Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT WÜRZBURG
Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und wissensbasierte Systeme
Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2017

6. Vorlesung

Wurzelspannbäume

Dr. Joachim Spoerhase

Prof. Dr. Alexander Wolff

Wiederholung letzte Vorlesung

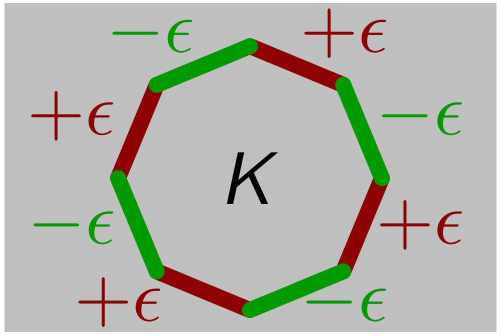
Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den NB.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	$u \in A \cup B$
$x_{uv} \geq 0$	$\cancel{x_{uv} \in \{0,1\}}$	$uv \in E$

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen.

- Wir stellen ein ganzzahliges lineares Programm (ILP) auf (mit einer Variable $x_e \in \{0,1\}$ für jede Kante e).
- Betrachte die Relaxierung ($x_e \geq 0$). Dies ist ein LP!
  Wir können es also (im Ggs. zum ILP) effizient lösen.
  Für LP-Lösung $\mathbf{x}$ und ILP-Lösung $\mathbf{y}$ gilt:
  $\sum_{e \in E} c_e x_e \leq \sum_{e \in E} c_e y_e$, d.h. $\mathbf{x}$ ist nicht teurer als $\mathbf{y}$.
  Leider enthält $\mathbf{x}$ i.A. fraktionale Variable ($e \in E$ mit $0 < x_e < 1$).
- Jeder Knoten ist zu 0 oder ≥ 2 fraktionalen Kanten inzident.
  $\Rightarrow$ Falls $\mathbf{x} \notin \{0,1\}^{|E|}$, so gibt es einen fraktionalen Kreis K.
  Da Graph bipartit, hat K gerade Länge, d.h. $K = M_1 \cup M_2$.
  $\Rightarrow$ K lässt sich in zwei Matchings M_1 und M_2 zerlegen.

Forts. Wiederholung

- OBdA. $c(M_1) > c(M_2) = \sum_{e \in M_2} c_e$. Sei $\varepsilon = \min_{e \in M_1} x_e$.
  Für $e \in M_1$: setze $x'_e = x_e - \varepsilon$.
  Für $e \in M_2$: setze $x'_e = x_e + \varepsilon$.
  Für $e \in E \setminus K$: setze $x'_e = x_e$.

