Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2017

1. Vorlesung

Graphen: Eine Einführung

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung:

– Dienstags, 10:15–11:45, HS2

Übungen:

– Koordinator: *André Löffler* (E16, vorname.nachname@uni-w...)
– TutorInnen: Diana Sieper, Marcus Wilhelm, Johannes Zink
– Freitags, SE III, 8:30, 10:15, 12:15 – **ab dieser Woche!**

Übungsaufgaben:

– Bearbeitung von max. je *zwei* TeilnehmerInnen
– Ausgabe: dienstags via WueCampus
– Abgabe: dienstags 10:15 Uhr in Vorlesung oder Briefkasten (LS I).
Nur bei praktischen Aufgaben (CPLEX) via WueCampus!

Klausuren:

– 1. Termin: Di, 25. Juli, 10:00–12:00 Uhr, Turing-HS & HS2
– 2. Termin: Di, 10. Okt., 10:00–12:00 Uhr, Turing-HS

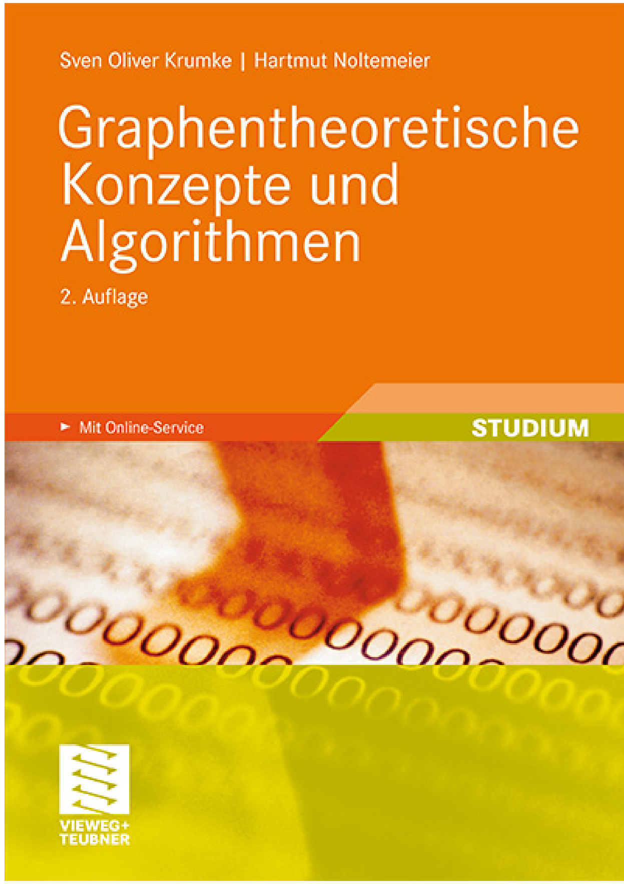
2x Anmelden!

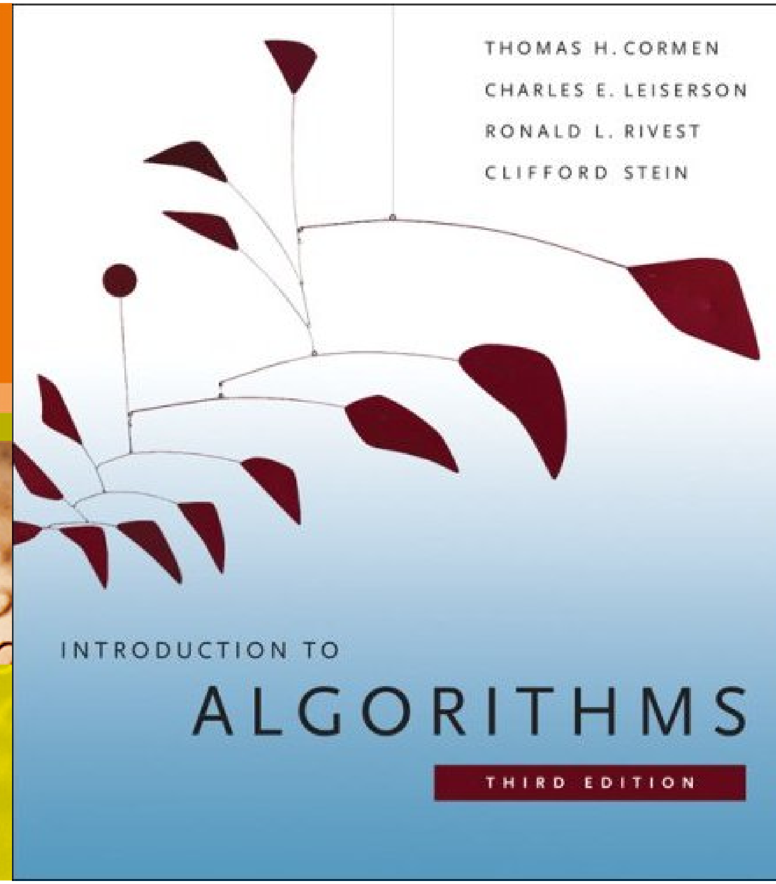
Bitte melden Sie sich ***sofort***
– bei sb@home und
– bei WueCampus2 an:

