned}$$

# Noch'n Versuch

**Noch'n Beispiel:** $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

**Behauptung:** $T(n) \in O(n)$ (mit $T(1) = 0$)

Also zeigen wir: $T(n) \leq cn + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

*Beweis.* Induktion über $n$.

IA: $T(k) \leq ck + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\ &\leq c \cdot n + 3 \end{aligned}$$

# Nicht verzagen!

**Selbes Beispiel:** $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

**Behauptung:** $T(n) \in O(n)$ ✓ (mit $T(1) = 0$)

Nun probieren wir: $T(n) \leq cn - d$ für Konstanten $c, d > 0$. ✓

D.h. wir machen unsere Aussage *schärfer!!*

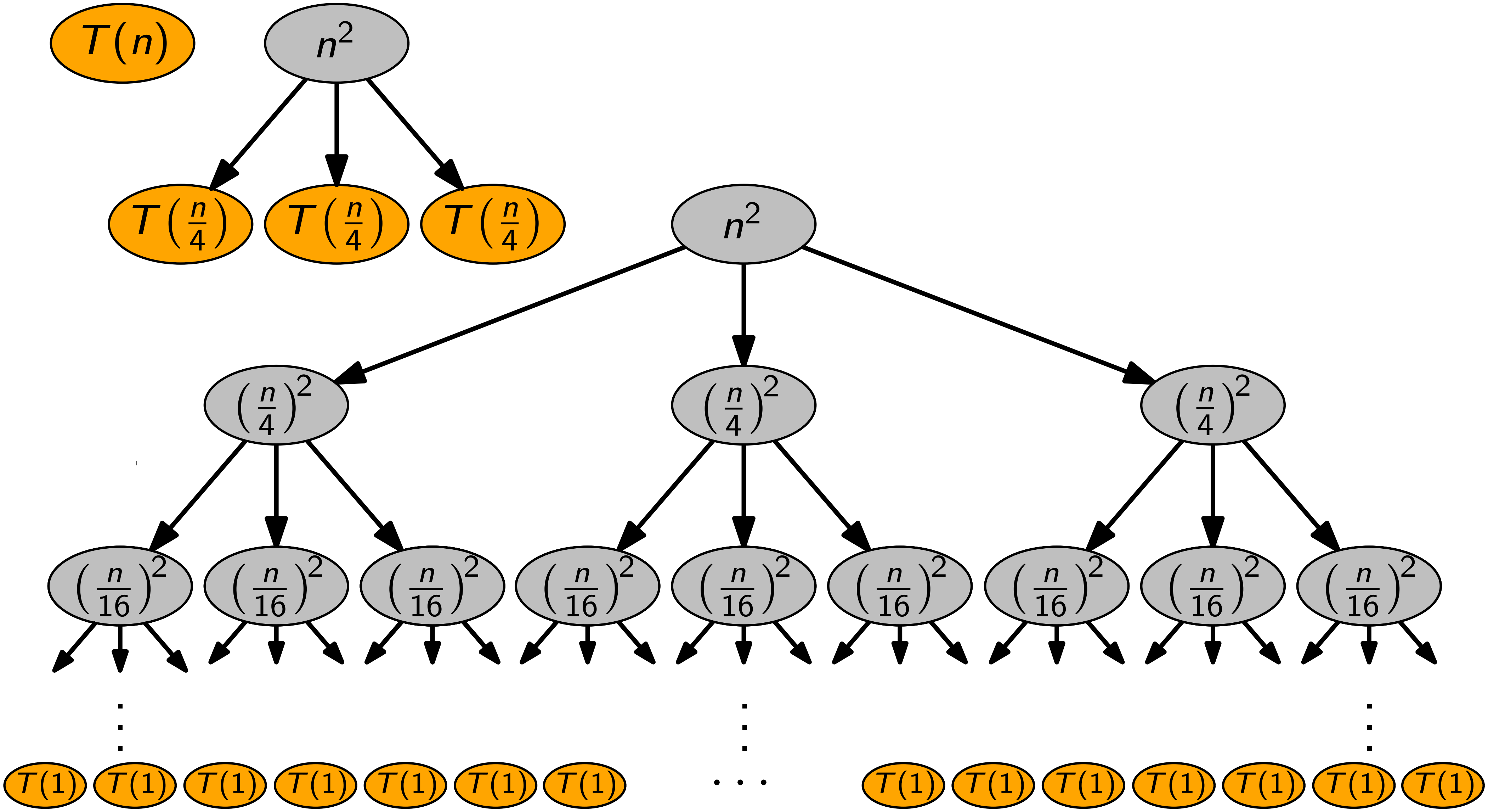
*Beweis.* Induktion über $n$.