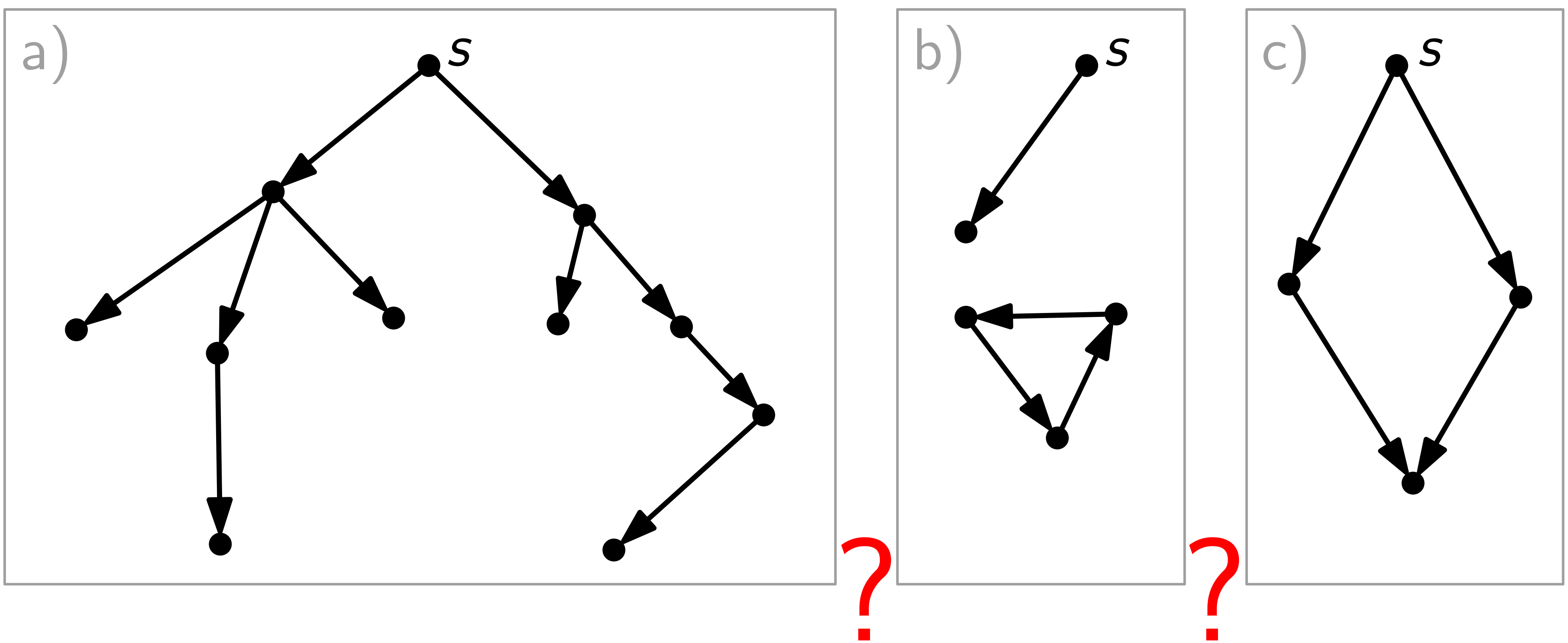
  $\Rightarrow$ $\mathbf{x}'$ ist zulässige LP-Lösung und nicht teurer als $\mathbf{x}$.
  Mindestens eine Kante e in M_1 hat $x_e = \varepsilon$ und $x'_e = 0$.
  D.h. $\mathbf{x}'$ hat mehr ganzzahlige Variable als $\mathbf{x}$.
- Wiederhole die Suche nach franktionalen Kreisen.
  Runde wie oben, bis alle Variable ganzzahlig sind.
- Die resultierende ganzzahlige Lösung $\mathbf{x}^{(k)}$ ist
  – nicht teurer als $\mathbf{x}'$,
  – also nicht teurer als $\mathbf{x}$,
  – also nicht teurer als $\mathbf{y}$, also optimal.

Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

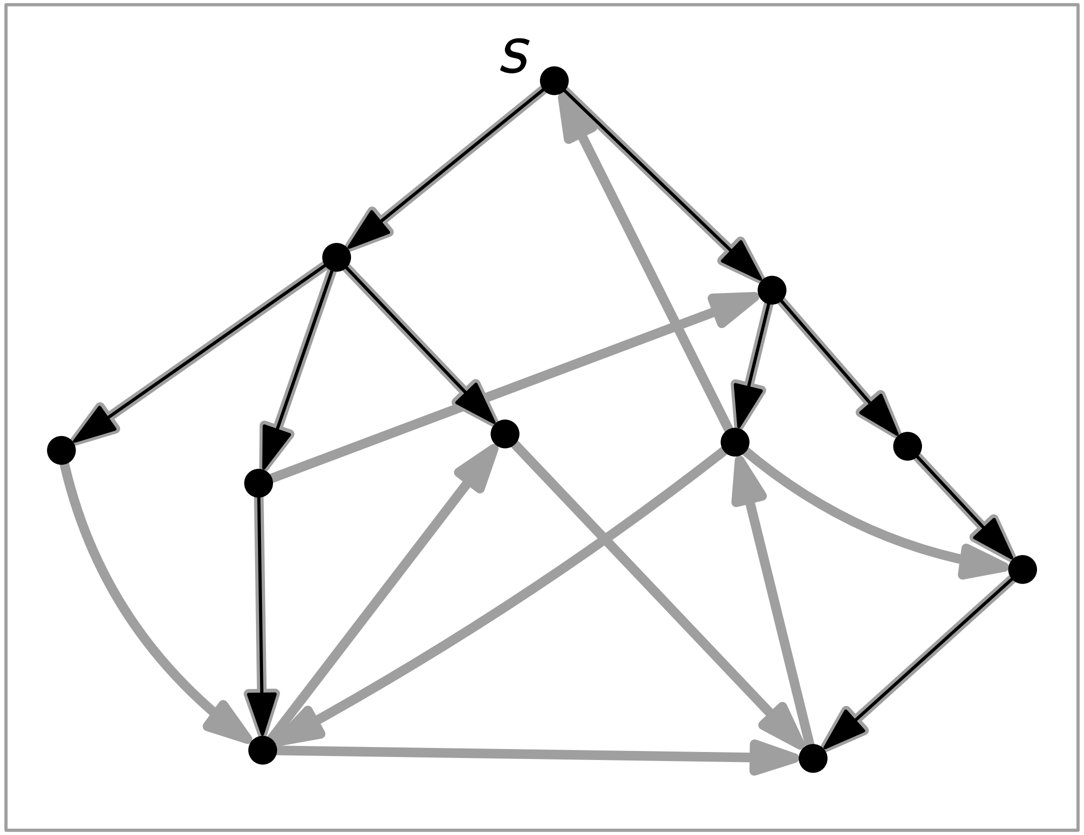
- T azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$ und
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

T enthält keinen (gerichteten) Kreis.



Wurzelspannbäume

Def. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge V heißt s-**Wurzelspannbaum** von G, wenn T ein s-Wurzelbaum ist.



Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s.
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.

Es existiert ein s-v-Pfad in G.

Beweis.

Siehe Übungsblatt. $\square$

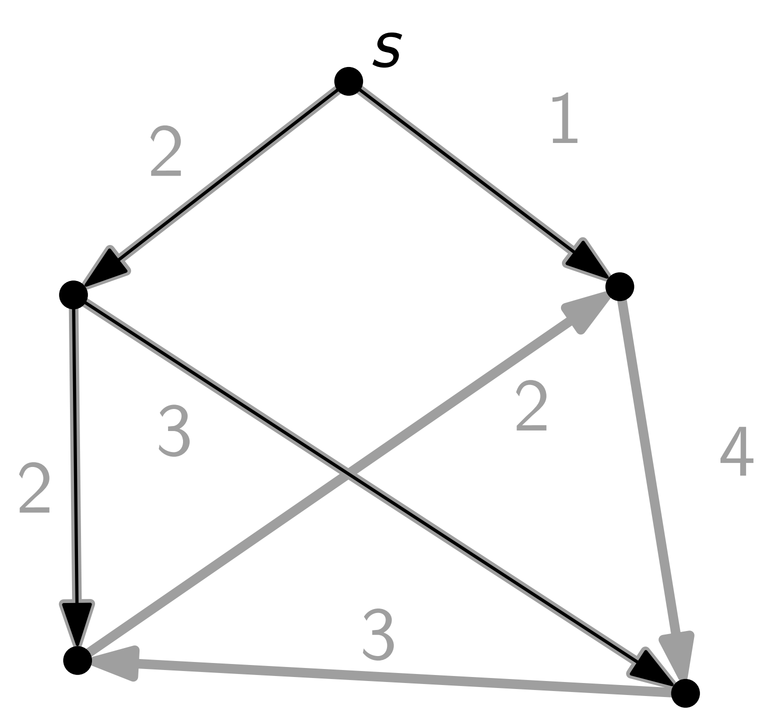
Bemerkung.

DFS(s) liefert s-Wurzelspannbaum (sofern einer existiert).

Minimale Wurzelspannbäume

Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von G (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



Motivation:

Broadcast (Versenden von Information von s an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

Übungsaufgabe:

Kruskal und Jarník-Prim schlagen i.A. fehl!

