Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2017

8. Vorlesung

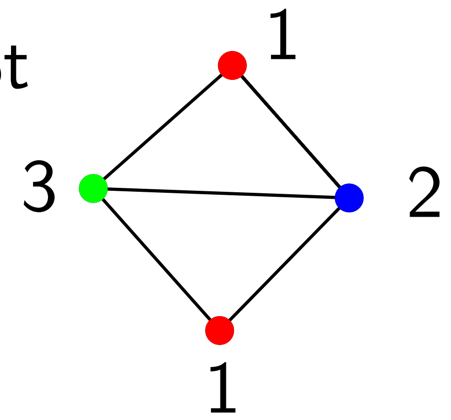
Färbungen, Cliquen und unabhängige Mengen

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung $f\colon V \to \{1, \ldots, k\}$, so dass für alle $uv \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

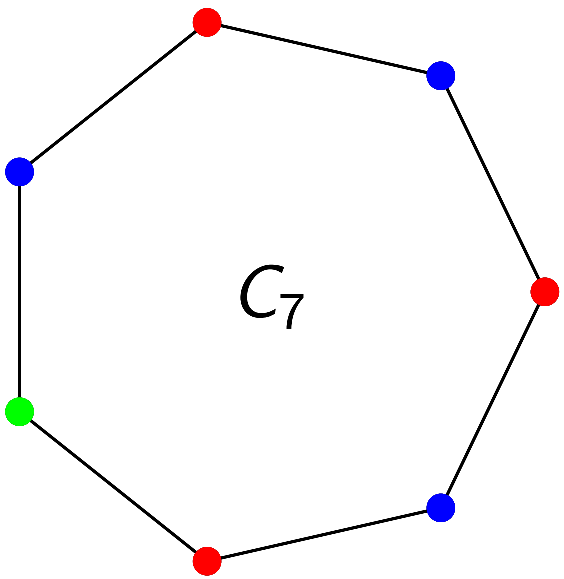
$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt *chromatische Zahl* von G.



Bsp.

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

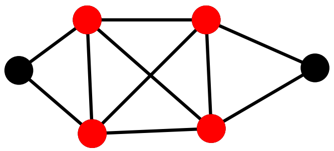
Kreis mit n Knoten



Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E$.

$\omega(G) = \max\{|C|\colon C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G.



Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: (A) $\chi(G) \geq \omega(G)$.
~~(B) $\chi(G) \leq \omega(G)$~~.

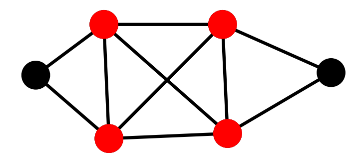
Bsp. Wann gilt $\chi(G) > \omega(G)$?
Wann gilt $\chi(G) = \omega(G)$?

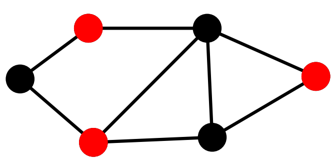
Cliquen und unabhängige Mengen

unabhängige (oder *stabile*) *Menge*

Def. Eine ~~*Clique*~~ ist eine Menge $C \subseteq V$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \cancel{\in} E$.

$\omega(G) = \max\{|C| \colon C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G.





$\alpha(G) = \max\{|U| \colon U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$
heißt *Unabhängigkeitszahl* (o. *Stabilitätszahl*) von G.

Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: (A) $\chi(G) \geq \omega(G)$.
$\cancel{\text{(B)} \ \chi(G) \leq \omega(G)}$.

Bsp. Wann gilt $\chi(G) > \omega(G)$?

Wann gilt $\chi(G) = \omega(G)$?

Zusammenspiel

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \dots, k$ eine unabhängige Menge.
$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \;\Rightarrow \chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

Farbklasse

Kor. $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Beob$_3$. $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$

Beweis. Sei f eine k-Färbung von G mit $k = \chi(G)$

sonst gäb's eine $(k-1)$-Färbung

Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.