IA: $T(k) \leq ck - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c\lfloor n/2 \rfloor - d) + (c\lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot \big(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\big) - d - d + 1 \\ &\leq cn - d + (1 - d) \\ &\leq cn - d \qquad \text{falls } d \geq 1. \end{aligned}$$
✓

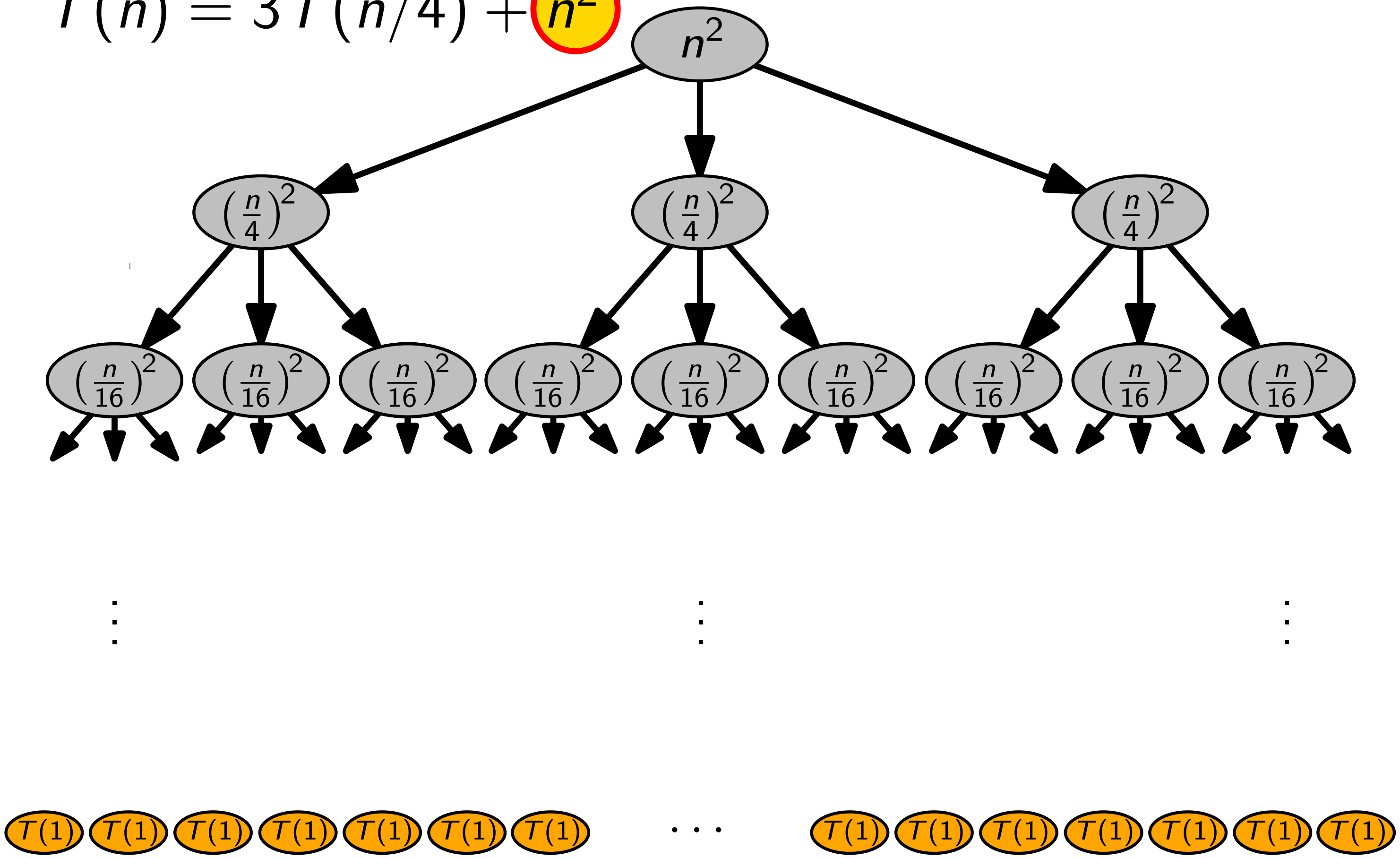
# II) Rekursionsbaummethode

**Beispiel:** $T(n) = \boxed{3T(n/4)} + \boxed{n^2}$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



# II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$




| lfd.Nr. Ebene | Anz. Knoten | Beitrag (Ebene) |
|---|---|---|
| $0$ | $3^0 = 1$ | $n^2$ |
| $1$ | $3^1$ | $\frac{3}{16} n^2$ |
| $2$ | $3^2$ | $\frac{3^2}{16^2} n^2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{3^i}{16^i} n^2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\log_4 n$ | $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ | $n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$ |