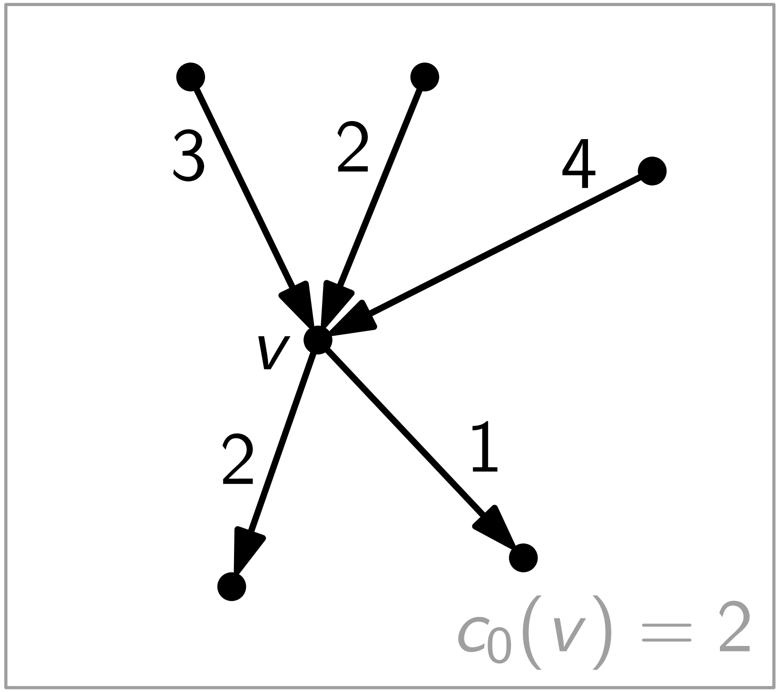
Kostenmodifikation

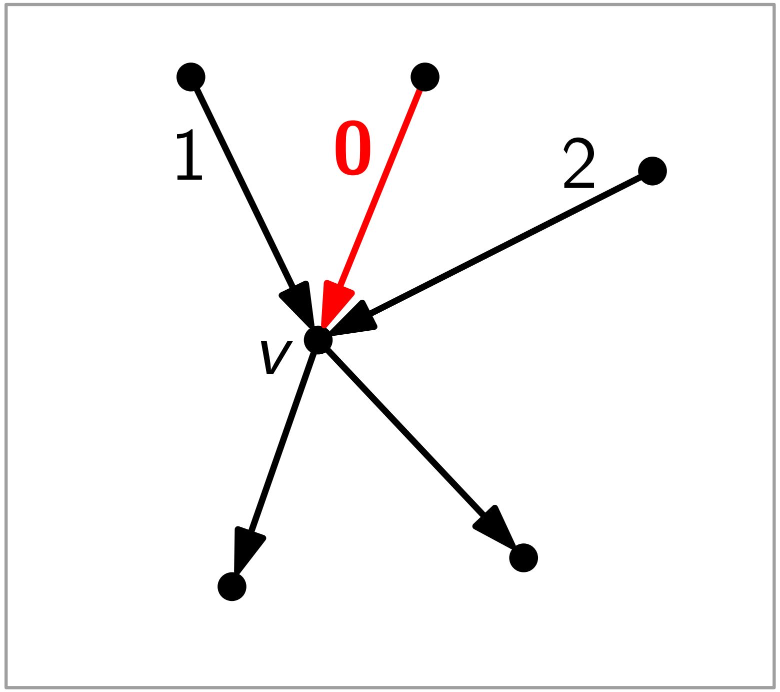
Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.

O.B.d.A. $\mathrm{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

Für jede Kante (u,v) setze $c'(u,v) := c(u,v) - c_0(v)$.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten $v \neq s$ hat eingehende 0-Kante.





Validität der Kostenmodifikation

Lem[1]**.** Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis.

Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

indeg$_T(v) = 1$ für alle $v \neq s$ und indeg$_T(s) = 0$

$$= \sum_{(u,v)\in E_T} c(u,v) - \sum_{v\in V-s} c_0(v)$$

$$= c(E_T) - \boxed{\sum_{v\in V-s} c_0(v)}$$

unabhängig von T!