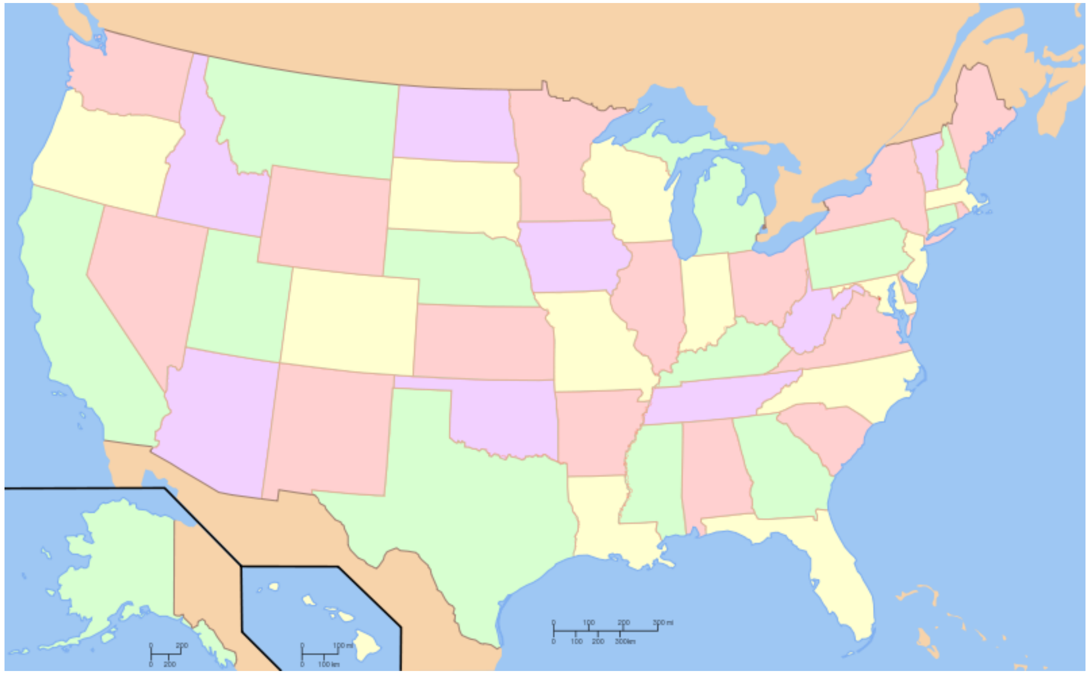
$\Rightarrow |E| \geq k(k-1)/2 \;\Rightarrow \chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$

$\square$

ÜA. Finde Graphen, für den Gleichheit (abgerundet) in Beob$_3$ gilt! $\rightsquigarrow$ z.B. vollständiger Graph K_n mit n Knoten

Anwendungen Färbungen

- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Kante bedeutet Interferenz)
- Färben von politischen Landkarten (*planare* Graphen)
- Ablaufplanung (minimiere Makespan) bei Zugriff auf beschränkte Ressourcen



Komplementgraph

Def. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Dann ist $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} := \binom{V}{2} \setminus E$ der *Komplementgraph* von G.