0. Summand schon $1n^2$!

unterste Ebene andere Ebenen

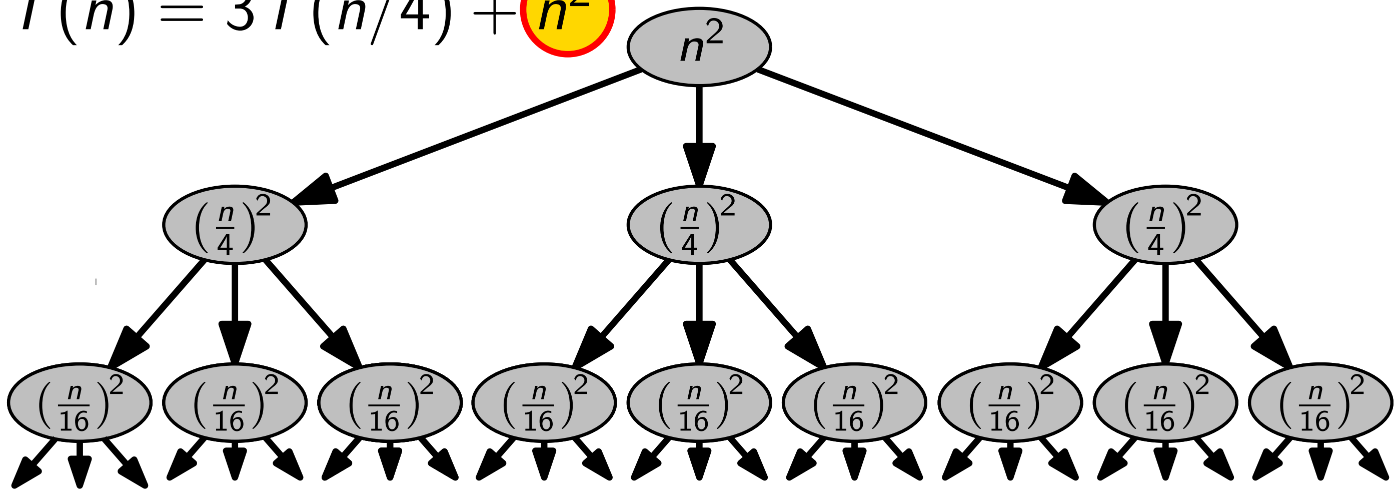
geometr. Reihe!!!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \le n^{0,793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

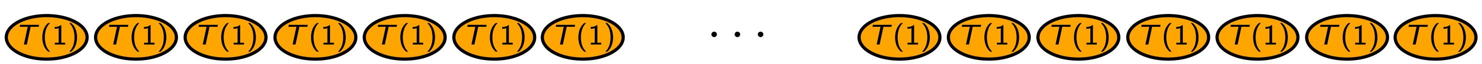
# II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$




$\vdots$ $\vdots$

Berechnen Sie mit der Rekursionsbaummethode $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$, wobei $T(1) = 0$.




| lfd.Nr. Ebene | Anz. Knoten | Beitrag (Ebene) |
|---|---|---|
| $0$ | $3^0 = 1$ | $n^2$ |
| $1$ | $3^1$ | $\frac{3}{16} n^2$ |
| $2$ | $3^2$ | $\frac{3^2}{16^2} n^2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{3^i}{16^i} n^2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\log_4 n$ | $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ | $n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$ |

0. Summand schon $1n^2$!

unterste Ebene    andere Ebenen    *geometr. Reihe!!!*

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \le n^{0,793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

# III) Meistermethode

*Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...*

*Achtung!*

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ Konst. und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *asymptotisch positiv*...

*...und auch da nicht in allen Fällen!*

# III) Meistermethode

**Satz:** Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei $n/b$ sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in O(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textit{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

**Definition:** Die *Regularitätsbedingung* ist erfüllt, falls

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

für ein $c < 1$ und für alle großen $n$.

# III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in O(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textit{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

**Beispiel:** $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow\ a = 3\ (\geq 1),\ b = 4\ (> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

$\underbrace{\text{Das ist Fall 3!} \quad \Rightarrow \quad T \in \Theta(f) = \Theta(n^2)}$ $\square$

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

$3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$, z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

*Wichtig:* Unser $c$ muss *echt* $< 1$ sein! ✓

*Üben! Hausaufgaben!*

# Übersicht

- *Substitutionsmethode*

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- *Rekursionsbaummethode*

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- *Meistermethode*

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  **Achtung:** Viele verstehen die Bedeutung von $\varepsilon$ in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  **Beispiel:** $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

  $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$

  aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$ **!!**

Also können wir die Meistermethode hier **nicht** verwenden!

**Grund:** $\log n$ wächst langsamer als $n^{\varepsilon}$, für jedes $\varepsilon > 0$.

**PS:** Wie könnte man das beweisen?