$\square$

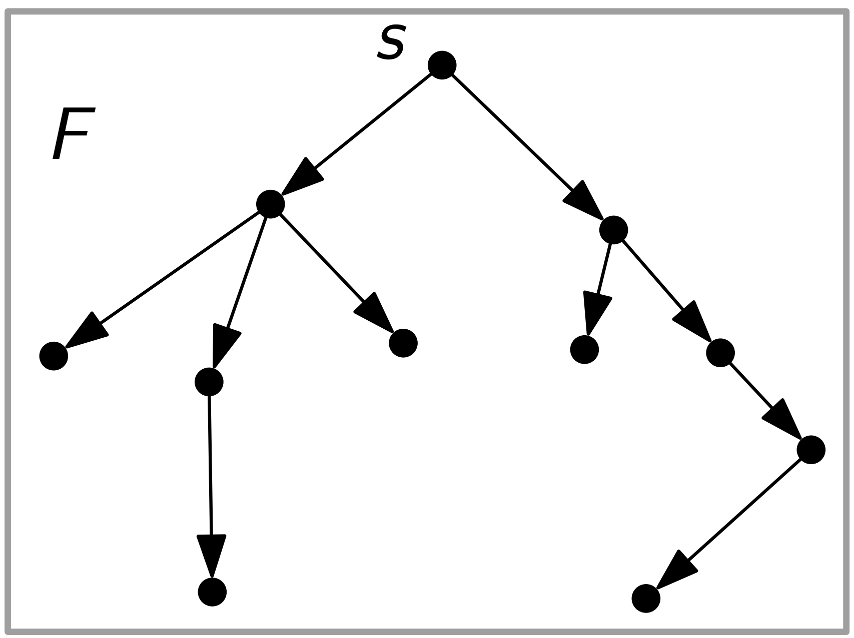
Ein Versuch

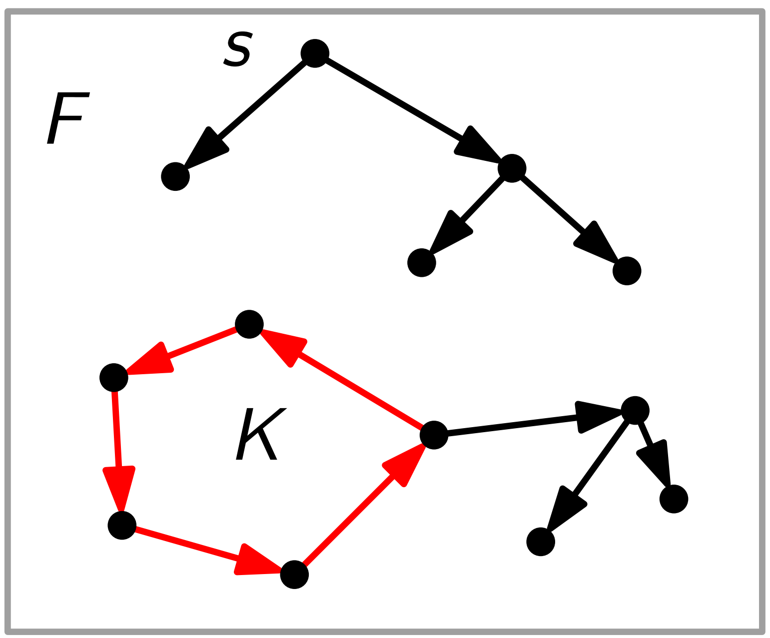
Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von G

Falls F azyklisch $\Rightarrow$ F ist s-Wurzelspannbaum von G!

Beachte: F ist *optimal* bzgl. c' (und somit auch bzgl. c), da $c'(F) = 0$.

Problem: Was tun, wenn F Kreis K enthält?