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von V

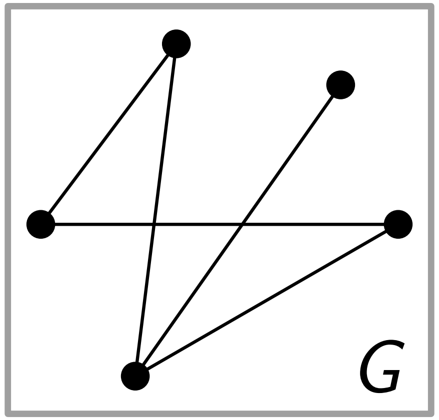
Beob$_4$. Es gilt

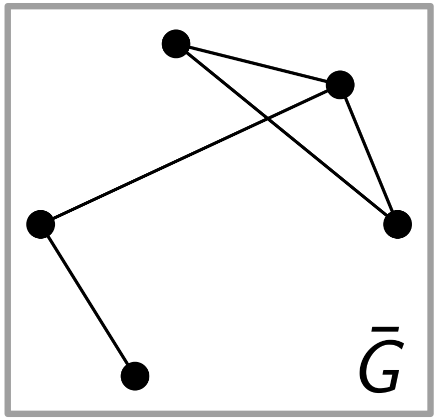
(i) $|E| + |\bar{E}| = \binom{|V|}{2}$

(ii) $\bar{\bar{G}} = G$

(iii) S Clique in $G \Leftrightarrow S$ unabhängig in $\bar{G}$

(iv) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ und $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$





Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

ex. $U \subseteq V$ mit $H = G[U] = (U, \{\, uv \in E \mid u, v \in U \,\})$

Beob$_1$: stets $\omega(H) \leq \chi(H)$

Warum Anforderung für *alle* induzierten Teilgraphen und nicht nur $\omega(G) = \chi(G)$?

vollst. Graph mit q „neuen" Knoten

betrachte $G' := G + K_q$ für $q := \chi(G)$

dann gilt $q \leq \omega(G') \leq \chi(G') = \chi(G) = q$

K_q Clique Beob$_1$ G und K_q disj. und q-färbb.

$\Rightarrow \omega(G') = \chi(G')$ liefert keine strukturelle Information über G' bzw. G

Perfect Graph Theorem

Satz. G ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist.

Beweis. Lovász 1972 $\square$

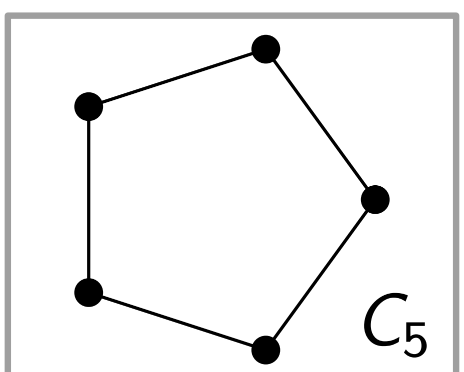
László Lovász

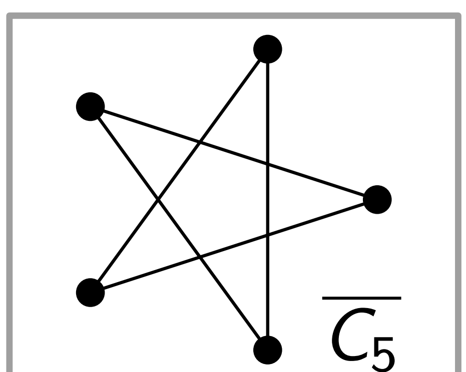
Bsp. $\omega(C_{2k+1}) = 2 < 3 = \chi(C_{2k+1})$ für $\boxed{k \geq 2}$

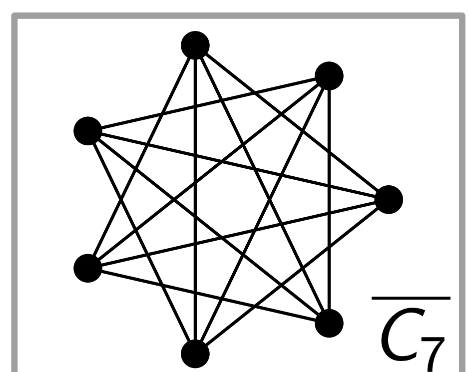
$\leadsto$ C_{2k+1} nicht perfekt $\leadsto$ $\overline{C_{2k+1}}$ nicht perfekt