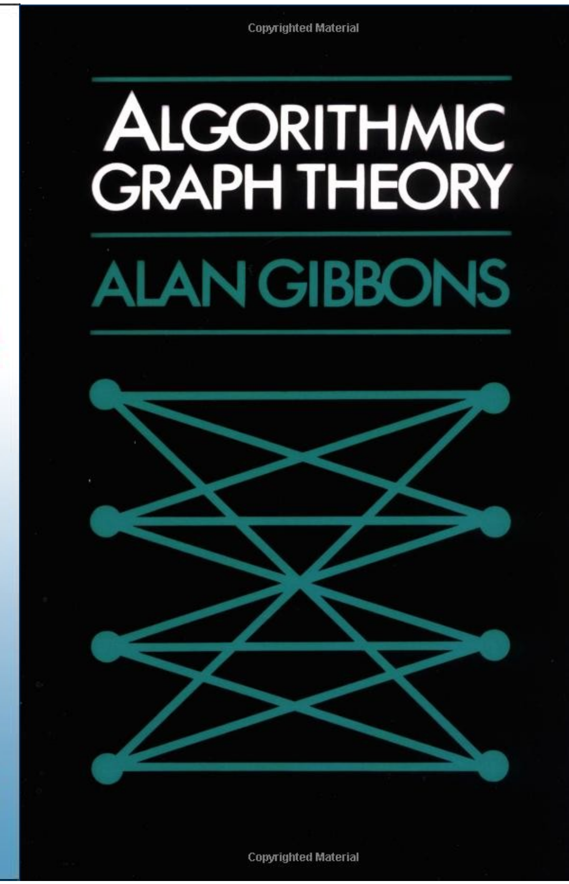
https://wuecampus2.uni-wuerzburg.de/moodle/course/view.php?id=21620

- Wir machen die Gruppeneinteilung über sb@home (am Mi., 26.4.)
- Wir benutzen WueCampus um Sie zu informieren, z.B. falls eine Übungsaufgabe fehlerhaft oder missverständlich ist.
- Wenn Sie sich nicht fristgerecht bei sb@home anmelden, ist es für uns **unmöglich** Ihre Note zu verbuchen.

Bücher zur Vorlesung







[KN] [CLRS] [G]

Hauptreferenz; elektronische Kopie über die Unibib erhältlich

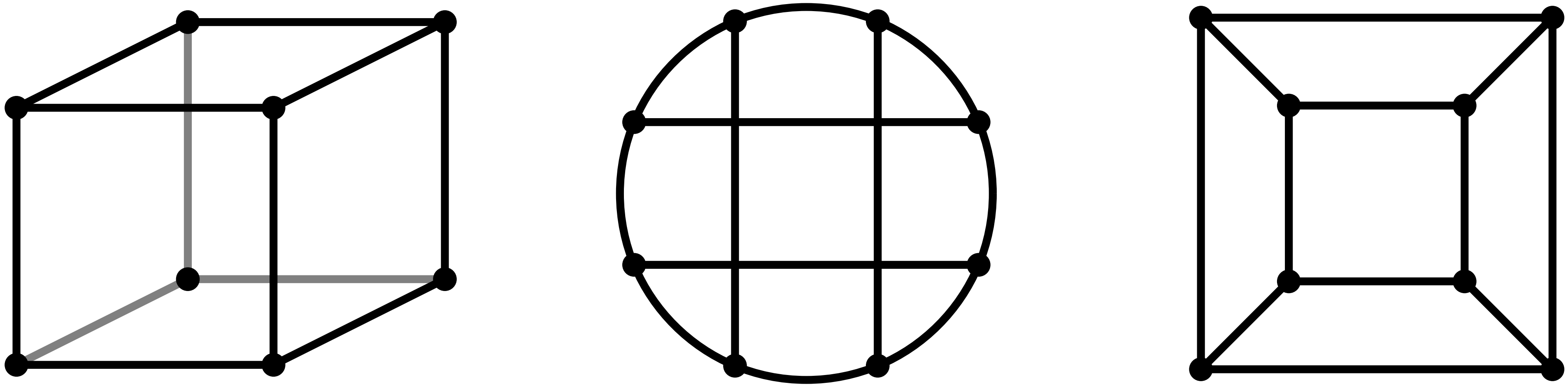
Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche (Anwendung: Zusammenhangskomp.)
  - Tiefensuche (topologisches Sortieren)
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume
  - Algorithmus von Kruskal
  - Algorithmus von Jarník–Prim

Repetitorium in der
Übung diesen Freitag!