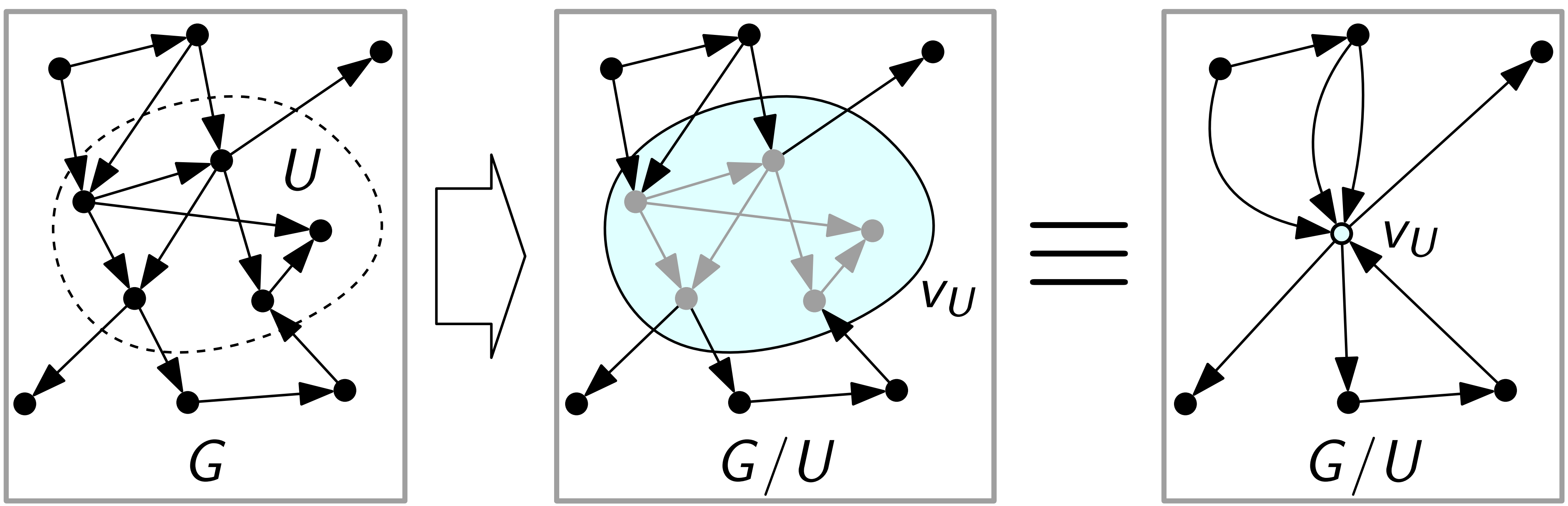


Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

Kontraktion von U: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U.

Kantenkosten werden auf G/U vererbt.



Expansion

Lem[2]. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

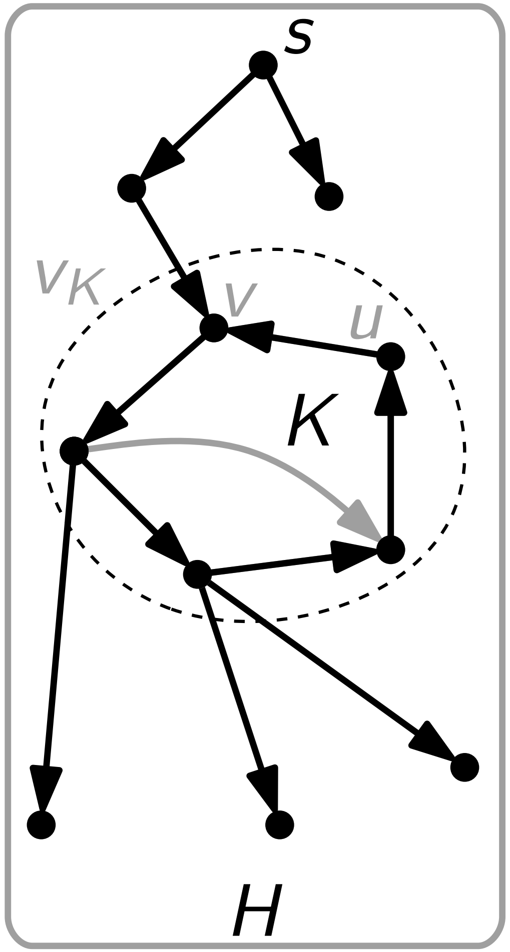
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu.