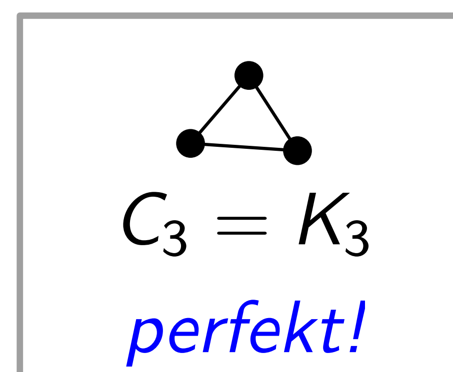
ungerades Loch ungerades Antiloch

G perfekt $\Rightarrow$ kein induzierter Teilgraph von G ist ungerades Loch oder ungerades Antiloch









Strong Perfect Graph Conjecture

~~Vermutung.~~ [Berge '60]

Satz. G ist *genau* dann perfekt, wenn kein ind. Teilgraph von G ein ungerades Loch oder Antiloch ist.

Beweis. Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas 2003 $\square$

Erkennung. Polynomialzeit [Chudnovsky et al. '03]

Warum perfekte Graphen?

Beliebige Graphen:
Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist NP-schwer!

Satz. Die Berechnung von $\alpha(G), \omega(G)$ und $\chi(G)$ ist für *perfekte* Graphen effizient möglich.

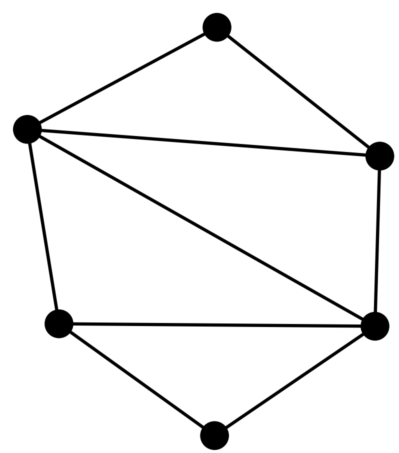
Beweis. Grötschel, Lovász, Schrijver 1988 $\square$

Wir zeigen dies für eine Teilklasse, die sog. *chordalen* Graphen.

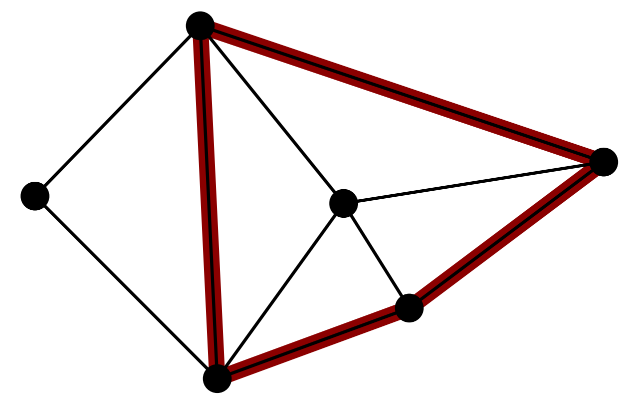
Chordale Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder elementare Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.

Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.



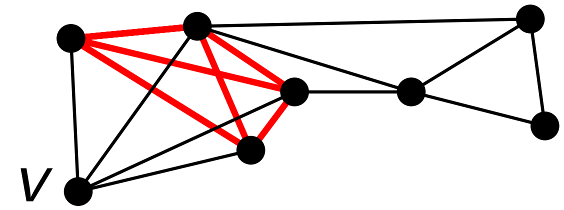
chordal



nicht chordal

Beob$_5$. G chordal $\Rightarrow$ jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal.