Was ist das?



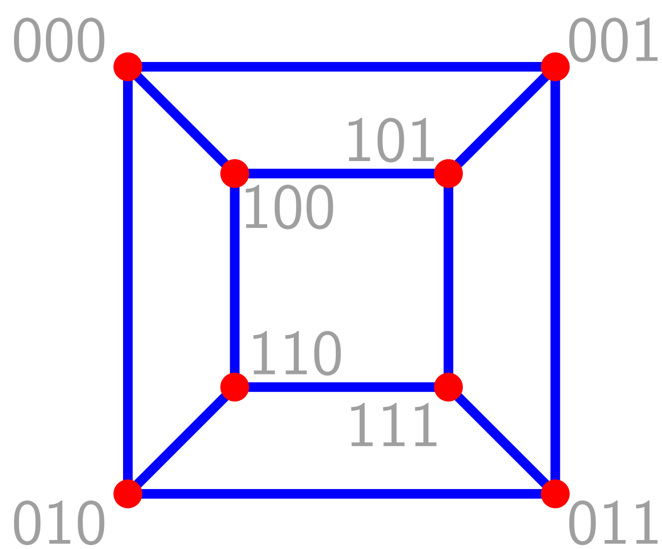
Ein (und derselbe) *Graph*; der dreidimensionale Hyperwürfel.

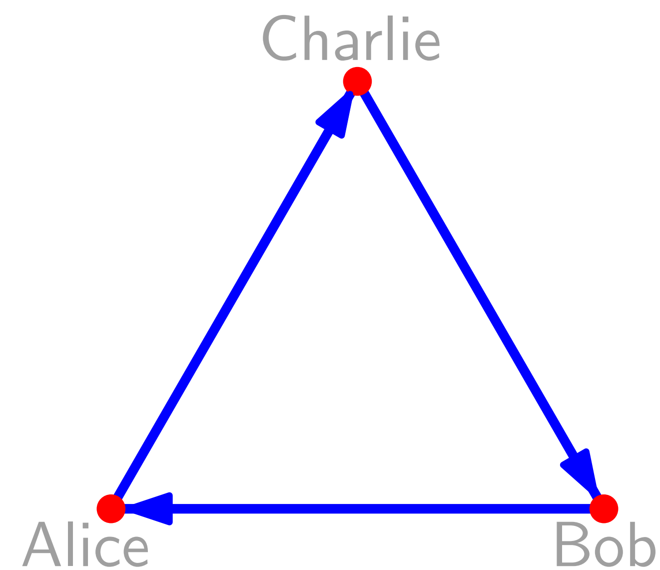
F: Was ist ein Graph?

A$_1$: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow$?



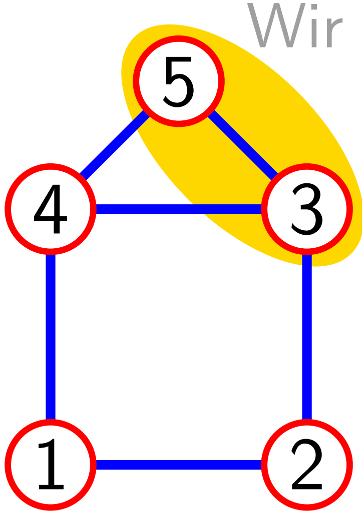


A$_2$: Ein *gerichteter* Graph ist ein Paar (V, E), wobei

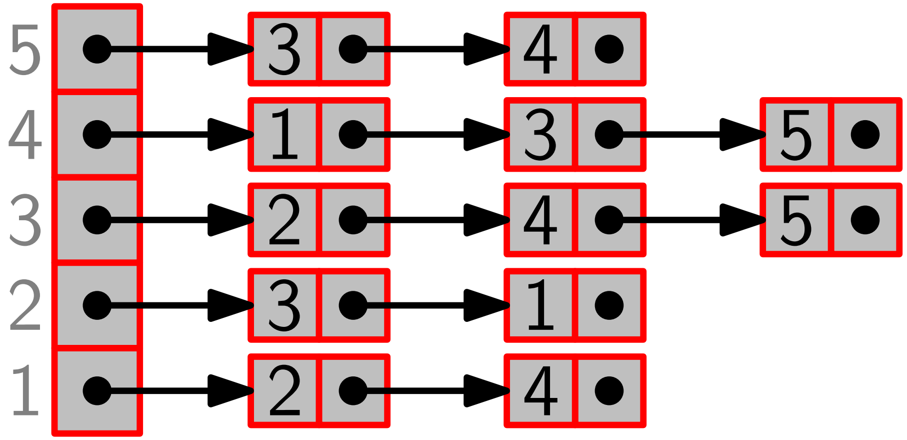
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \in V^2 \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