Expansion

Lem[2]. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K.
Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

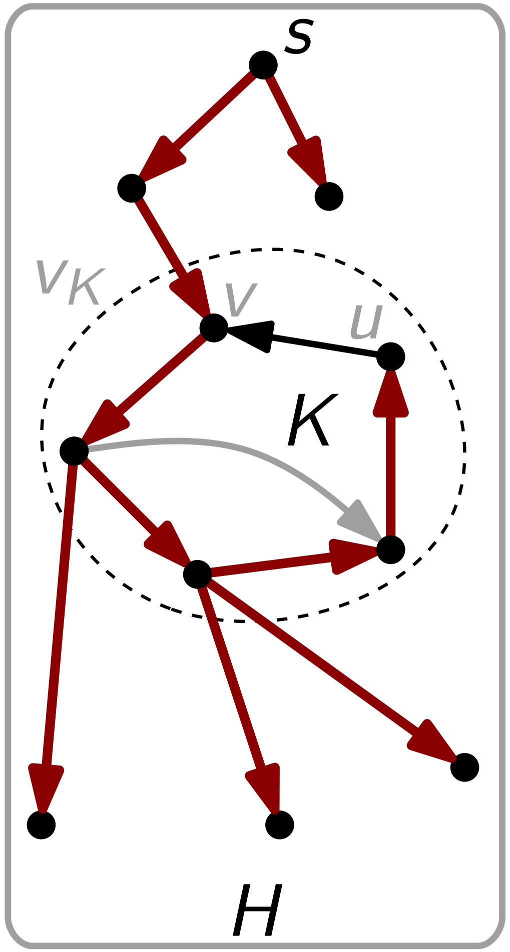
$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s-Wurzelspannbaum T $(= H - uv)$ von H.

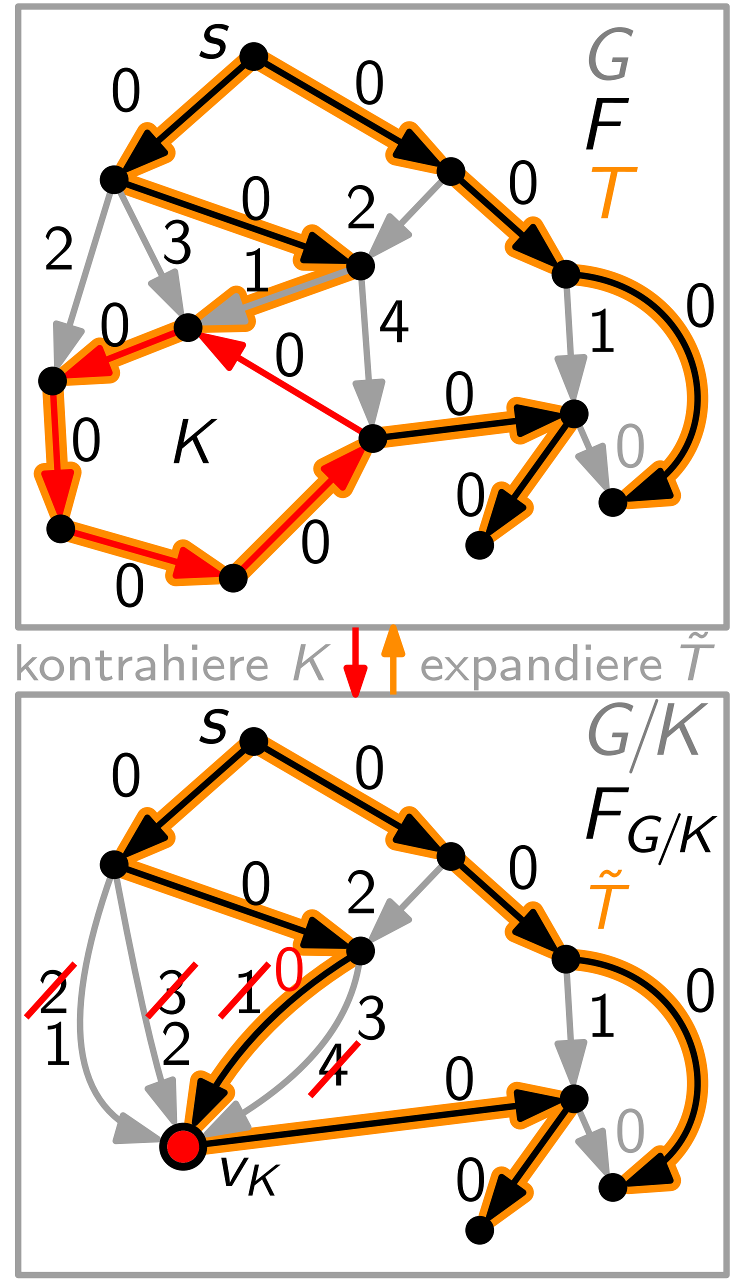
T ist s-Wurzelspannbaum von G.



Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G [gemäß Lem$_2$].
- Gib T zurück.



Jack R. Edmonds
*1934

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

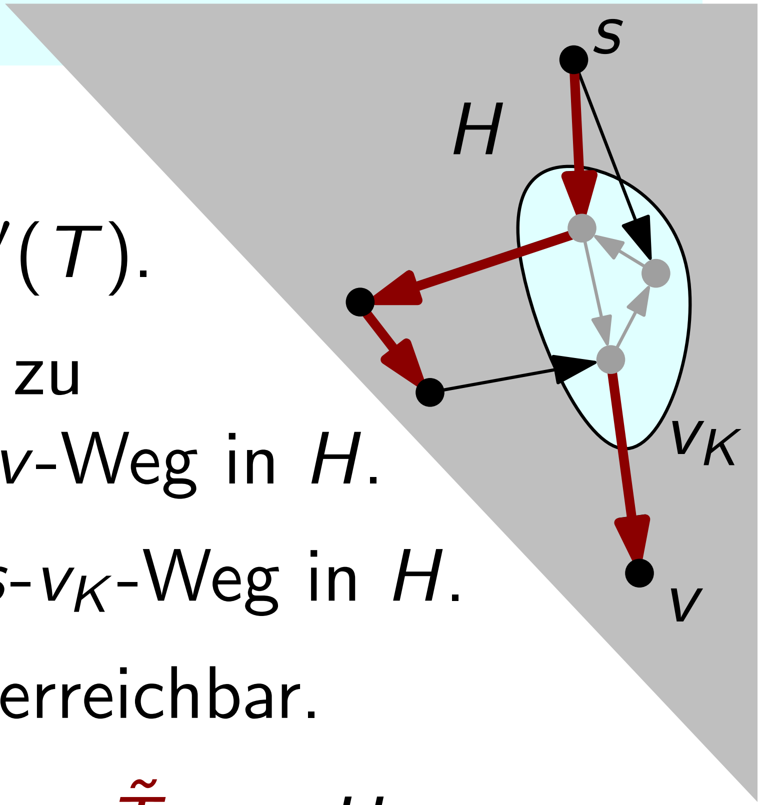
In jeder Rekursionsstufe verringert sich Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(V)$ rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils $O(E)$ Zeit.

Satz. Edmonds' Algorithmus terminiert in $O(VE)$ Zeit.

Optimalität

Lem[3]. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.



Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch s-Wurzelspannbaum von G/K und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq c'(T)$. $\square$

Optimalität

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):
Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.
Lem.[3] $\Rightarrow$ exist. s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s-WSB $\hat{T}$ von G/K.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.
Lem.[2] liefert s-WSB T von G mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \mathrm{OPT}'$.
$\Rightarrow$ T ist optimal bzgl. c' und somit bzgl. c. ✓ $\square$