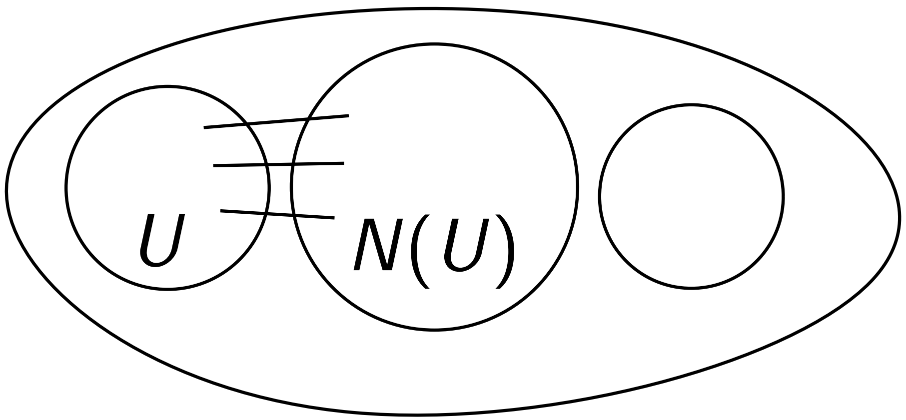
Simpliziale Knoten



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. [Dirac '61]



Induktion über $n = |V|$

IA: $G = \{v\} \leadsto$ O.K.

IS: $n \geq 2$, falls $G = K_n \leadsto$ O.K.

angenommen $G \neq K_n \leadsto$ existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E$

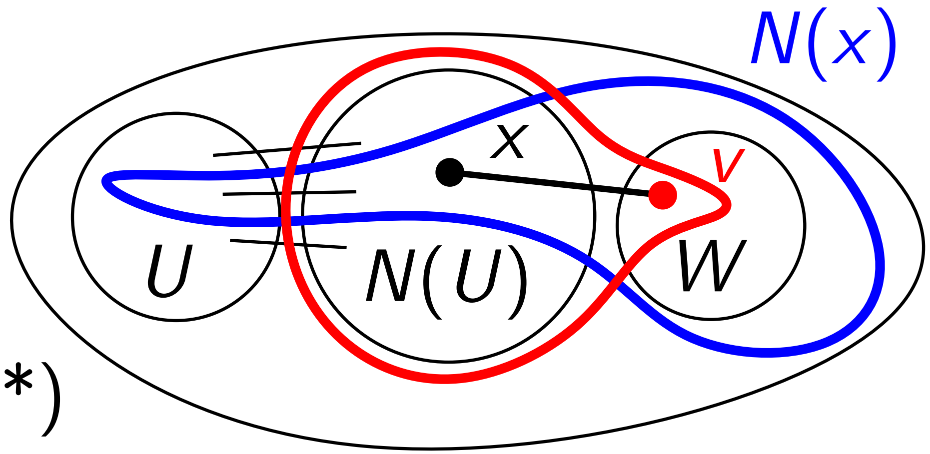
wähle $U \subseteq V$ mit maximaler Kardinalität, so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V$ $\quad N(U) := \{a \in V - U \mid \exists b \in U \colon ab \in E\}$

ein solches U existiert: setze $U := \{u\} \leadsto v \notin N(u) \cup \{u\}$

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$. (*)

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd. und $U' \cup N(U') \neq V$

$|U'| > |U|$ max. $\lightning$

Beob$_5$. $\Rightarrow G[W]$ chordal $\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $N(v)$ Clique)

Nachbarn $N(v) \cap W$ Clique, da v simplizial in $G[W]$

Wegen (*) ist jedes $w \in N(v) \cap W$ adjazent zu jedem Knoten in $N(U)$ und insb. zu jedem Knoten in $N(v) \cap N(U) = N(U)$.

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

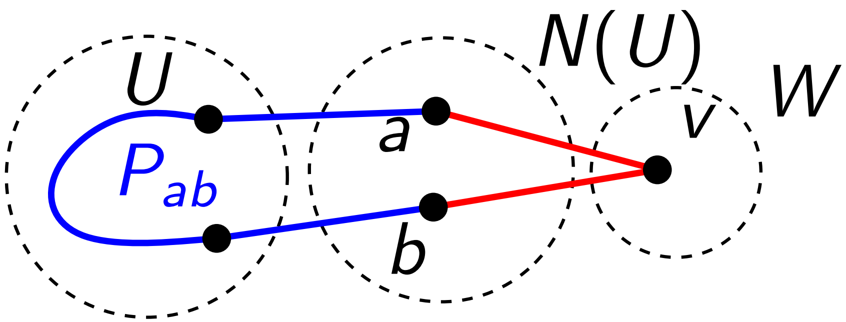
Beweis (Fortsetzung)

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Ang. ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E$.

ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$ da $G[U]$ zshgd.

o.E. P_{ab} *kürzester* solcher Weg



P_{ab} hat Länge ≥ 2 da $ab \notin E$

$\rightsquigarrow$ $C := P_{ab} + bv + va$ ist elementarer Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg $\lightning$

$\rightsquigarrow$ $N(U)$ ist eine Clique

$\rightsquigarrow$ $N(v)$ ist eine Clique

$\rightsquigarrow$ v ist simplizialer Knoten in G $\square$

Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge V heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$.

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \text{ ist simplizial in } G[V] = G \\[2ex] v_2 \text{ ist simplizial in } G[V - v_1] = G - v_1 \\[2ex] v_3 \text{ ist simplizial in } G - \{v_1, v_2\} \text{ usw.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Chordale Graphen:} \\ \text{Iteriere Dirac!} \end{array}$$

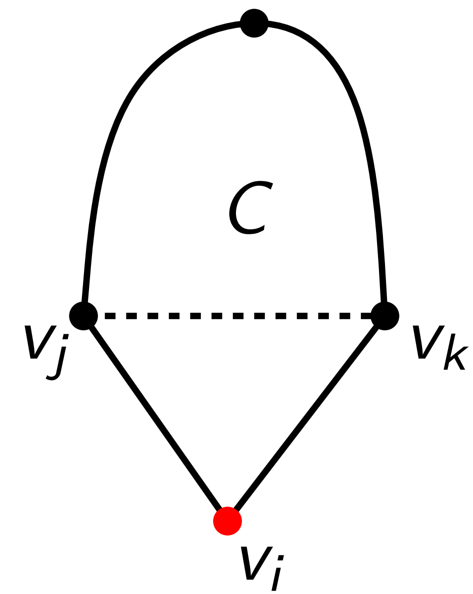
Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„$\Leftarrow$“



Sei C elem. Kreis der Länge ≥ 4.

Sei $v_i \in C$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.

Nachbarn v_j, v_k von v_i auf C sind adjazent in G, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$ und $j, k \geq i$. $\square$

Perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac: $O(V^4) = O(V \cdot V \cdot V^2)$).

Mit mehr „Cleverness“ sogar *Linearzeit* möglich!

Berechnung größter Cliquen

Satz. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema.
Dann hat jede größte Clique C in G die Form
$C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Bew. Sei $v_i \in C$ mit kleinstem i.

$N'(v_i) := N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ Clique,
da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$ und

$N'(v_i)$ enthält alle Knoten aus $C - v_i$.

Da C maximal, gilt $\{v_i\} \cup N'(v_i) = C$. $\square$

Es gibt $\leq |V|$ Cliquen obiger Form in G.

Also können wir eine größte Clique (und somit $\omega(G)$) in Polynomialzeit berechnen – durch Aufzählen dieser Cliquen.

Berechnung optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \dots, 1$:
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl.

$v_{i+1}, \dots, v_n$ bereits gefärbt

Da $v_i \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) =: C_i$ Clique, gilt $|C_i| \le \omega(G)$.

Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| \le \omega(G) - 1$.

$\Rightarrow$ Können v_i stets mit einer der Farben $\{1, \dots, \omega(G)\}$ färben.

Wegen $\omega(G) \le \chi(G)$ gilt, dass unsere Färbung optimal ist!
Außerdem $\omega(H) = \chi(H)$ ... für jeden induz. Teilgr. $H = G[V']$.

Satz. Jeder chordale Graph ist perfekt.
In chordalen Graphen kann man größte Cliquen und optimale Färbungen effizient ermitteln.