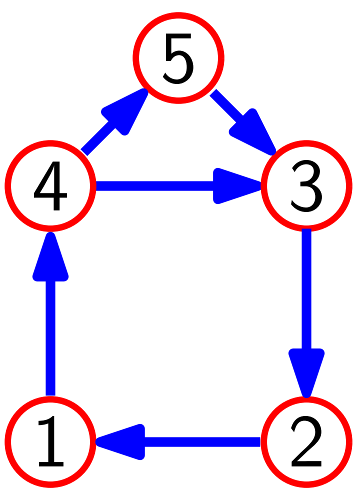
ungerichteter Graph



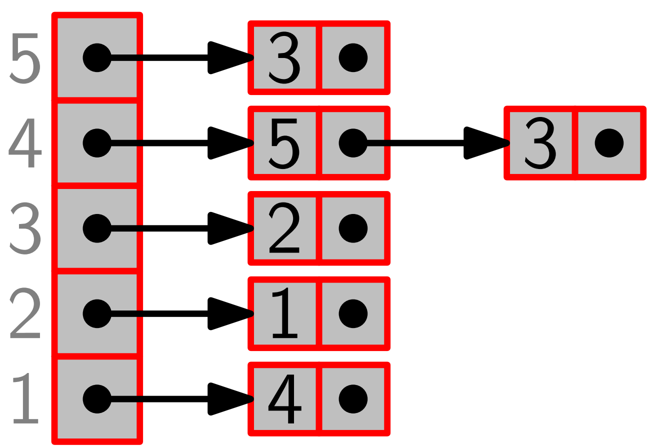
Adjazenzlisten

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Adjazenzmatrix



gerichteter Graph



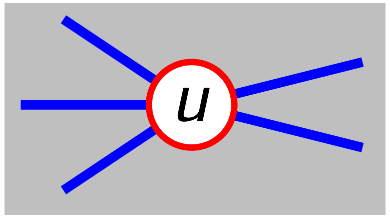
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

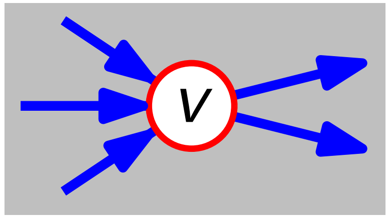
$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg u = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}\, v = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}\, v = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

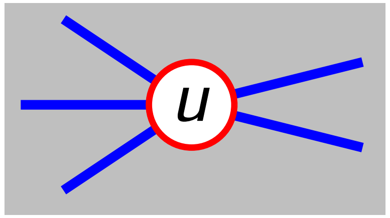
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

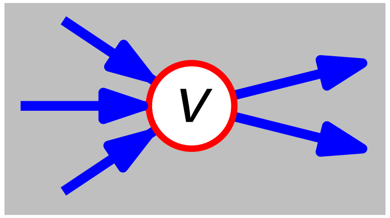
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg u = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\operatorname{outdeg} v = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\operatorname{indeg} v = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

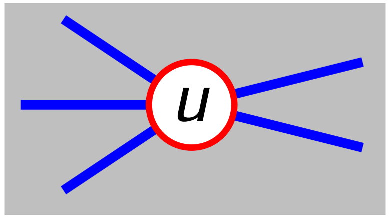
Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E} 2 = 2 \cdot |E|$

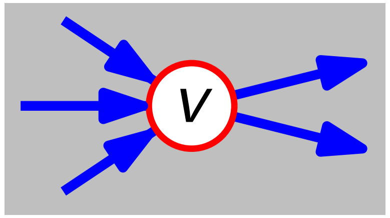
also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg u = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}\, v = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}\, v = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis. $\underbrace{2 \cdot |E|}_{\text{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\text{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg v}_{\text{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v}_{\Rightarrow \text{ gerade!}}$

$\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v$ *gerade* $\Rightarrow$ $|V_{\text{ung}}|$ ist *gerade!* $\square$

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

   $\mathcal{P}$

2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

   $\mathcal{NP}$-schwer